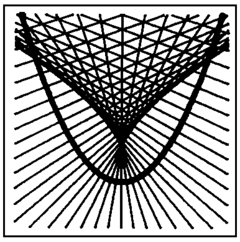
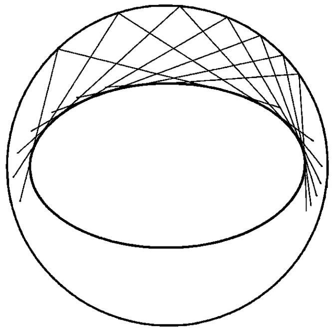
OLTRE IL COMPASSO
La geometria delle curve



Una proprietà dell'ellisse



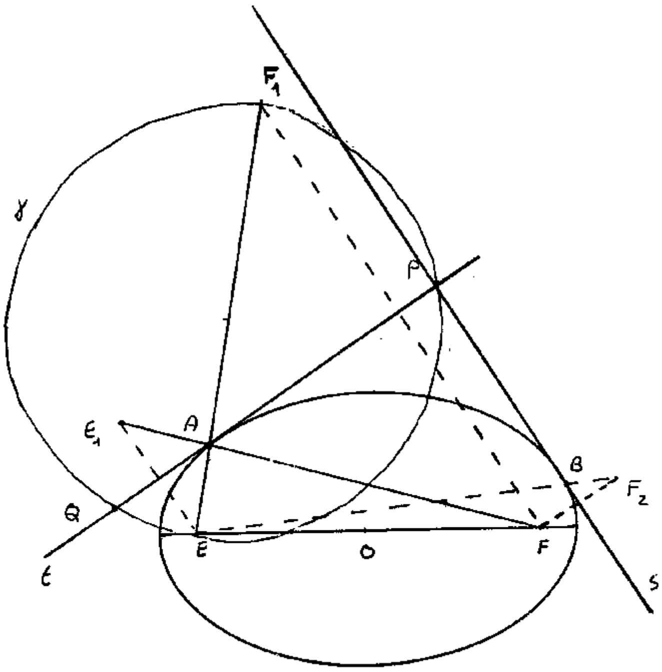
Ci proponiamo di dimostrare che il luogo di punti che “vedono” un’ellisse sotto un angolo retto è una circonferenza.

Possiamo dare due dimostrazioni di questo fatto, una sintetica[1] ed una analitica.

Cominciamo con la prima:
Consideriamo una ellisse di semiassi a e b, fuochi E e F, centro O e una tangente t in un suo punto qualunque A. Siano E_1 ed F_1 i simmetrici di E ed F rispetto a t e indichiamo con γ la circonferenza di diametro $E_1 F_1$ e con P e Q le intersezioni tra γ e t. Vogliamo dimostrare che:

(1) la retta s, perpendicolare a t in P è tangente all’ellisse

(2) $OP = \sqrt{a^2 + b^2}$



Dimostriamo (1).
Sia F_2 il simmetrico di F rispetto a s.
Si ha allora:
$PF_2 = PF = PF_1$
e quindi i punti F_1, P, F_2 sono allineati.
Poiché $F_1\hat{P}E = \pi/2$ (il triangolo F_1PE è inscritto in una semicirconferenza) nel triangolo F_1EF_2 la mediana EP è anche altezza, quindi tale triangolo è isoscele e
$EF_2 = EF_1 = EA + AF = 2a$.
Allora se B è l’intersezione tra s e EF_2 si ha che
$EB + BF = EB + BF_2 = EF_2 = 2a$.
quindi B è un punto d’intersezione tra s e l’ellisse.

D’altra parte per ogni punto C, diverso da B, della retta s si ha

$EC + CF = EC + CF_2 > EF_2 = 2a$

Così abbiamo dimostrato che s è tangente in B all’ellisse.

[1] Per questa dimostrazione siamo debitori al prof. Piergiorgio Giudici del Liceo scientifico “A Volta” di Milano.

Vediamo adesso di dimostrare (2).

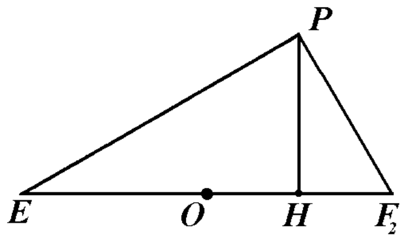
Per simmetria rispetto a t vale la relazione:

$$E_1\hat{P}F = E\hat{P}F_1 = \pi/2$$

Quindi:

$$EP^2 + PF^2 = E_1P^2 + PF^2 = E_1F^2 = 4a^2$$

Indicando con H il piede dell'altezza da P a EF si ha:



$$EP^2 + PF^2 = PH^2 + (EO + OH)^2 + PH^2 + (OF - OH)^2$$

$$EO = OF = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$EP^2 + PF^2 = 2PH^2 + 2OH^2 + 2(a^2 - b^2) = 2OP^2 + 2(a^2 - b^2)$$

$$OP^2 = 2a^2 - (a^2 - b^2) = a^2 + b^2 .$$

Per dare la dimostrazione analitica indichiamo con (x_0 , y_0) un punto del luogo fissato e siano $x = a\cos t$, $y = b\,\text{sen}\,t$, $0 \le t \le 2\pi$ le equazioni parametriche dell'ellisse.

Una generica retta per (x_0 , y_0) ha equazione $y - y_0 = m(x - x_0)$, cercando le intersezioni con l'ellisse si ottiene $b\,\text{sen}\,t - y_0 = m(a\cos t - x_0)$ e se si indica con r la tangente trigonometrica dell'angolo $t/2$ si ottiene l'equazione

$$b\frac{2r}{1+r^2} = ma\frac{1-r^2}{1+r^2} + y_0 - mx_0 ,$$

cioè

$$(y_0 - mx_0 - ma)r^2 - 2br + (y_0 - mx_0 - ma) = 0 .$$

Imponendo la condizione di tangenza, si ottiene:

$$\frac{\Delta}{4} = b^2 - (y_0 - mx_0)^2 + m^2a^2 = 0$$

equazione di secondo grado in m che deve avere radici con prodotto uguale a -1 (affinché le due tangenti siano perpendicolari). Riscritta l'equazione nel modo seguente

$$m^2\left(a^2 - x_0^{\ 2}\right) + 2mx_0y_0 + b^2 - y_0^{\ 2} = 0 ,$$

si vede subito che il prodotto delle radici è

$$\frac{b^2 - y_0^{\ 2}}{a^2 - x_0^{\ 2}},$$

e dunque deve essere $x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} = a^2 + b^2$, cioè (x_0 , y_0) sta sulla circonferenza che ha centro nel centro dell'ellisse e raggio $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Viceversa è facile vedere, effettuando in senso inverso gli stessi passaggi, che ogni punto di tale cerchio ha le tangenti all'ellisse tra loro perpendicolari.