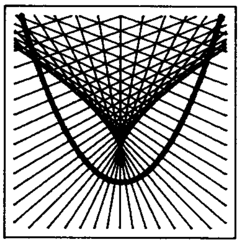
OLTRE IL COMPASSO
La geometria delle curve



Inviluppi, evolute, evolventi

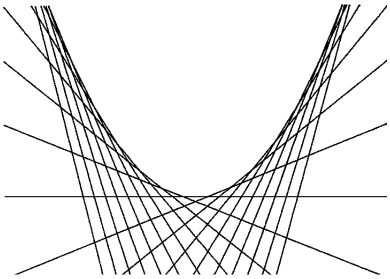
Inviluppo, evoluta, evolvente…: termini mai sentiti o che non vorremmo mai sentire! Eppure, dietro questi nomi poco rassicuranti si nascondono concetti relativamente semplici e comunque esteticamente affascinanti.

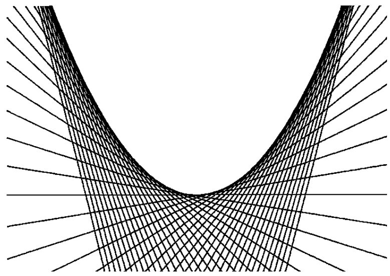
INVILUPPO:

è un modo di descrivere una curva tramite una *famiglia di curve*.

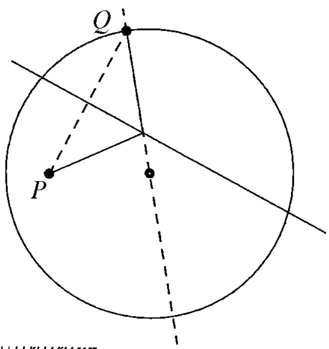
Una prima caratterizzazione intuitiva ci dice che una famiglia di curve *inviluppa* una curva G se ogni elemento della famiglia è tangente a G [1]. Vediamo di chiarire la cosa con alcuni esempi.

Consideriamo la famiglia di rette in figura: queste "ïnviluppano" una parabola, cioè ogni retta della nostra famiglia è tangente alla parabola. Notiamo che la parabola non è fisicamente tracciata, la curva diventerà sempre più facilmente individuabile mano a mano che aumenta il numero di rette che tracciamo.

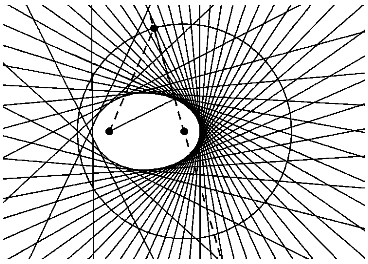


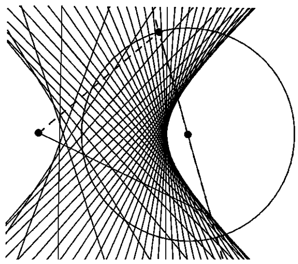


Un'ellisse può essere disegnata in molti modi. Uno dei tanti è questo: consideriamo un cerchio e fissiamo un punto P interno ad esso e diverso dal centro. Uniamo P con un qualsiasi punto Q del bordo del cerchio e tracciamo l'asse del segmento di PQ. Al variare di Q sulla circonferenza tracceremo una famiglia di rette che inviluppa un'ellisse (in questo modo si può costruire, come vedremo in seguito, un'ellisse piegando la carta)



Utilizzando la costruzione precedente ma scegliendo il punto P esterno al cerchio otterremo invece una iperbole.



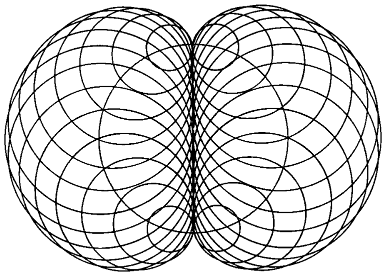


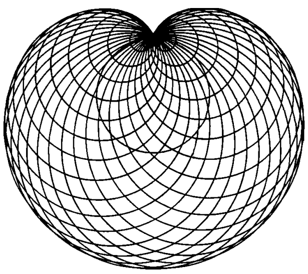
Nella nostra "definizione" di inviluppo abbiamo però parlato di una famiglia di curve generiche, non necessariamente rette. Infatti, anziché una famiglia di rette possiamo ad esempio considerare una famiglia di cerchi. La famiglia di cerchi con centro su di un cerchio fissato e tangenti ad un suo diametro invilupperanno una curva particolare che si dice *nefroide*.

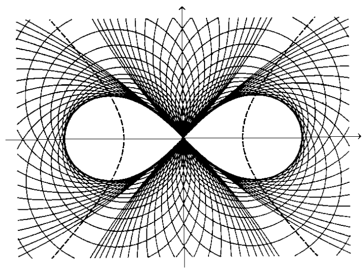
---

[1] Due curve sono tangenti in un punto se hanno retta tangente comune in quel punto.

La *cardioide* può essere ottenuta come inviluppo di cerchi con centro su di un cerchio fissato e passanti per un suo punto P, o ancora la famiglia di cerchi con centro su un'iperbole equilatera e che passano per il suo centro inviluppano la *lemniscata di Bernoulli*.



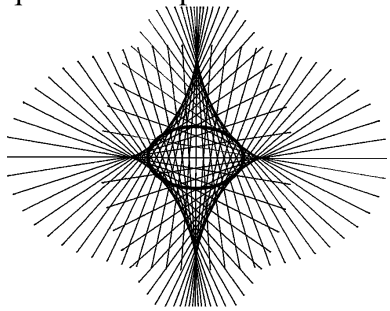




EVOLUTA:

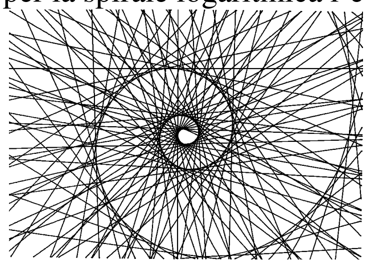
il concetto di inviluppo di una curva è fondamentale per parlare dell'*evoluta* di una curva. Tutti sanno cos'è la tangente ad una curva, ci basterà così definire la *retta normale* ad una curva in un punto come la retta perpendicolare alla retta tangente alla curva in quello stesso punto.

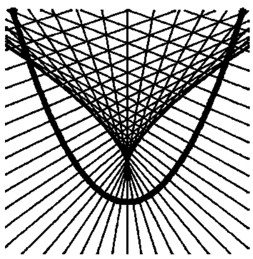
Consideriamo adesso una curva, ad esempio un'ellisse, e costruiamo la sua evoluta: tracciamo tutte le sue rette normali; la curva inviluppata da tali rette è l'evoluta dell'ellisse.



In modo analogo possiamo ottenere l'evoluta del cerchio, costituita da un solo punto, cioè il suo centro o l'evoluta della parabola che è il Logo della mostra "Oltre il compasso".

In generale una curva e la sua evoluta sono due curve fra loro differenti. In alcuni casi però come per la cicloide o per la spirale logaritmica l'evoluta della curva è identica alla curva stessa.



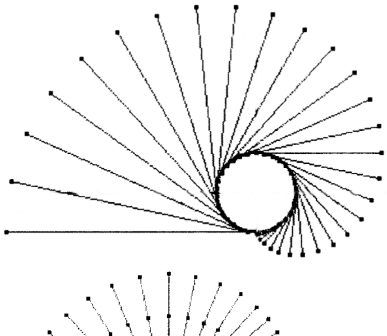


EVOLVENTE:

strettamente legata (come vedremo) all'evoluta, per definire l'evolvente di una curva Γ dobbiamo considerare su quest'ultima un punto O che si dirà *punto iniziale*.

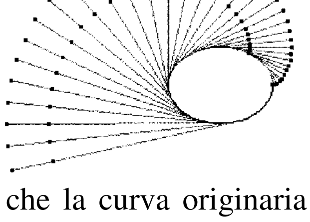
Immaginiamo ora di fissare un estremo di una cordicella ad O e teniamo tesa la corda in modo che sia tangente alla curva nel punto iniziale.

Cominciamo poi a far aderire a Γ una parte sempre più lunga della cordicella facendo in modo che il tratto libero sia tangente alla curva nel punto di stacco della corda dalla curva stessa. L'estremità libera della cordicella descriverà allora l'evolvente della curva.



In figura è raffigurata l'evolvente di un cerchio.

D'altra parte mentre l'evoluta di una curva è unica, l'evolvente dipenderà dal punto iniziale scelto per fissare la cordicella perciò avremo infinite evolventi fra loro parallele (in figura sono disegnate due evolventi di un'ellisse).

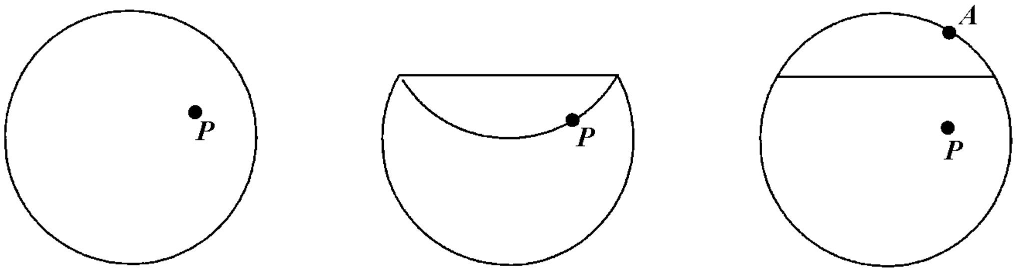


Il legame tra evoluta ed evolvente è molto stretto: notiamo infatti che la curva originaria Γ può essere vista come l'evoluta dell'evolvente.

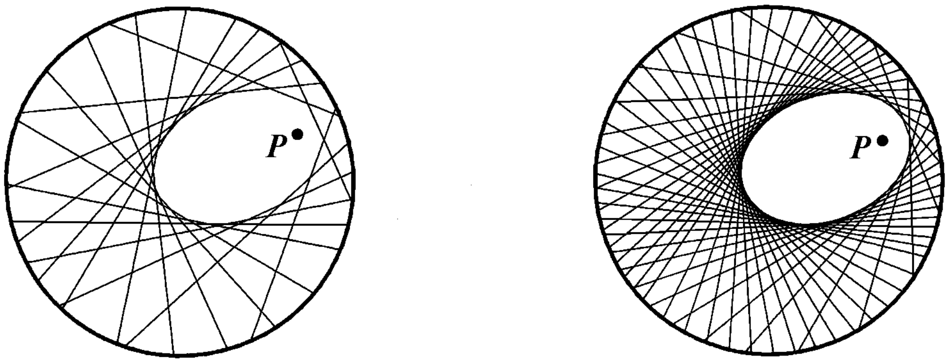
Costruire un'ellisse piegando la carta

La costruzione:

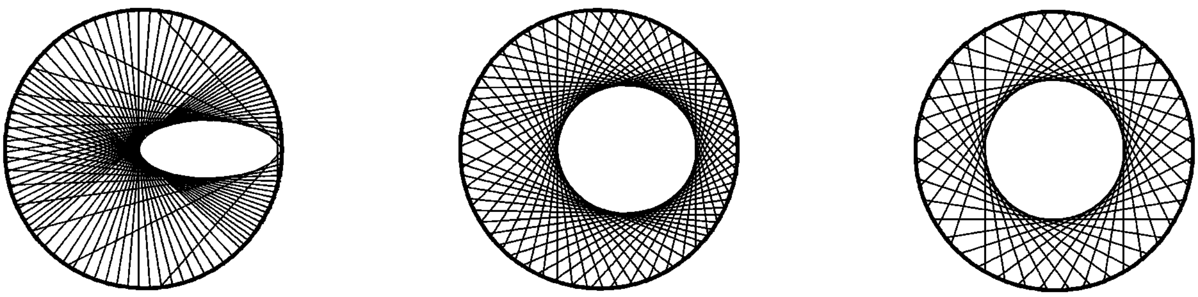
Prendete un pezzo di carta, ritagliate un cerchio e segnate un punto *P* all'interno di questo cerchio. Fate quindi una piegatura nel foglio in modo tale da portare il punto *A* del bordo a sovrapporsi con il punto *P* che avete segnato, come in figura.



Naturalmente potrete fare diverse piegature di questo tipo, a seconda di quale punto della circonferenza portate a sovrapporsi con *P*. Se ne fate tante (ogni volta riaprendo il foglio prima di fare la piegatura successiva) vedrete apparire l'ellisse "disegnato" dalle piegature che avete fatto; più precisamente l'ellisse come inviluppo delle rette rappresentate dalle pieghe.
Già con una ventina di pieghe avrete una figura abbastanza bella; naturalmente più pieghe farete e più l'ellisse apparirà chiaramente.



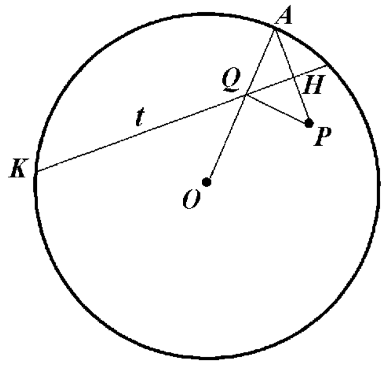
Variando la posizione del punto *P* che avete scelto per iniziare la costruzione, potrete ottenere ellissi di forma diversa: più allungate, quanto più *P* è lontano dal centro del cerchio, più "grasse" quanto più *P* è vicino al centro; otterrete una circonferenza se scegliete *P* proprio il centro del cerchio.



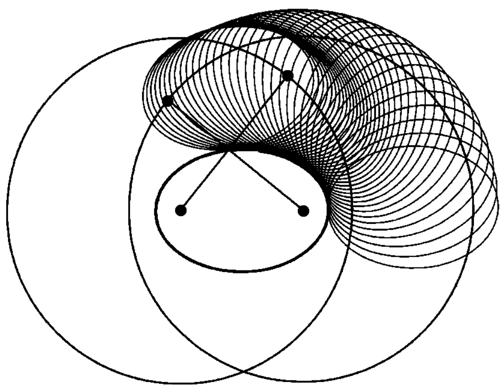
Perché la costruzione funziona:

Quando fate la piegatura che porta il punto *A* della circonferenza a sovrapporsi con *P*, e poi riaprite il foglio, la piega ottenuta è l'asse *t* del segmento *AP* (o più precisamente, l'intersezione dell'asse *t* con il cerchio).
Ciascuno di questi assi risulta tangente ad un'ellisse che ha per fuochi il punto *P* e il centro *O* della circonferenza. Infatti, se *Q* è come in figura il punto in cui il raggio *OA* interseca *t*, si ha che i triangoli *AQH* e *PQH* sono uguali.
Quindi:

$$OQ + QP = OQ + QA = \text{raggio del cerchio.}$$



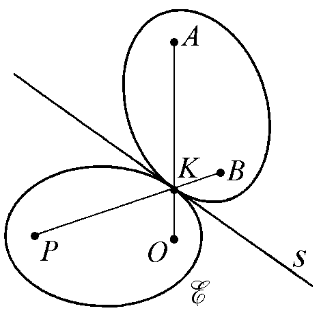
Dunque la somma delle piegature del punto *Q* dai punti *O* e *P* è sempre la stessa qualunque sia la piegatura effettuata, cioè *Q* appartiene ad una ellisse di fuochi *O* e *P*.
Inoltre la retta *t* forma angoli uguali con i segmenti *OQ* e *PQ*, in quanto $O\hat{Q}K = A\hat{Q}H = P\hat{Q}H$, e quindi tale retta, per la seconda proprietà focale, è tangente all'ellisse.



Vale la pena di osservare che quanto detto è strettamente legato all'exhibit *Ellissi che rotolano* dove due ellissi uguali sono collegate da due asticciole che si incrociano unendo ciascuna un fuoco della prima ed uno della seconda nel modo che si vede in figura.
Grazie anche alla precedente costruzione è possibile, tenendo ferma un'ellisse, far rotolare l'altra sulla prima in modo che rimangano sempre tra loro tangenti ed il punto di intersezione delle due asticciole sia il punto di tangenza comune.

Consideriamo infatti l'ellisse E di fuochi *O* e *P* tale che la somma delle distanze di tutti i suoi punti da *P* e da *O* sia uguale ad *r* e sia *s* la retta tangente all'ellisse in un suo punto qualsiasi *K*. Ribaltando il ragionamento fatto in precedenza possiamo dire che i punti *A* e *B*, simmetrici di *P* ed *O* rispetto ad *s* appartengono rispettivamente alla circonferenza di centro *O* e raggio *r* ed a quella di centro *P* e raggio *r*. Così, al variare di s, *P*, *K*, *B* e *A*, *K*, *O* saranno terne di punti allineati e si avrà: $PB = OA = r$ ovvero:

$$PB = OA = AK + OK = AK + KB = r\,.$$



Allora l'ellisse di fuochi *A* e *B* simmetrica di E rispetto ad *s* può rotolare su E "senza strisciare" ed il punto di tangenza è anche punto di intersezione dei segmenti di lunghezza costante *PB* ed *OA*.