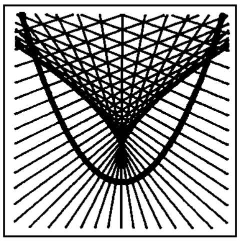
OLTRE IL COMPASSO
La geometria delle curve

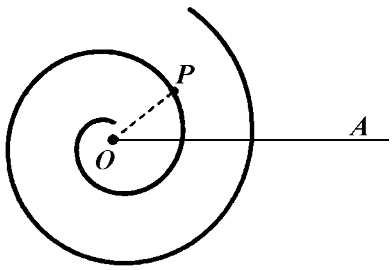


Spirali

Una delle curve che frequentemente capita sotto i nostri occhi nella vita quotidiana è, senza dubbio, la spirale. E' spesso assunta a simbolo del sole come immagine dell'espansione: infatti ruotando si conserva sempre simile a se stessa, ma allo stesso tempo va allargandosi e distendendosi all'infinito.
D'altra parte le metafore usate nel linguaggio comune di spirale del vizio o della follia ci mostrano come in questa curva il movimento si possa trasformare da un'espansione ad una contrazione continua che ipnoticamente fa precipitare nel centro.
A dispetto di queste immagini contrapposte, la generazione delle linee spirali è fra le più semplici e, forse, questo fattore è stato determinante nello spingere i matematici a studiarne le proprietà fin dall'antichità.

La prima e più semplice delle linee spirali è quella studiata da Archimede, che porta il suo nome: la *spirale archimedea.* Essa si genera quando un punto P si muove a velocità uniforme v su un'asta, che a sua volta ruota uniformemente attorno a un suo punto O, con velocità angolare ω. Supponiamo che P coincida inizialmente con O; se indichiamo con r la distanza di P dal centro di rotazione O e con ϑ l'angolo che OP forma con la posizione iniziale dell'asta avremo:

$$\begin{cases} r = vt \\ \vartheta = \omega t \end{cases}$$



da cui, ricavando t dalla seconda equazione e sostituendo nella prima, si ottiene l'equazione (in coordinate polari) della curva descritta da P:

$$r = \frac{v}{\omega}\vartheta$$

Altre spirali si ottengono supponendo che il moto lungo l'asta sia accelerato in vari modi, ad esempio che si abbia $r = a\,t^2$ (spirale quadratica), o più in generale $r = a\,t^n$.
In questo caso, si ottiene 1'equazione:

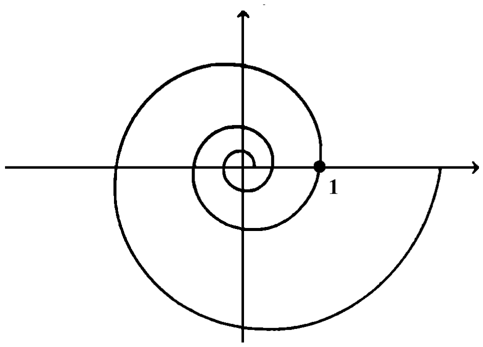
$$r = \frac{a}{\omega^n}\vartheta^n$$

Tutte queste spirali partono dal centro di rotazione e vanno allontanandosi sempre più via via che l'angolo ϑ cresce.
Di genere diverso è la spirale logaritmica, la cui equazione è:

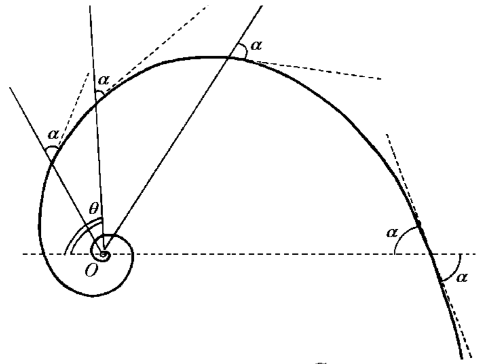
$$\vartheta = \log_A r$$

ovvero:

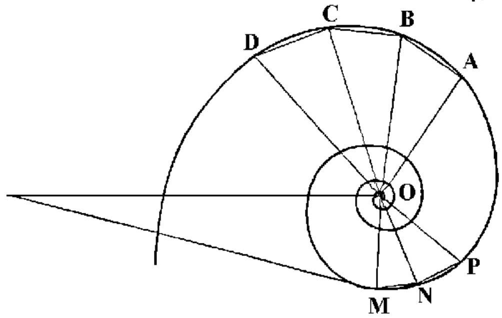
$$r = A^{\vartheta} \qquad (A > 1)$$



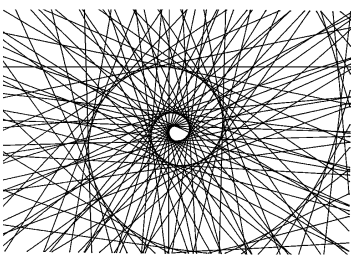
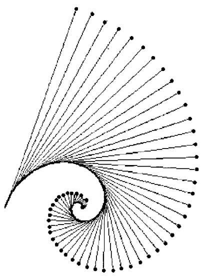
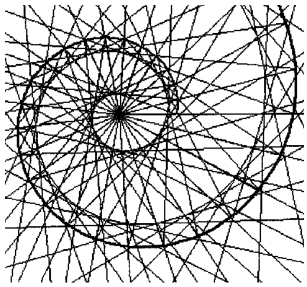
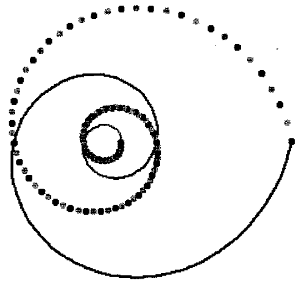
Questa spirale non parte dal centro come le altre, ma si trova inizialmente (cioè, per $\vartheta = 0$) a distanza 1 da questo. Via via che ϑ cresce, la spirale logaritmica si allontana dal centro come le precedenti, anche se molto più velocemente; quando poi ϑ diventa negativo aumentando in valore assoluto, il punto descrive infinite rivoluzioni avvicinandosi sempre più al centro, senza mai giungervi: la spirale logaritmica è infinita nei due versi.



Questa curva si dice anche equiangola perché taglia i suoi raggi vettori con un angolo costante.
Una sua semplice costruzione si ottiene, grazie a questa proprietà, dimostrando che i triangoli AOB e COD indicati nella figura a fianco sono fra loro simili. Infatti, se allora si conoscono due punti della spirale M , N e si costruisce su ON un triangolo ONP simile al triangolo OMN , P sarà un terzo punto della curva, da cui se ne dedurrà un quarto, poi un quinto e così via.

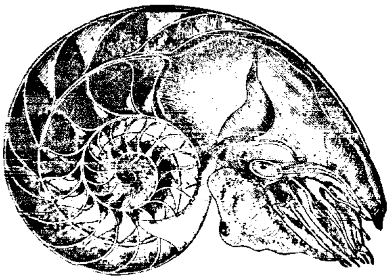
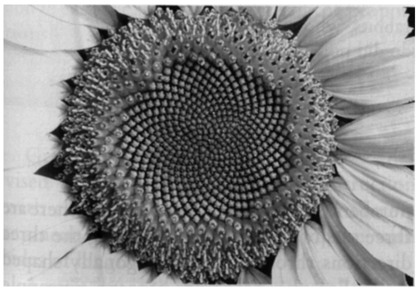
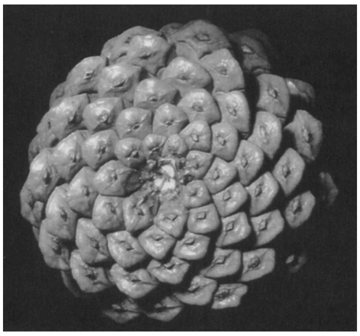
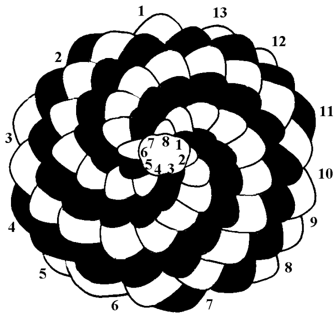


Il matematico Johann Bernoulli fu affascinato dalla "*spiralis mirabilis*" e ne scoprì molte proprietà fra le quali quella che la spirale logaritmica si trasforma in una curva uguale per qualunque inversione avente il suo centro nel polo, o che la podaria rispetto al suo polo, l'evoluta, l'evolvente, le caustiche per riflessione e per rifrazione con luce nel polo sono sempre spirali fra loro identiche.

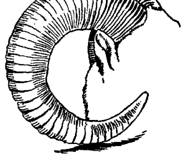
Questa facoltà di "riprodursi" la fece vedere un simbolo della resurrezione a Bernoulli che, per questo, volle che fosse scolpita sulla sua pietra tombale a Basilea con la scritta "*Eadem mutata resurgo semperdem*" (restando la stessa risorgo immutata). Purtroppo, lo scultore incaricato non era un buon matematico e così la spirale logaritmica fu sostituita con una archimedea.

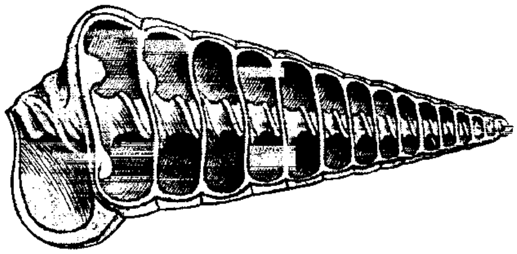
In natura possiamo trovare moltissime spirali logaritmiche, in particolare ogni volta che si ha un accrescimento; ne sono esempi tipici la conchiglia del Nautilus, le pigne nonché i semi nel centro di un girasole.

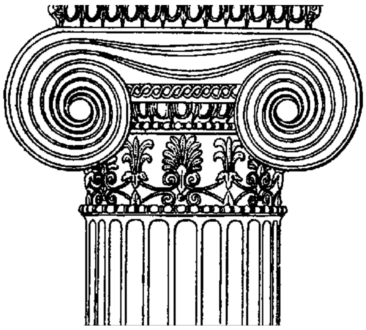
Una curiosità a questo proposito è data dal fatto che sia nel fiore che nella pigna possiamo osservare spirali che girano in senso orario e spirali che girano in senso antiorario: ebbene il numero di spirali dei due tipi non è casuale ma appartiene sempre ad una particolare serie di numeri ben nota ai matematici, la serie di Fibonacci.(nello schema della pigna in figura ci sono 8 spirali destrorse e 13 sinistrorse)
Le spirali logaritmiche in tre dimensioni (ottenute facendo crescere la nuova coordinata secondo la stessa legge applicata al raggio vettore) si possono infine ritrovare in conchiglie, corna di animali etc…

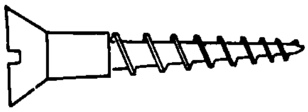




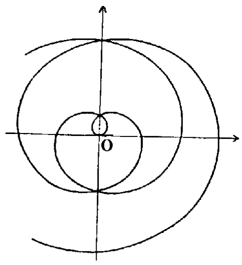



D'altra parte, questo tipo di spirale non è certo l'unico che possiamo osservare: spirali di ogni genere sono presenti nell'arte, nelle galassie, in alcuni cristalli, nelle viti comuni…





Finora abbiamo sempre considerato spirali nella cui equazione ϑ fosse positivo. Ma se come spesso avviene consideriamo l'equazione $r = a\vartheta$ per valori negativi di ϑ, otterremo un altro ramo della spirale di Archimede (v. figura a lato).



Questa curva costituisce la base per la soluzione di un problema tecnico di notevole importanza.
Alla fine dell'800 la macchina da cucire Singer era ormai affermata ovunque. Tuttavia per migliorare questa rivoluzionaria scoperta occorreva trovare una guida che muovendosi con velocità costante (alternativamente da destra a sinistra), indirizzasse il filo avvolgendolo in modo uniforme sul rocchetto.
Utilizzando la guida più semplice che si muove di moto circolare uniforme si deposita molto più filo alle estremità (nei punti cioè dove si ha l'inversione) che non al centro. Ebbene la Singer brevettò la soluzione (tuttora usata) a questo problema utilizzando una camma formata da due spezzoni di spirale archimedea.