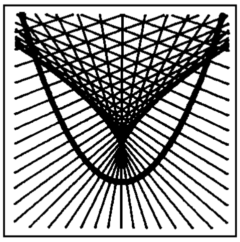
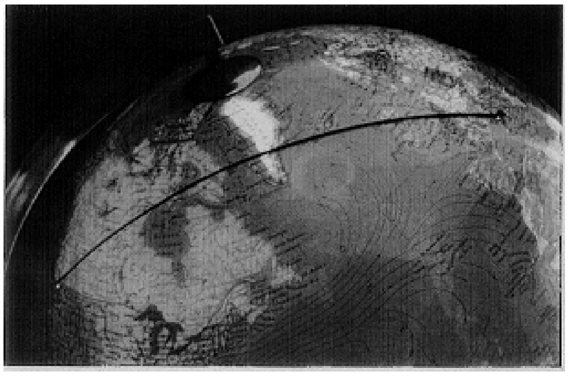
OLTRE IL COMPASSO
La geometria delle curve



La via più breve

La via più breve tra due punti è la retta. Come tutti i luoghi comuni, anche questo vale solo in certi casi. Chiaramente, se vogliamo attraversare una piazza converrà andare il linea retta; ma se vogliamo andare da Pisa a S. Francisco la linea retta non va più bene e conviene muoversi lungo una curva. Quale? Per rispondere a questa domanda possiamo fare come gli antichi egizi: tirare una corda, naturalmente su un mappamondo. Il risultato è che la linea più breve, la geodetica, tra due punti su una sfera è un cerchio massimo, quello cioè che si ottiene intersecando la sfera con un piano che passa per il centro e per i punti in questione. Per questo motivo i voli transoceanici si svolgono molte volte su rotte polari.



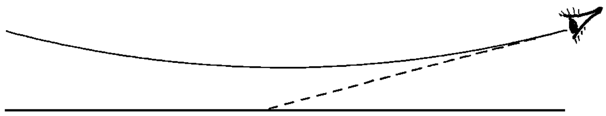
Se invece che su una sfera ci troviamo su un'altra superficie, avremo un diverso sistema di geodetiche, sulle quali conviene muoversi per minimizzare il cammino tra due punti.

Ma non è necessario andare su superfici per avere geodetiche curve. Molto spesso avviene anche su una superficie piana, se scegliamo di misurare le distanze in modo diverso dal solito, ma non per questo meno naturale. In molti casi ad esempio, più che la distanza, è utile minimizzare il tempo impiegato. Se si tratta di attraversare una piazza non ci sono differenze, dato che ci muoviamo a velocità costante, e dunque il tempo è proporzionale allo spazio. Ma supponiamo invece di stare su un terreno accidentato, ad esempio con delle zone sabbiose; in questo caso sarà più conveniente evitare di insabbiarsi troppo, anche a costo di allungare il cammino. Se allora misuriamo la distanza tra due punti per mezzo del tempo che impieghiamo per andare da uno all'altro, le geodetiche non sono più rette, ma delle curve che evitano per quanto possibile le zone difficili.

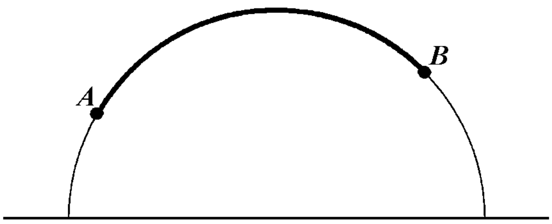
Un esempio tipico di questa situazione è costituito dal cammino dei raggi luminosi. Il principio di Fermat ci dice che per andare da *A* a *B* la luce segue il cammino che rende minimo il tempo impiegato. Siccome la velocità della luce è praticamente costante, la propagazione della luce avviene usualmente per linee rette. Ma se si passa dall'aria all'acqua o al vetro, dove la velocità della luce è minore, converrà diminuire il tratto percorso nell'acqua, anche a prezzo di aumentare quello in aria e quello totale. Di qui il fenomeno della rifrazione (il bastone immerso nell'acqua sembra rotto), e la costruzione delle lenti.

Peraltro, a volte i raggi luminosi seguono un cammino non rettilineo anche in aria, ad esempio quando un forte riscaldamento provoca sensibili differenze di densità tra vari strati, e dunque la luce si muove con velocità sensibilmente diverse.

In questi casi può accadere che i raggi si incurvino verso l'alto, in modo che chi guarda lontano vede il cielo in direzione della terra e lo scambia per acqua. E' il fenomeno del miraggio, comune nei deserti, ma anche d'estate sulle autostrade.



Sempre in questo ambito, un esempio di interesse prettamente matematico è il *semipiano di Poincaré*. Supponiamo di muoverci su un terreno delimitato da una retta orizzontale (che chiameremo l'*orizzonte*), e sempre più accidentato via via che ci si avvicina a questa retta, in modo che la velocità con cui ci muoviamo sia proporzionale alla distanza dall'orizzonte. Si capisce che per muoversi su questo terreno non sarà conveniente andare in linea retta, ma converrà allontanarsi un po' dall'orizzonte in modo da guadagnare velocità.



In questo caso un calcolo esatto è possibile: le geodetiche sono le rette verticali e le circonferenze con centro sull'orizzonte. In altre parole, per andare da *A* a *B* conviene muoversi in linea retta solo se questa è verticale; altrimenti il cammino più breve (ovviamente in termini di tempo) è il cerchio che passa per i due punti ed ha centro sull'orizzonte.

In tutti questi casi le geodetiche godono di molte delle proprietà delle rette. Ad esempio, nel semipiano di Poincaré per due punti passa una ed una sola geodetica. Ma non tutte le proprietà delle rette sono soddisfatte. Infatti, se chiamiamo parallele due rette (cioè due geodetiche) che non si incontrano, si vede subito che data una retta (geodetica) *r* ed un punto *P* fuori di questa, per un punto *P* fuori di questa, per *P* passano infinite parallele a *r*. Nel semipiano di Poincaré non vale il postulato delle parallele; la geometria è *non euclidea*.

Geodetiche nel semipiano di Poincaré.
Le tre "rette" passanti per P
sono tutte parallele alla retta r.