Il metodo di eliminazione di Fermat.

Un passo essenziale del metodo delle tangenti di Descartes consiste nell'eliminazione della variabile y tra due equazioni: quella della curva di cui si vuole trovare la tangente

$P(x,y) = 0$

e quella della circonferenza tangente, di centro $(v,0)$ sull'asse delle escisse e raggio s:

$(x-v)^2 + y^2 = s^2$.

Il procedimento è il seguente: si portano a secondo membro dell'equazione della curva tutti i termini che contengono potenze dispari della y, lasciando al primo membro gli altri. Ad esempio, se l'equazione della curva è

$xy^4-x^2+x^3y-4x^2y^3+2 = 0$

si portano al secondo membro i termini x^3y e $4x^2y^3$, in modo che l'equazione diventa

$xy^4-x^2+2 = -x^3y+4x^2y^3$.

Ciò fatto, osserviamo che al secondo membro si può mettere in evidenza una y. Una volta fatto questo, tutte le altre potenze della y (sia al primo che al secondo membro) sono pari:

$xy^4-x^2+2 = y(-x^3+4x^2y^2)$.

Se ora si elevano al quadrato ambo i membri, restano solo potenze pari della y, cioè potenze di y^2 :

$(xy^4-x^2+2)^2 = y^2(-x^3+4x^2y^2)^2$.

A questo punto possiamo ricavare il termine y^2 dall'equazione della circonferenza:

$y^2 = s^2-(x-v)^2$;

e la y si elimina sostituendo questo valore nell'ultima equazione.

In generale, se $P(x,y)=0$ è l'equazione della curva, portando a secondo membro i termini che contengono potenze dispari di y si ottiene un'equazione della forma

$A(x,y^2) = yB(x,y^2)$

dalla quale si può eliminare la y elevando al quadrato e sostituendo il valore di y^2 ricavato dall'equazione della circonferenza. Si vede subito che a causa dell'elevazione al quadrato necessaria per poter eliminare la y, il grado dell'equazione risultante è doppio di quello dell'equazione di partenza.

Il metodo di Descartes funziona perché una delle equazioni (quella della circonferenza) consente di ricavare esplicitamente se non la y (questo avviene quando si considera la retta tangente, ed è per questo che nel metodo di De Beaune il grado resta lo stesso) almeno una sua potenza y^2. Ma in generale?

Supponiamo ad esempio di avere un sistema di due equazioni in un certo numero di incognite:

$P(x,y,z,...) = 0$
$Q(x,y,z,...)=0,$

in cui P e Q sono due polinomi nelle variabili x, y, z, ...

Sarà sempre possibile eliminare una delle incognite, ad esempio la x, e ridursi a un'equazione

$R(y,z,...)=0,$

con R polinomio nelle variabili y, z, ... ?

La risposta è positiva, e il metodo per condurre a termine l'operazione nel caso generale è dovuto a Pierre Fermat.

Per fissare le idee e per economia di scrittura, supponiamo che le incognite siano solo due: x e y; avremo allora il sistema

$P(x,y)=0$
$Q(x,y)=0$

in cui si vuole eliminare la x. Per far questo, scriviamo le due equazioni mettendo da una parte tutti i termini che contengono la x e dall'altra quelli che non la contengono. Al primo membro potremo raccogliere una x, e avremo allora

$x\, H(x,y) = K(y)$
$x\, M(x,y) = N(y).$

Sia ora p il massimo grado della x nel polinomio $P(x,y)$, q il massimo grado della x nel polinomio $Q(x,y)$, e supponiamo ad esempio che sia $p \geq q$; il massimo grado della x nei polinomi H e M sarà allora rispettivamente $p-1$ e $q-1$. Moltiplichiamo ora le due equazioni termine a termine in croce; otterremo

$x\, H(x,y)\, N(y) = x\, M(x,y)\, K(y)$

e dividendo per x :

$H(x,y)\, N(y) = M(x,y)\, K(y).$

In questa equazione la x compare alla potenza $p-1$ a sinistra e $q-1$ a destra; poiché si era supposto $p \geq q$, il massimo grado della x sarà dunque $p-1$.

Consideriamo ora il nuovo sistema

$H(x,y)\, N(y) = M(x,y)\, K(y)$
$x\, M(x,y) = N(y).$

Per quanto detto, il massimo grado della x nelle due equazioni sarà rispettivamente $p-1$ e q. Se p era maggiore di q, abbiamo diminuito di uno il grado complessivo della x nel sistema; se invece era $p=q$, possiamo ripetere quanto fatto sopra a ruoli scambiati (stavolta $p-1<q$), trovando al posto della

seconda una nuova equazione di grado q–1 nella x. In ogni caso, dopo uno o due passaggi, il grado complessivo della x nel sistema è calato di uno.

Ripetendo più volte il procedimento, arriveremo a un sistema nel quale una delle due equazioni sarà di primo grado nella x, cioè sarà del tipo

$x\,W(y) = V(y)$,

con V e W polinomi nella sola y. Possiamo allora ricavare la x:

$$x = \frac{V(y)}{W(y)}.$$

Inseriamo questo valore della x nell'altra equazione; se in questa la x compare al grado m, moltiplicando per $W(y)^m$ si ottiene infine un'equazione

$Z(y)=0$

dove Z è un polinomio nella sola y. Abbiamo così eliminato la x dal sistema di partenza.

Osserviamo che il fatto che le variabili fossero solo due non è mai entrato nel nostro ragionamento, che si basava sulla considerazione del grado della sola x. Se allora abbiamo un sistema di due equazioni in un numero qualsiasi di variabili, se ne può eliminare una, ad esempio la x, riducendosi a una sola equazione in una variabile in meno. Se poi le equazioni erano k e le variabili $m \geq k$, si possono considerare due sole equazioni e da queste ricavare la x in funzione delle altre variabili:

$$x = \frac{V(y,z,...)}{W(y,z,...)}$$

e introdurre il valore così trovato nelle altre equazioni. Moltiplicando ognuna di queste per un'opportuna potenza del denominatore, si trova un nuovo sistema con un'incognita e un'equazione di meno. Così proseguendo, si eliminano a ogni passo un'equazione e un'incognita, arrivando alla fine a una sola equazione in m–k+1 incognite.

Il metodo di Fermat consente dunque l'eliminazione in un sistema qualsiasi di equazioni algebriche. Esso può essere poi utilizzato –e qui sta il legame con il problema delle tangenti– per eliminare i radicali da un'equazione. Anche qui, in alcuni casi semplici l'eliminazione è immediata o quasi. Prendiamo ad esempio l'equazione

$$x + \sqrt{1+xy} = 2 - \sqrt{x-y}$$

che possiamo scrivere nella forma

$$\sqrt{x-y} + \sqrt{1+xy} = 2 - x.$$

Elevando ambo i membri al quadrato si ottiene

$$x - y + 1 + xy + 2\sqrt{(x-y)(1+xy)} = (2-x)^2$$

ossia

$$2\sqrt{(x-y)(1+xy)} = (2-x)^2 - x + y - 1 - xy.$$

Una seconda elevazione al quadrato conduce all'equazione

$$4(x-y)(1+xy) = [(2-x)^2 - x + y - 1 - xy]^2$$

dalla quale le radici sono completamente eliminate.

Questo metodo funziona solo quando sono presenti poche radici. Ad esempio con quattro radici quadrate, cioè con equazioni del tipo

$$A\sqrt{P} + B\sqrt{Q} = C\sqrt{R} + D\sqrt{S}$$

con *A, B, C, D, P, Q, R* ed *S* polinomi, si può elevare una prima volta al quadrato, ottenendo

$$A^2P + B^2Q + 2AB\sqrt{PQ} = C^2R + D^2S + 2CD\sqrt{RS}\ .$$

Se ora si isolano al primo membro le radici restanti

$$2AB\sqrt{PQ} - 2CD\sqrt{RS} = C^2R + D^2S - A^2P - B^2Q$$

e si eleva al quadrato, si trova

$$4A^2B^2PQ + 4C^2D^2RS - 8ABCD\sqrt{PQRS} = (C^2R + D^2S - A^2P - B^2Q)^2\ .$$

Isolando di nuovo al primo membro la radice restante ed elevando ancora al quadrato, si ottiene un'equazione in cui tutte le radici sono scomparse. Se però si ha a che fare con equazioni più complicate, come ad esempio quella proposta da Leibniz:

$$a + bx\sqrt{y^2 + b\sqrt[3]{1+y}} + hyx^2\sqrt{y^2 + y\sqrt{1-y}} = 0$$

o altre ancora peggiori, la sua applicabilità è molto dubbia.

Possiamo invece utilizzare con profitto il metodo di eliminazione di Fermat. Come? Lo vediamo nell'esempio dell'equazione di Leibniz.

Si dà un nome ad ognuna delle radici presenti nell'equazione, cominciando dall'interno quando le radici sono una dentro l'altra. Nel nostro caso, posto

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[3]{1+y} \\ w &= \sqrt{1-y} \\ u &= \sqrt{y^2 + bz} \\ v &= \sqrt{y^2 + yw} \end{aligned} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{aligned} z^3 &= 1 + y \\ w^2 &= 1 - y \\ u^2 &= y^2 + bz \\ v^2 &= y^2 + yw \end{aligned}$$

l’equazione si può riscrivere

$a+bxu+hyx^2v = 0.$

Si può ora usare il metodo di Fermat per eliminare le variabili ausiliarie z, w, u e v dal sistema costituito dall’ultima equazione e dalle quattro precedenti scritte a destra e arrivare a una sola equazione $P(x,y)=0$ nelle due variabili x e y che restano, in cui P è un polinomio. Le radici sono dunque completamente eliminate.

Non c’è bisogno di dire che il grado del polinomio P diventa enorme non appena nell’equazione di partenza ci siano cinque o sei radici. Provare per credere.