**Girolamo Cardano**

***Ars magna,* 1545**

Presentiamo qui alcuni passi in cui Cardano tratta delle equazioni di terzo e quarto grado e introduce le cosiddette “radici sofistiche”.

***Capitolo XI. Cubo e cose uguale a numero***

Il bolognese Scipione del Ferro ha risolto questo caso già da trent'anni e ha confidato la soluzione al veneto Antonio Maria Fior. Costui,sfidando pubblicamente il bresciano Niccolò Tartaglia, gli ha dato l'opportunità di scoprire a sua volta la formula risolutiva. Tartaglia l'ha poi rivelata a me dopo che l'avevo più volte pregato, ma non mi ha dato la dimostrazione. Con l'aiuto della formula sono riuscito a trovare questa difficile dimostrazione e a proporla qui di seguito. […][[1]](#footnote-2)

Regola

 Cuba la terza parte delle cose ed aggiungi il quadrato della metà del numero, considera la radice quadrata di questa somma e aggiungila alla metà del numero che prima avevi elevato al quadrato; sottrai invece la stessa metà del numero da un'uguale radice quadrata. Avrai così trovato un binomio con la sua apotome[[2]](#footnote-3) e dunque, sottratta la radice cubica dell'apotome dalla radice cubica del binomio, quello che rimane è l'incognita richiesta (``rei aestimatio'').

 Per esempio, consideriamo un cubo e sei posizioni uguali a 20. Eleva al cubo 2, la terza parte di 6, e ottieni 8; eleva al quadrato 10, che è la metà del numero, e ottieni 100; somma 8 a 100 e avrai 108; prendi la radice di 108 e considerala due volte: una volta la sommi alla metà del numero e una volta sottrai da essa la metà numero. Avrai dunque il binomio R. 108 p. 10, del quale prenderai la radice cubica, e sottrarrai la corrispondente apotome ottenendo così l'incognita R.V.cub. R. 108 $\tilde{p}$ 10 $\tilde{m}$ R.V.cub. R. 108 $\tilde{m}$ 10 […] ricordati di ciò che abbiamo detto nel capitolo del terzo libro[[3]](#footnote-4) relativo all’estrazione della radice cubica, che tratta del caso in cui queste radici possano essere ridotte a numeri interi o fratti. Così nel primo esempio R.V.cub. R. 108 $\tilde{p}$ 10 $\tilde{m}$ R.V.cub. R. 108 $\tilde{m}$ 10 è uguale a 2, come si vede dall’applicazione della regola.

***Capitolo XII. Cubo uguale a cose e numero***

Regola

La regola è: quando il cubo della terza parte del numero delle cose non è maggiore del quadrato della metà del numero dell’equazione, sottrai il primo dal secondo; somma la radice della differenza dalla metà del numero dell’equazione e ancora sottrai la radice dalla stessa metà. Otterrai, come si dice, un Binomio e un Apotome, e la somma delle rispettive radici cubichesarà la cosa.

Ad esempio, un cubo uguaglia 6 cose $\tilde{p}$ 40. Eleva 2, che è la terza parte del numero delle cose, al cubo e ottieni 8; sottrai 8 da 400, che è il quadrato di 20, cioè la metà del numero, e ottieni 392. Somma questa radice e ottieni 20 $\tilde{p}$ R 392; sottrai la stessa e ottieni 20 $\tilde{m}$ R 392; somma le radici cubiche di queste espressioni e otterrai la cosa, cioè RV cubica 20 $\tilde{p}$ R 392$ \tilde{p} RV cubica 20 \tilde{m} R 392.$

[…]

Ma quando il cubo della terza parte del numero delle cose eccede il quadrato della metà del numero dell’equazione, cosa che succede quando il numero dell’equazione è minore di $\frac{3}{4}$ di quel cubo o quando i $\frac{2}{3}$ del numero delle cose moltiplicati per la radice di $\frac{1}{3}$ dello stesso numero è maggiore del numero dell’equazione, allora la soluzione si trova “per quaestionem alizam” della quale si parla nel libro dei problemi geometrici[[4]](#footnote-5). Ma se vuoi evitare questa difficoltà, troverai quello che cerchi in gran parte del capitolo XXV di quest’opera.[[5]](#footnote-6)

***Capitolo XIII. Cubo e numero uguale a cose.***

Regola

La regola è: quando avrai cubo e numero uguale a cose, trova il valore dell’incognita del cubo uguale alle stesse cose e allo stesso numero; considera la metà del numero, elevala al quadrato e triplicala, poi sottraila dal numero delle cose: la radice della differenza sommata alla soluzione [dell’equazione] di cubo uguale a cose e numero, oppure sottratta da questa rappresenta la soluzione di cubo e numero uguale a cose.

Per esempio, un cubo $\tilde{p}$ 3 è uguale a 8 cose. Allora trovo la soluzione di cubo uguale a 8 cose $\tilde{p}$ 3 sfruttando la formula del capitolo precedente, ed è 3. Considero la metà di 3, la elevo al quadrato e ho $2\frac{1}{4}$ , triplico e ho $6\frac{3}{4} ,$ sottraggo dal numero delle cose che è 8 e ottengo $1\frac{1}{4}$ , la cui radice aggiunta o sottratta da $1\frac{1}{2}$ , che è la metà della soluzione di cubo uguale cose e numero, rappresenta entrambe le soluzioni richieste dell’altra [equazione], cioè $1\frac{1}{2}\tilde{ p} R 1\frac{1}{4}$ e l’altra $1\frac{1}{2}\tilde{ m} R 1\frac{1}{4}$.

***Capitolo XXXVII. Sulla regola di supporre il falso***

Regola II

Il secondo tipo di posizione falsa è quello della radice $\tilde{m}$. E darò un esempio: si voglia dividere 10 in due parti, che moltiplicare diano 30 oppure 40. E’ chiaro che questo caso, cioè questo problema, è impossibile, tuttavia agiremo in questo modo. Divideremo 10 in due parti uguali e la metà così ottenuta, cioè 5, si moltiplicherà in sé e si otterrà 25; sottrai dal così ottenuto 25, per esempio il numero 40, come ti ho insegnato nel capitolo delle operazioni del libro quarto. Otterrai dunque la differenza $\tilde{m}$ 15, la cui radice, sommata e sottratta da 5, rappresenta le parti che moltiplicate insieme fanno 40 e che saranno dunque queste: 5 $\tilde{p}$ R $\tilde{m}$ 15 e 5 $\tilde{m}$ R $\tilde{m}$.15.

 […]

questa quantità che in effetti è sofistica, perché non è lecito operare con le regole del “puro meno” né con altre e non si sa come sia possibile farlo.

Regola III (Coroll.)

Possiamo in effetti trovare un altro tipo di $\tilde{m}$, che non è un $\tilde{m}$ puro né R $\tilde{m}$, ma è una cosa certamente falsa. Questa regola si può, in un certo qual modo, ottenere dalle due precedenti e ne darò il seguente esempio.

Problema VI

Trova tre numeri in proporzione continua, tali che il secondo sia uguale al primo meno la sua radice e il terzo al secondo meno la sua radice. Supponiamo allora che il primo sia 1 quadrato: il secondo sarà 1 quad. $\tilde{m}$ 1 posizione e il terzo sarà 1 quad. $\tilde{m}$. 1 posizione $\tilde{m}$. R 1 quadrato $\tilde{m}$. 1 posizione. Moltiplica il primo per il terzo e il secondo per se stesso e avrai le quantità

$\frac{1}{4}$ ; *m.*$\frac{1}{4}; m. \frac{1}{4} m. R m.\frac{1}{4}$

Il prodotto della prima per la terza è $m \frac{1}{16} p R \frac{1}{64}$ cioè $\frac{1}{8}- \frac{1}{16}$ che è lo stesso del secondo termine moltiplicato per sé.

***Capitolo XXXIX. Sulla regola che permette di trovare l’incognita per mezzo di diverse posizioni***

Regola II

Esiste un'altra regola, più elegante della precedente, ed è di Ludovico Ferrari che l'ha concessa su mia richiesta. Questa regola consente di trovare le soluzioni di tutte le equazioni di quarto grado prive del termine cubico o del termine lineare […][[6]](#footnote-7)

Per risolvere l'equazione devi sempre trasformare il membro dell'equazione che contiene la quarta potenza in una radice quadrata[[7]](#footnote-8) -- cioè devi aggiungere ad entrambi i membri una quantità tale che i termini di quarto e di secondo grado e il termine noto ammettano una radice: questo è facile a farsi, non appena si prenda come termine noto il quadrato della metà del coefficiente del termine di secondo grado. Fai questo in modo tale che si ammettano solo radici positive, altrimenti perderai una radice del trinomio o del binomio trasformato in un trinomio.

Dopo aver fatto tutto questo, aggiungi ad entrambi i membri un termine quadratico e un coefficiente in modo da rendere un quadrato perfetto anche il trinomio che contiene il termine lineare. Dovrai dunque aggiungere dei quadrati e dei numeri in modo da poter estrarre la radice quadrata di entrambi i membri. In uno dei membri ti troverai il quadrato dell'incognita più o meno un numero, nell'altro membro ti troverai l'incognita (eventualmente con un coefficiente diverso da 1) più o meno un numero. Puoi ora trovare facilmente la soluzione.

1. La dimostrazione a cui allude Cardano è di tipo geometrico ed è basata sulla scomposizione di un cubo in parallelepipedi e altri cubi. [↑](#footnote-ref-2)
2. In questo caso per binomio e apotome – termini mutuati dal libro X degli *Elementi* di Euclide – si intendono le espressioni $a+\sqrt{b}$ e $a-\sqrt{b}$ dove $a^{2}$e *b* sono commensurabili. [↑](#footnote-ref-3)
3. Qui Cardano fa riferimento al terzo libro dell’*Opus arithmeticae perfectum*, un’enciclopedia aritmetica in 15 libri che non è mai stato pubblicata, ad eccezione del decimo volume, l’*Ars magna* e del quinto, *De proportionibus.* [↑](#footnote-ref-4)
4. Anche in questo caso, Cardano fa riferimento al libro XV dell’*Opus arithmeticae perfectum*. [↑](#footnote-ref-5)
5. Il passo “allora la soluzione si trova … in gran parte soddisfatto” si trova nell’edizione del 1545, quando ancora Cardano sperava di sciogliere il caso irriducibile e di darne soluzione nell’ultimo libro dell’*Opus perfectum*. Nella seconda edizione dell’*Ars Magna* del 1570, il passo viene mutato in “allora consulta il libro dell’*Aliza* qui allegato”. Il riferimento è al *De regula aliza libellus*, pubblicato nel volume del 1570 assieme all’*Opus novum de proportionibus* e all’*Ars magna*, in cui Cardano raccoglie i tentativi fatti per risolvere il problema posto dal caso irriducibile. [↑](#footnote-ref-6)
6. Segue elenco dei 20 casi possibili e la dimostrazione geometrica della regola. [↑](#footnote-ref-7)
7. Qui con “radice quadrata” si intende un’espressione del tipo $\left(x^{2}+a\right)^{2}$. [↑](#footnote-ref-8)