Osservazioni su un percorso di visita guidata alla mostra *Pitagora e il suo teorema.*

NOTA. Si tratta di osservazioni sul percorso e sugli accorgimenti da tenere nella gestione della visita alla mostra *Pitagora e il suo teorema* suggerite dalle esperienze di visite guidate con classi medie inferiori. Con i cambiamenti del caso, i suggerimenti possono essere utili anche per le scuole superiori.

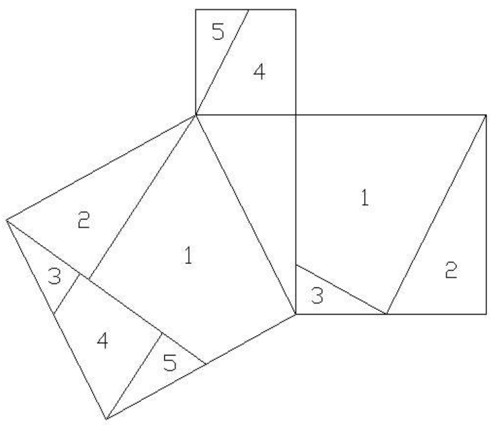
1. L'enunciato

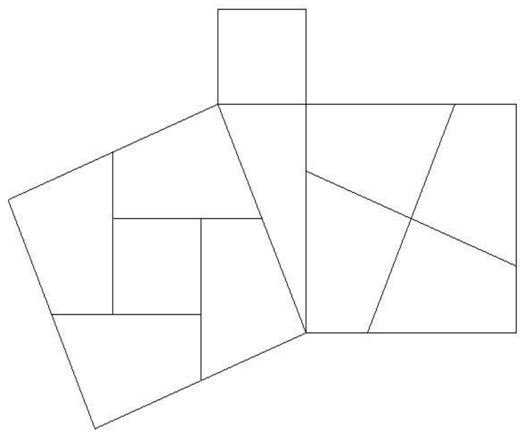
La visita parte chiedendo alla classe di enunciare il teorema di Pitagora.

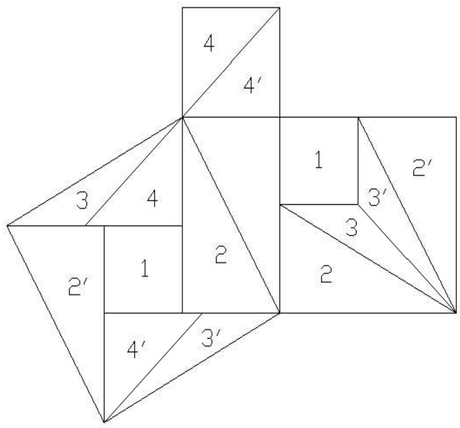
Si può accennare poi ai vari enunciati che compaiono sui pannelli: "Ma Pitagora che lingua parlava?" (mostrare l'enunciato greco e dire che potranno poi divertirsi a leggerlo in tutte le altre lingue, compreso - se ci riescono - il russo, il sanscrito, l'arabo ...)

Che significa in parole povere?
Ho tre quadrati in gioco, uno costruito sull'ipotenusa e due sui cateti; per verificare che il primo ha la stessa area degli altri due insieme posso tagliare il quadrato dell'ipotenusa in un certo numero di pezzi e con tutti questi stessi pezzi formare i quadrati dei cateti. Sto usando qui quella che si chiama equiscomponibilità dei poligoni equivalenti: due poligoni hanno la stessa area se e solo se sono scomponibili negli stessi pezzi. Da notare che questo risultato non vale per i poliedri; due poliedri equiscomponibili sono ovviamente equivalenti (cioè hanno lo stesso volume) ma non sempre due poliedri equivalenti sono equiscomponibili.

Si può proseguire proponendo la soluzione dei primi puzzles con un gioco: la classe viene divisa in tre squadre che si dispongono attorno ai 3 tavoli con il teorema di Pitagora (Pitagora 1, Pitagora 2 e Pitagora 3). Al via le tre squadre devono comporre i quadrati dei cateti (iniziare da questi perché più facili). Chi finisce prima alza le mani (o segnala in qualche modo possibilmente non troppo distruttivo...). Si aspetta un po' per vedere se anche gli altri ce la fanno (ma eventualmente si dà intanto il via alla prima squadra per l'ipotenusa, altrimenti si rischia di avere una decina di persone che saltano su tutti i tavoli a disposizione e anche più in là ... o comunque nella migliore delle ipotesi si lanciano a provare disordinatamente tutti gli altri puzzles). Da notare che il primo puzzle a 5 pezzi, dall'apparenza piuttosto innocua, risulta spesso uno dei più insidiosi. Ecco, eventualmente, le soluzioni:



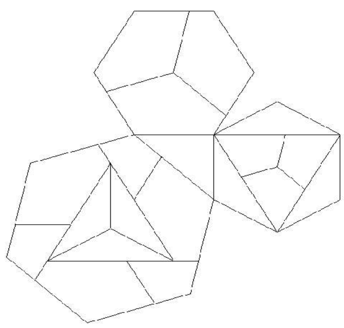


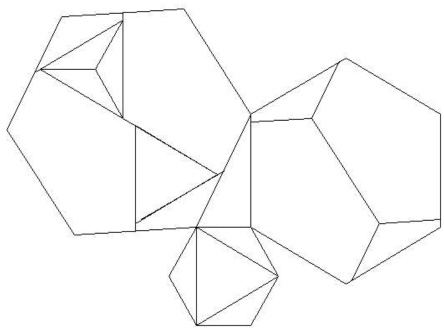


Volendo fare una vera gara potete prima designare 3 arbitri che cronometrano ciascuno una squadra. La fase più delicata è gestire lo scambio dei tavoli minimizzando i "tempi morti" per ogni squadra (prevedere la possibilità per una squadra che ha finito con largo anticipo di passare intanto alla sezione successiva: anche se dovrete ripetere più volte le spiegazioni ai piccoli gruppi ne guadagnerete in attenzione).

2. Estensione a esagoni o stelle.

Conclusi o sospesi (magari dicendo: "alla fine del giro potrete tornarci", per riuscire a distogliere coloro che continueranno imperterriti a sfidare l'incompenetrabilità dei corpi...) i giochi del Pitagora classico, si sollecita un nuovo coro sull'enunciato del teorema e si lancia la sfida: "E se invece io dicessi l'esagono dell'ipotenusa ... ?" Alcune classi hanno già visto l'estensione e i bravi diranno: "Vale per tutti i poligoni regolari". "E le stelle?" potrebbero non stupire, ma li spiazzerete dicendo "E se mettessi la figura di un leone?" (o un'altra cosa che vi venga in mente, la meno simmetrica possibile). "La risposta è sì, qualsiasi figura si scelga (questo in genere colpisce), **purché** su ogni lato ci si metta la **stessa figura** opportunamente **ingrandita o ridotta** in modo da farla adattare ai lati del triangolo. In altre parole ..." E qui potete arrischiarvi a ridire la stessa cosa in termini più geometrici, parlando di similitudine invece che ingrandimento (o magari sollecitando loro a tirare fuori la parola similitudine). Se vi hanno seguito fin qui si può passare al "Perché vale?" e allo spiegare che nelle figure simili le aree sono proporzionali ai quadrati di segmenti corrispondenti e dunque ... si ritorna a Pitagora classico.





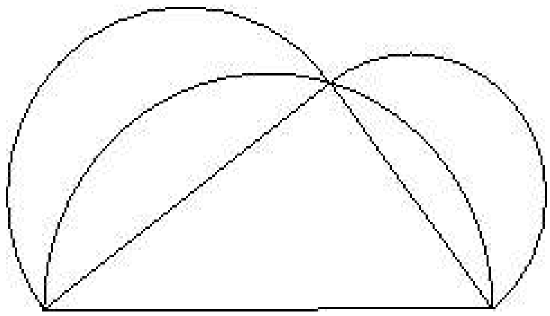
Riparte il gioco: le stesse tre squadre. I tavoli sono ora Esagoni 1 e 2 e Stelle 1 e 2. Sceglietene tre e lasciate il quarto per impegnare la squadra che finirà per prima e come tappa-buchi (è piuttosto difficile che una classe, soprattutto se numerosa, vi segua per intero).

3. Lunule

A questo punto si può di nuovo riunire tutta la classe e fare qualche digressione. Fra i punti che potete toccare:

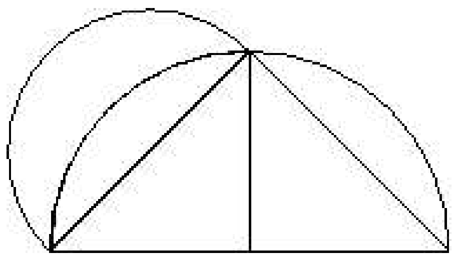
Ma chi era Pitagora?
quando vive, leggende intorno alla sua figura, cenni alla scuola Pitagorica, ... , senza esagerare (i pannelli riportano passi da antiche fonti, in rete trovate i testi).
Perché si chiama teorema di Pitagora?
far notare che generalmente i teoremi vengono attribuiti a chi dimostra quel risultato o quanto meno lo congettura (vedi teorema di Fermat); qui invece il risultato era conosciuto prima e la prima dimostrazione nota è quella di Euclide, di due secoli dopo.
I numeri per la scuola Pitagorica: numeri figurati, armonie, solidi platonici, irrazionali.
(potete trovare qualcosa sempre in rete, nelle schede di approfondimento)

Lunule 1. Nel frattempo i "furbi" si staranno dando da fare a mettere e togliere lunule e triangoli sotto i vostri occhi, magari chiedendosi se il gioco è tutto lì. Potrete allora fermarli dicendo che non si tratta di un gioco per bambini da 0 a 3 anni, ma di un mezzo per verificare un risultato di un altro matematico greco, di poco posteriore a Pitagora, Ippocrate di Chio, che utilizza la forma generalizzata del teorema di Pitagora, applicata ai semicerchi.



Se è il caso, potete accennare alla dimostrazione: l'area del semicerchio sull'ipotenusa è uguale alla somma di quelle dei semicerchi dei cateti. Se si ribalta il semicerchio sull'ipotenusa (che allora passerà per il vertice del triangolo perché è rettangolo) e si tolgono le parti comuni, l'area del triangolo risulta uguale a quella delle due figure a forma di luna: le lunule. La verifica si può fare con la bilancia, mettendo su un piatto il triangolo e sull'altro le lunule.

Lunule 2. Lunule 1 è solo un passo intermedio: in realtà Ippocrate cercava la quadratura del cerchio, che consiste nel trovare un quadrato (o una figura rettilinea) equivalente a un cerchio dato. Come si sa, questo problema non è risolubile usando solo la riga e il compasso; Ippocrate trovò però la "quadratura della lunula", che considerava un primo passo verso la soluzione dell'altro più importante problema. È questo il primo caso conosciuto di quadratura di una figura curvilinea. Il secondo puzzle illustra questo risultato: se infatti il triangolo rettangolo è anche isoscele, le due lunule sono uguali, e ognuno è equivalente a mezzo triengolo. Anche questo si può verificare con la bilancia.



4. Dimostrazione

Torniamo al teorema di Pitagora. Non si sa se (e eventualmente come) Pitagora avesse trovato una dimostrazione, ossia un ragionamento che ci convince della validità del risultato, ma dopo di lui fioccano le dimostrazioni. Vediamo una delle più semplici:
Dimostrazione 1 con i 4 triangoli; a volte i ragazzi l'hanno vista e potranno mostrarla. Molto più raramente sapranno spiegare perché dalle due configurazioni si conclude il teorema; provate a portarceli passo passo: riconoscere i due piccoli quadrati e il quadrato grande (e magari - giudicate voi se è il caso - anche insinuare il dubbio che sia proprio un quadrato) ottenuti nei due casi dallo stesso quadrato giallo togliendo i quattro triangoli.

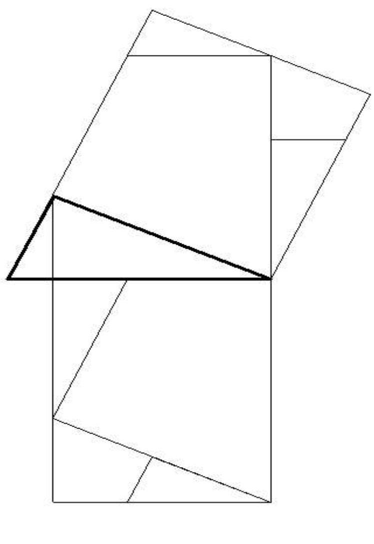
[Note sulla dimostrazione.
Per dimostrare che il quadrato grande è effettivamente un quadrato, si può osservare che è certamente un rombo, dato che ha i quattro alti uguali all'ipotenusa del triangolo rettangolo. Bisogna però provare che i suoi angoli sono retti, e questo si fa osservando che ognuno degli angoli gialli è uguale a un angolo piatto meno i due angoli rossi, e che questi, essendo i due angoli di un triangolo rettangolo, formano un angolo retto. Di conseguenza, ogni angolo giallo è retto, e abbiamo effettivamente un quadrato.

Si può anche notare che la figura a destra dimostra anche la formula algebrica

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Infatti se a e b sono i cateti del triangolo rettangolo, il quadrato grande ha lati $a+b$ e la sua area $(a+b)^2$ è la somma delle aree dei quadrati dei cateti ($a^2 + b^2$), più le aree dei due rettangoli con lati a e b.]

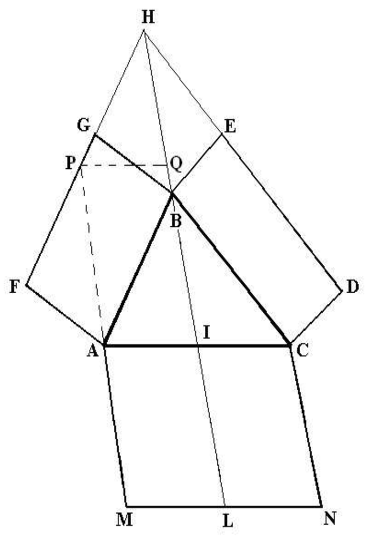
Come avevamo accennato, la prima dimostrazione nota è però quella di Euclide: spostatevi al puzzle relativo. Euclide affrontò un pezzo del problema alla volta e partendo da uno solo dei quadrati dei cateti vide che ... Provare per credere. Che succederà allora se considero anche il quadrato dell'altro cateto?



5. Pappo e finale

Che succede se il triangolo non è rettangolo?
Alcuni secoli dopo Euclide, Pappo di Alessandria (IV sec. d.C.), trova addirittura un teorema in cui non solo il triangolo ABC non è rettangolo, ma al posto dei quadrati ci sono due parallelogrammi qualsiasi come ABGF e CBED. Si prende il punto H in cui si incontrano i prolungamenti dei lati FG e DE, e si tira la retta HB. Allora l'area del parallelogrammo ACNM, costruito sulla base AC e con il lato AM uguale e parallelo

al segmento HB, è uguale alla somma delle aree dei parallelogrammi di partenza. Vale anche un analogo del teorema di Euclide; infatti il parallelogrammo AILM è equivalente ad ABGF e ICNL è equivalente a CBED.



[La dimostrazione del teorema di Pappo non è difficile, ricordando che due parallelogrammi che hanno la stessa base e stanno tra le stesse parallele (e dunque hanno la stessa altezza) sono equivalenti.
Il trucco consiste nell'aggiungere le linee tratteggiate AP e PQ, e nel considerare il parallelogrammo APQI. Dalla figura si vede subito che i parallelogrammi ABGF e ABHP sono equivalenti, perché hanno la stessa base AB e stanno tra le parallele AB e FH. Allo stesso modo, sono equivalenti i parallelogrammi ABHP e APQI, perché hanno la stessa base AP stanno tra le parallele AP e IH. Di conseguenza, i parallelogrammi ABGF e APQI sono equivalenti. Se ora si osserva che PA è uguale ad HB (sono lati opposti di un parallelogrammo) si conclude che i parallelogrammi APQI e AILM sono uguali, e dunque quest'ultimo è equivalente a ABGF.]

Dal teorema di Pappo si possono dedurre sia il teorema di Pitagora che quello di Euclide; infatti se il triangolo ABC è rettangolo (come avviene nei teoremi di Pitagora e di Euclide) e i due parallelogrammi ABGF e CBED sono dei quadrati, il segmento HB risulta uguale e perpendicolare all'ipotenusa AC, e quindi il parallelogrammo ACNM è proprio il quadrato dell'ipotenusa.

Come conclusione potete eventualmente aggiungere ancora due parole su altre scoperte dovute alla scuola Pitagorica che non avevate menzionato o lasciare che ognuno riprovi a sfidare quei puzzles con cui hanno un conto in sospeso, magari facendosi dire la soluzione da chi ci è arrivato.