Bienvenue à “Au delà du compas. La géométrie des courbes”, une exposition qui a tourné dans la plupart des grandes villes italiennes, et a attiré plus de 350.000 visiteurs. Pendant la visite, nous ferons la connaissance d’un certain nombre de courbes –des plus simples, la droite et le cercle, aux plus complexes et surprenantes- et en découvrirons les plus importantes propriétés mathématiques, en particulier celles qui règlent leur applications à la science, à la technique, et parfois à la pratique de la vie de tous les jours.

Avant de commencer, detendez-vous: on ne devra apprendre aucune formule, ni résoudre aucun exercice. Nous découvrirons ensemble qu’il est possible de s’approcher des idées et des méthodes des mathématiques d’une manière indolore et, nous l’espérons, amusante.

1. Droites et cercles.

Que peut-on faire avec une ficelle?

La visite commence avec un crayon et une simple ficelle, avec lesquels vous êtes invités à dessiner une droite et un cercle.

Marchant dans la rue, on voit de temps en temps des ouvriers qui, pour creuser un trou, en tracent d’abord les contours en tirant une ficelle entre deux piquets. Nous aussi pouvons tirer une droite (prenez note du verbe tirer) en tirant une ficelle avec deux doigts, et en cherchant à la suivre avec le crayon. Si au contraire nous voulons tracer un cercle, nous pourrons rouler la ficelle autour du crayon, et la faire tourner ayant fixé l’autre extrémité à la table avec un doigt.

Le résultat est très différent dans les deux cas: en général les arcs de cercle qu’on réussit à dessiner (des arcs de cercle, car pour tracer le cercle tout entier il est nécessaire un peu plus d’attention) sont assez précis, tandis que les droites sont normalement très décevantes.

La raison de ce comportement si différent réside dans la différente fonction de la ficelle: dans le cas du cercle elle est un instrument, dans celui de la droite un profil. Avec un profil on dessine ce qui est déjà présent : on peut dessiner une droite parce que la ficelle, tirée par les doigts, se dispose le long d’une droite. La justesse du résultat dépends alors de la précision du profil et de la possibilité de le suivre avec le crayon, et c’est exactement cette opération qui est difficile dans notre situation.

Dessiner une droite et un cercle avec une ficelle et un crayon

Au contraire, pour dessiner un cercle on ne dispose pas la ficelle sous une forme circulaire à suivre avec le crayon, mais nous nous servons d’une propriété mathématique de la circonférence, à savoir celle d’avoir tous ses points à la même distance du centre.

La ficelle tendue entre le crayon et l'extrémité fixée à la table est garante de cette équidistance.

La même chose arrive si au lieu d'une ficelle nous nous servons d'objets plus appropriés, comme la règle et le compas. Dans les deux cas la précision s'améliore sensiblement, mais la substance est toujours la même: la règle est un profil, le compas un instrument. Et même si les droites dessinées avec la règle sont bien meilleures que celles tracées avec une ficelle (mais aussi les cercles sont plus ronds), la précision d'un instrument sera toujours meilleure que celle d'un profil.

Comment dessiner une droite, et pourquoi.

Mais à quoi sert de dessiner des droites? N'est-il pas plus convenable de faire les desseins avec un ordinateur, sans se servir ni de règle ni de compas? La question est pertinente, et tracer des droites serait inutile, s'il ne s'agissait que de dessiner. Mais le problème n'est pas la.

Regardons n'importe quelle machine, par exemple une bicyclette, ou un mixer. On y trouvera des pièces mobiles, comme la pédale ou les routes du vélo, ou les ailettes du mixer, qui doivent parcourir des trajectoires préétablies, par exemple tourner autour d'un point. Dans ce cas, il n'y a pas de difficulté: il suffit d'axer la pièce sur le centre de la rotation, de façon qu'elle ne puisse que tourner autour de lui. Chaque point de la pièce décrit alors une circonférence autour de l'axe, qui a maintenant la même fonction qu'avait auparavant le doigt qui fixait la ficelle à la table.

Quand la trajectoire n'est pas circulaire, les choses deviennent plus difficiles. Que pouvons nous faire pour qu'une pièce se meuve en ligne droite, comme par exemple dans le cas de la tige que nous voyons sortir de la table, ou l'axe du piston dans la photo accrochée au mur? Certes, on pourrait fixer une règle, et obliger la tige à glisser sur lui, ou mieux encore à passer à travers deux anneaux fixés au mur (et dans ce cas la tige serait elle même le profil), mais le mouvement se ferait avec tellement de frottement que le fonctionnement de l'appareil serait impossible.

Dans ces situations, plus encore que dans le dessein, la différence entre un instrument et un profil est capitale. Si l'on veut que le mécanisme fonctionne, on ne peut pas recourir à des profils, mais l'on doit produire le mouvement rectiligne avec un instrument.

Le mécanisme de Watt

Une version de table montre que la droite tracée par le mécanisme de Watt est seulement une approximation

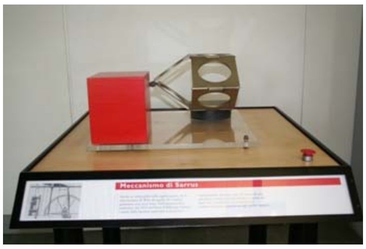
Celui qu'on voit a été proposé par James Watt. Il s'agit d'un très simple quadrilatère articulé, construit de façon que le point central du coté le plus petit, et donc aussi la tige qui lui est fixée, monte et descende le long d'une trajectoire rectiligne.

Mais s'agit-il réellement d'une droite? Une version de table du même mécanisme montre qu'il n'en est pas ainsi. Le point central décrit une courbe à forme de huit, avec deux parties presque rectilignes, ou du moins autant qu'il suffit pour les applications. Le mécanisme de Watt se sert de ces parties de la courbe pour maintenir la tige toujours en position verticale.

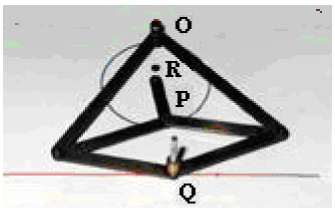
Autres instruments pour tracer des droites.

Le mécanisme de Watt, qui pour sa simplicité est en usage encore aujourd'hui, résout en pratique le problème de tracer une ligne droite, ou du moins une courbe tellement proche d'une droite qu'on ne peut pas les distinguer dans les applications. Après Watt, on a trouvé maints instruments, à la vérité plus compliqués que celui-ci, qui tracent des droites approximées. Vous pouvez en voir et en toucher quelques uns.

Le problème théorique reste cependant ouvert: est-il possible de construire un instrument pour dessiner une véritable ligne droite? Une première réponse positive est donnée par le mécanisme de Sarrus, dans lequel les points de la plaque supérieure se déplacent tous le long de droites verticales. Mais Il s'agit d'une machine qui n'est ni pratique (le mécanisme de Watt est beaucoup plus simple et fiable) ni satisfaisante du point de vue théorique, étant donné qu'elle opère dans l'espace à trois dimensions et non sur un plan. D'un point de vue technique, cela signifie qu'elle occupe beaucoup de place.



La solution exacte du problème est constituée par un mécanisme inventé en 1864 par A. Peaucellier, et fondé sur les propriétés d'une transformation mathématique particulière: l'inversion par rapport à une circonférence. Le mécanisme est composé par une série de tiges liées de telle façon que, de quelque manière qu'on les bouge, le produit des distances des points P et Q de O soit toujours le même. Dans un langage un peu plus technique, cela signifie que les points P et Q se correspondent dans l'inversion par rapport à une circonférence de centre O.



Le mécanisme de Čebičev

Deux mécanismes de Čebičev règlent la scie

Le mécanisme de Sarrus

Le mécanisme de Peaucellier

Une des propriétés de l'inversion est que quand le point P décrit une circonférence, son correspondent Q décrit lui-même une circonférence. La seule exception est représentée par le cas qui nous convient, à savoir quand la circonférence décrite par P passe par le centre O de l'inversion. Dans ce cas, le point correspondant Q ne décrit plus une circonférence, mais une droite. On comprend alors le rôle de la tige PR, dont l'extrémité R est fixée à la table. Elle n'a rien à voir avec l'inversion, mais garantie que le point P, qui maintenant ne peut que tourner autour de R, décrive une circonférence. Si maintenant l'on prend PR égal à RO, cette circonférence passera par le centre O, et pourtant le point Q qui correspond à P décrira une droite, ou plus précisément un segment.

Quadrilatères articulés.

Parmi les nombreux mécanismes de tiges articulées qui résolvent des problèmes d'intérêt pratique, le plus simple est sans doute le quadrilatère articulé. À cause de son extrême simplicité et de sa grande flexibilité, le quadrilatère articulé est à la base de maints instruments simples qui tombent constamment sous nos yeux, dont quelques uns sont illustrés sur le panneau; des balances aux jalousies, aux essuie-glaces, aux grues, mais aussi de quelques machines plus sophistiquées, comme les prothèses pour amputés.

Le quadrilatère articulé de la pédale d'une machine à coudre

Une application del quadrilatère articulé

Quatre cotés sont le minimum pour avoir un mécanisme mobile. En effet le triangle est une structure rigide et indéformable, qui justement pour sa fixité est utilisé pour la construction de structures stables: treillis, ponts, toits. Au contraire, un quadrilatère conserve une certaine liberté de mouvement même si on en fixe un coté; une liberté qui en fait un instrument très efficace pour dessiner des courbes, ou si l'on veut pour mouvoir une pièce le long d'une trajectoire préétablie.

Normalement l'un des cotés du quadrilatère est fixé, par exemple à la table, et reste immobile ; on peut donc ne pa la mettre; comme dans le cas du mécanisme de Watt, le quadrilatère se réduit ainsi à trois seules tiges enchaînées entre elles, dont la première et la dernière sont fixées à la table par une extrémité, autour de laquelle elle peuvent seulement tourner.

Nonobstant l'extrême simplicité du mécanisme, les quadrilatères articulés sont très flexibles, et ils ont nombreuses applications. En particulier, ils sont très utiles pour convertir un mouvement oscillatoire en un mouvement circulaire et vice-versa, comme il arrive par exemple dans la bicyclette, où le mouvement alterné des jambes du cycliste engendre le mouvement rotatoire des pédales, ou dans la machine à coudre, dans laquelle le mouvement oscillatoire de la pédale fait tourner la route de la machine.

Si l'on ajoute au quadrilatère deux nouvelles tiges, qui forment un triangle avec la centrale, il est possible, en réglant convenablement la longueur des tiges ajoutées, de tracer un grand nombre de courbes, même relativement irrégulières.

2. Les sections coniques.

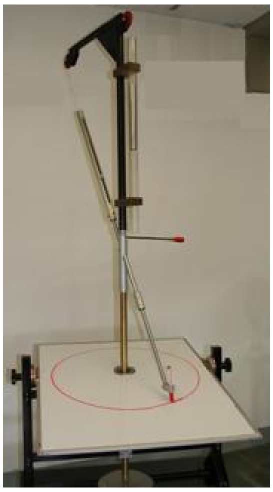
Une lumière dans l'ombre

Si l'on éclaire un mur avec une lampe de poche, perpendiculairement à la paroi, la partie éclairée est un cercle. Commençons maintenant à incliner la lampe vers le haut: le cercle se déforme et prend une forme allongée, comme un plateau ou un stade: c'est une ellipse.

Si l'on continue à incliner la lampe, l'ellipse s'allonge de plus en plus. Tandis qu'une de ses extrémités reste devant nous, l'autre continue à s'éloigner; si la parois était infinie, l'aire éclairée deviendrait de plus en plus grand, jusqu'au moment où, pour une inclination particulière de la lampe elle dévient infinie. La figure correspondante est une parabole.

En continuant à incliner la lampe, l'aire éclairée augmente encore, et prend la forme d'une hyperbole.

Les trois figures qu'on obtient successivement, ou mieux les courbes qui les délimitent, sont appelées sections coniques, étant donné qu'elles s'obtiennent en coupant un cône (dans notre cas le cône de la lumière projetée par la lampe) avec un plan (le mur).



Les sections coniques se trouvent souvent dans des situations les plus communes. Par exemple, un abat-jour dessine sur le mur deux hyperboles, l'ombre d'une balle est une ellipse, une pierre lancée avec une fronde décrit une parabole.

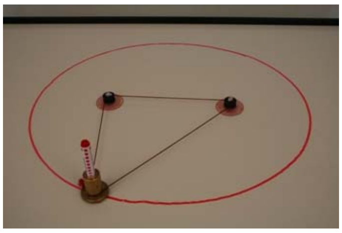
Dans le passé la théorie des sections coniques était essentielle pour la construction des cadrans solaires. Dans son mouvement apparent le soleil décrit une circonférence; les rayons qui passent par la pointe du style forment alors un cône, qui coupé par le mur produit une section conique (à nos latitudes une hyperbole) sur laquelle l'ombre du style signe les différentes heures.

On peut dessiner une ellipse en utilisant le grand compas tridimensionnel, qui les géomètres arabes avaient appelé "compas parfait". La tige inclinée qui tourne autour de l'axe vertical décrit un cône, qui est coupé par le plan du dessin. Selon l'inclinaison de ce dernier, on obtient une circonférence (quand le plan est horizontal) ou une ellipse, d'autant plus allongée que le plan est incliné. Si on pouvait augmenter indéfiniment l'inclinaison du plan, on pourrait obtenir d'abord une parabole, puis une hyperbole.

Les sections coniques : le cercle, l'ellipse, la parabole, l'hyperbole

Le compas parfait

En utilisant les différentes propriétés de l'ellipse, on peut construire différents compas elliptiques, dont quelques uns sont exposés; on en trouve aussi en vente. Une parabole ou une hyperbole sont plus difficiles à dessiner.



Échos et reflets.

Le moyen le plus simple pour dessiner une ellipse est avec une ficelle, un peu comme on a fait pour une circonférence au début de notre visite.

La circonférence a tous ses points à la même distance du centre, et donc elle peut être dessinée avec une ficelle, en tenant fixe l'une de ses extrémités et en faisant tourner l'autre avec le feutre. Quand la circonférence s'allonge et devient une ellipse, son centre pour ainsi dire se dédouble en deux points: les foyers. Ces derniers ont une propriété caractéristique: si l'on joins un point quelconque de l'ellipse avec les deux foyers, la somme des longueurs des deux segments est toujours la même.

Cette propriété peut être utilisée pour dessiner une ellipse sur le terrain: on fixe deux piquets aux deux foyers, et on y lie les deux extrémités d'une ficelle. Si on fait tourner un crayon tout en maintenant la ficelle tendue, la courbe ainsi dessinée est une ellipse. Elle prend le nom de "ellipse du jardinier" car cette méthode est utilisée pour dessiner des parterres elliptiques.

La même propriété permet de construire des engrainages elliptiques. Si l'on prend deux ellipses égales, disposées de façon que chacune d'elles puisse tourner autour d'un de ses foyers, et si la distance entre le deux pivots est égale à la longueur de la ficelle, les deux ellipses restent toujours tangentes, et la rotation d'une des deux traîne l'autre. De plus, si la première tourne uniformément, la deuxième aura une vitesse variable, d'autant plus grande que le point de tangence est plus proche du foyer fixe. Si les deux ellipses sont très allongées, tandis que la première tourne en 24 heures, la deuxième emploie presque tout son temps pour faire un demi tour, et parcourt l'autre moitié en quelques minutes. Sur ce phénomène se fondent les mécanismes pour le changement de date dans les montres.

Une deuxième propriété de l'ellipse a à voir avec la réflexion de la lumière et du son. Pour comprendre de quoi il s'agit, il faut savoir qu'un rayon de lumière ou une onde sonore qui vont d'un point P à un point Q après avoir été réfléchis par une surface, choisissent le chemin le plus court (principe de Fermat). En particulier, cela implique que les rayons se réfléchissent à angles égaux, c'est-à-dire que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.

Supposons maintenant qu'un rayon parte d'un foyer de l'ellipse et arrive sur l'autre foyer après s'être réfléchi sur la courbe. Pour que cela arrive, il devra toucher l'ellipse en un point qui rend minimal le chemin parcouru. Mais ce chemin est le même pour tous les points de l'ellipse, et donc chaque point est valable. En conclusion, tous les rayons (lumineux, sonores, calorifiques) qui partent d'un foyer et se réfléchissent sur l'ellipse, frapperont l'autre foyer. D'ici

L'ellipse du jardinier

Engrainages elliptiques

Un plat à rôti elliptique

l'origine du nom "foyers"; si l'on place une source de chaleur dans l'un des foyers, la chaleur ira se concentrer sur l'autre, où il pourra incendier un morceau de papier ou du matériel inflammable.

Un simple plat à rôti (de forme approximativement elliptique) avec de l'eau peut servir pour illustrer le phénomène. Si on touche l'eau en correspondance d'un des foyers, signés dans le plat, se forment des vagues concentriques qui après une réflexion sur la paroi du plat vont se concentrer sur l'autre foyer.

Miroirs ardents.

Au fur et mesure que le plan générateur s'incline, l'ellipse s'allonge de plus en plus, et son second foyer s'éloigne du premier. Quand elle se transforme en une parabole, le deuxième foyer disparaît (on dit parfois qu'il est allé à l'infini) et il n'en reste qu'un seul. Et tandis que dans un miroir elliptique les rayons provenant du deuxième foyer allaient se concentrer dans le premier, dans un miroir parabolique ce sont les rayons parallèles à l'axe qui se concentreront dans le seul foyer restant.

Cette propriété de la parabole peut être utilisée pour la construction d'un miroir ardent, c'est-à-dire un miroir qui concentre les rayons solaires (qu'on peut considérer comme parallèles à cause de la grande distance du Soleil) dans le foyer, pour y incendier du matériel inflammable.
Nous avons construit un miroir ardent d'intérieur, en remplaçant les rayons solaires par ceux d'une lampe halogène. Nous avons placé la lampe dans le foyer d'un deuxième miroir parabolique, d'où les rayons lumineux sortent parallèles après une réflexion; une deuxième réflexion sur le premier miroir les concentre dans le foyer de ce dernier, où ils allument en peu de temps une allumette.

Le même principe gouverne le microphone parabolique: les ondes sonores qui se réfléchissent sur la parabole vont se concentrer dans le foyer, où l'on a placé un microphone. L'amplification qui en résulte permet d'entendre des bruits, même très faibles. Toujours en utilisant les propriétés focales de la parabole on construit les grands radiotélescopes et les antennes paraboliques de la télévision satellitaire.

On trouve souvent des paraboles comme solutions de problèmes scientifiques et techniques. Une pierre lancée obliquement décrit une parabole, comme est aussi une parabole la forme que prend le câble de soutien d'un pont suspendu.

Un mirage.

Miroirs ardents

Un mirage

Avec deux paraboles égales on peut réaliser un phénomène surprenant. Ce que l'on voit est une sorte de boite noire en forme de disque, avec un trou plat sur lequel se trouve un dé que l'on peut illuminer avec une lampe et qui à première vue a toutes les propriétés d'un objet réel. Mais quand on cherche de le toucher, on s'aperçoit que le dé n'existe pas: il s'agit d'une illusion optique.

Le fonctionnement de ce mirage est vite expliqué. La boite est composée de deux miroirs paraboliques égaux et superposés, dont chacun a le foyer qui se trouve à peu près sur le sommet de l'autre. Au fond du miroir inférieur se trouve le dé, tandis que le miroir supérieur a un trou par lequel on peut regarder à l'intérieur. Quand on regarde à travers ce trou, ou quand l'on illumine avec une lampe, le rayon de lumière se reflète deux fois avant de frapper le dé, et par conséquent il en forme une image réelle tout à fait semblable à l'original.

Des révolutions.

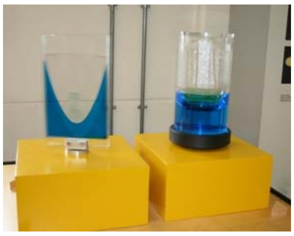
A vrai dire, les miroirs ardents et le mirage ne sont pas construits au moyen de paraboles, mais par des surfaces que l'on obtient en faisant tourner ces paraboles autour de son axe. Ces surfaces on les appelle des *paraboloïdes de révolution*. On peut obtenir une telle surface en faisant tourner assez vite un liquide contenu dans un récipient à forme de cylindre. Si au contraire on fait tourner le liquide entre deux plans parallèles, l'on obtient à nouveau une parabole.

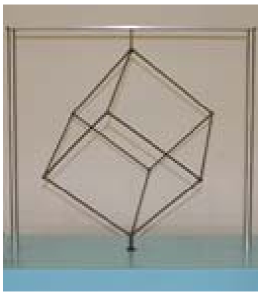
D'une manière semblable, si l'on fait tourner sur son axe une ellipse ou une hyperbole, on obtiendra un *ellipsoïde* ou un *hyperboloïde* de révolution.

Ces des surfaces ont des propriétés de réflexion semblables à celles du paraboloïde. Nous avons construit une chambre à voûte elliptique, qu'on a obtenue en faisant tourner une demi ellipse autour de l'axe. Cette voûte engendre un phénomène semblable au miroir ardent: si nous nous plaçons sur l'un des foyers et en nous tournant vers la paroi elliptique nous parlons même d'une voix très basse, notre ami qui est sur l'autre foyer nous entend distinctement, tandis que ceux qui se trouvent entre nous n'entendent presque rien.

L'hyperboloïde de révolution n'a pas propriétés focales si évidentes; il a pourtant la caractéristique remarquable d'être une surface réglée, c'est-à-dire formée de lignes droites. On peut utiliser cette propriété pour construire un hyperboloïde avec des fils: en tournant la poignée le cylindre se transforme en un hyperboloïde de plus en plus étroit, jusqu'à devenir un cône.

Le fait que l'hyperboloïde soit une surface réglée donne lieu à un phénomène inattendu: une tige opportunément inclinée peut tourner en passant par une fente à forme d'hyperbole. Cela est du au fait que la tige qui tourne décrit un hyperboloïde, qui est





Parabole e paraboloïde

Chambre ellipsoïdale

Deaux grands paraboloïdes qui concentrent la voix

Hyperboloïdes de rotation

Un cube qui tourne

coupé par un plan selon deux fentes hyperboliques, à travers desquelles la tige passe sans difficulté.

La même surface est obtenue en tournant un cube autour d'une diagonale. Tandis que les cotés supérieures et inférieures, qui rencontrent l'axe de rotation, donnent lieu à un cône, les autres, qui ne rencontrent pas l'axe, engendrent un hyperboloïde, que l'on peut voir à cause de la persistance des images sur la rétine.

Deux propriétés de l'ellipse et de la parabole.

Nous avons voulu réserver une table à deux intéressantes propriétés de l'ellipse et de la parabole.

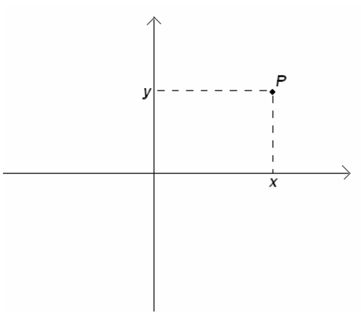
Supposons d'avoir dessiné une de ces courbes (par exemple l'ellipse) sur un plan et regardons-la d'un point du plan ; nous verrons l'ellipse sous un certain angle, qui dépends d'ou nous avons placé l'oeil. Demandons-nous maintenant : de quels points on voit l'ellipse sous un angle droit? L'objet sur la table montre que ce points forment une circonférence. Dans un langage un peu plus formel : le lieu des points d'ou on voit une ellipse sous un angle droit est une circonférence.

La même question posée pour la parabole a comme réponse: une droite.

3. Autres courbes.

La géométrie analytique.

Les sections coniques ne suffisent pas à satisfaire toutes les nécessites de la science et de la technique. Il devient alors nécessaire d'aller au delà des sections coniques, et de prendre en considération des courbes encore plus complexes.



Une façon très efficace pour représenter ces courbes sur le plan est de se servir de leur *équation.*

Si l'on trace sur le plan deux droites perpendiculaires, il est possible de déterminer chaque point par moyen de ses *coordonnées cartésiennes*, qui représentent *grosso modo* les distances du point en question des deux axes. Elles sont ainsi nommées à l'Honneur de René Descartes (Cartesius), qui le premier s'en est servi régulièrement pour décrire les courbes.

Una propriété de l'ellipse et de la parabolea

Les coordonnées cartesiennes

Normalement on note par x et y les deux coordonnées. À chaque valeur du couple (x,y) correspond un point du plan. Quand les valeurs de x et de y changent, le point correspondent décri tout le plan; si au contraire les coordonnées sont assujetties à une

équation, le point qu'elles représentent est forcé à parcourir une courbe, dont l'équation est la représentation analytique.

Par exemple, si l'on fixe l'abscisse x par le moyen de l'équation $x=1$, la courbe correspondante est une droite verticale; tandis que l'équation $y=3$ représente une droite horizontale. Plus généralement, une équation du premier degré (c'est-à-dire une équation où les variables x et y ne dépassent pas la puissance 1) représente une droite, tandis que une équation du deuxième degré donne lieu à une des sections coniques, y compris la circonférence).

Naturellement, on peut étudier des courbes dont l'équation arrive au troisième degré, au quatrième, et progressivement d'un degré de plus en plus élevé. Pour ces courbes, nous trouvons dans l'*Encyclopédie* de Diderot et D'Alembert une machine universelle qui permet, en ajoutant chaque fois un étage, de tracer des courbes d'un degré toujours plue élevé. Celle qui nous avons construite a quatre niveaux superposés, ce qui permet de tracer des courbes du quatrième degré. Il s'agit d'une machine plutôt "lourde", dont la complexité est due principalement à la nécessité de réduire autant qu'on peut la friction qui autrement risquerait d'en compromettre le fonctionnement.

La cycloïde.

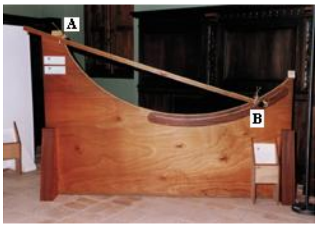
D'autres courbes ont une équation qui n'a pas de degré (ou pour mieux dire, qui ne sont pas exprimables par un polynôme); certaines entre elles se distinguent pour des propriétés spéciales, qui les rendent particulièrement utiles et intéressantes. Une de ces dernières est la *cycloïde*, c'est-à-dire la courbe décrite par un point sur une circonférence qui roule. La cycloïde peut se voir en fixant une ampoule à la roue d'une bicyclette, en particulier dans l'obscurité, ou même en faisant tourner un cercle sur lequel nous avons marqué un point, comme celui qui est devant vous sur le mur.

Malgré la simplicité de sa description, la cycloïde est une courbe relativement moderne. Galilée fut un des premiers scientifiques à l'étudier, et il observa comme avec elle on pouvait décrire d'une manière élégante l'arche d'un pont. Durant tout le dix-septième siècle, la cycloïde fut étudiée par les mathématiciens les plus importants, qui en déterminèrent la longueur, l'aire renfermée (que Galilée avait conjecturé être trois fois celle du cercle générateur, ce qui fut démontré plus tard indépendamment par plusieurs géomètres, parmi lesquels Pascal, Roberval et Torricelli), le barycentre et autre quantité connexes. Mais les surprises devaient attendre la fin du siècle, lorsque le cycloïde s'affirma comme la solution de deux importants problèmes mathématiques. Le premier était relatif à la chute des graves, et

Une machine pour dessiner des courbes

Génératione de la cycloïde

marqua la naissance d'une partie totalement nouvelle des mathématiques : le calcule des variations.



Supposons que nous laissions tomber une bille d'un point A à un point B situé plus en bas, mais pas sur la verticale. Nous pouvons imaginer de construire un profil qui joint les points A et B, et de faire glisser la bille le long de celui-ci. Naturellement les profils possibles sont en nombre infini ; nous nous demandons alors : y en aura-t-il un qui rend minimal le temps de chute ?

À première vue on pourrait penser que la solution soit la droite qui joint A à B. Si cependant nous réfléchissons mieux, nous verrons que la droite est bien la lignela plus courte entre les deux points, mais pas nécessairement celle de temps minimal ; il pourrait en effet être plus judicieux de faire partir la bille plus verticalement, de façon à lui faire acquérir tout de suite une vitesse assez élevée pour compenser la plus grande longueur du chemin à parcourir.

Le problème de la courbe *brachistochrone*, ou du temps minimum (du grec brachistos, minimum et chronos, temps) fut posé par Johann Bernoulli comme un défi aux mathématiciens du temps, et fut résolu entre autres par Newton et par Leibniz : la courbe qui donne le temps minimum est une cycloïde. Bernoulli était si orgueilleux de sa découverte, qu'il fit mettre dans la page de titre de ses *Oeuvres* la figure d'un chien qui cherche en vain à toucher une cycloïde, avec la devise : "Supra invidiam", au dessus de l'envie. Nous avons comparé la cycloïde avec la droite : en laissant tomber en même temps deux billes le long de ces deux courbes, on voit comme le temps passé sur la cycloïde soit considérablement moindre que celui sur la droite.

Le pendule cycloïdale.

La cycloïde entre même dans un second problème, cette fois de nature technique. Au début du dix-septième siècle, Galilée avait remarqué comme les oscillations d'un pendule se produisent approximativement dans le même temps, et cela indépendamment de l'ampleur des oscillations. À partir de cette remarque de Galilée on commença à construire les premières pendules. En réalité les oscillations du pendule ne sont pas exactement isochrones : le temps nécessaire pour faire une oscillation complète dépend de l'ampleur de l'oscillation, et est autant plus grand que l'oscillation est plus ample. Seulement pour des oscillations très petites le temps peut être considéré comme constant, et ce sont ces petites oscillations qui sont utilisées dans les pendules. On peut alors se demander : comment doit-on construire un pendule pour que ses oscillations se fassent toutes exactement dans le même temps, en un mot (celui aussi dérivé du grec : isos le même, et chronos, temps) pour qu'elles soient rigoureusement isochrones ?

La brachistochrone

Considérons les mêmes choses d'un point de vue légèrement différent. Dans le pendule usuel le poids oscille librement autour d'un point, et donc le long d'une circonférence. Ses oscillations sont isochrones seulement de façon approchée, et demandent autant plus de temps que l'arc de circonférence décrit est plus grand. Dans ce contexte la question devient : le long de quel type de courbe faut-il faire osciller un corps de sorte que ses oscillations soient parfaitement isochrones ? La réponse est encore une fois : la cycloïde. Si nous mettons deux billes en deux points sur la cycloïde, et les lachons au même instant, elles se heurteront exactement dans le point plus bas, même si elles sont parties à des distances très différentes de ce point. En autres mots, la bille emploie le même temps à parcourir l'arc grand et le petit, signe que les oscillations sont isochrones. Dans la circonférence cela ne se produit pas : la bille qui part de plus près arrive la première.

Si nous voulons alors construire une pendule qui soit exactement isochrone, il faut que le poids oscille le long d'une cycloïde. Mais comme est-il possible d'obliger le poids à se mouvoir le long de cette courbe sans qu'il glisse, c'est-à-dire sans employer un profil cycloïdal ? La situation est analogue à celle que nous avons vue auparavant, lorsque nous voulions dessiner une droite sans employer un profil. Dans ce cas là, nous avions utilisé un mécanisme assez complexe, le mécanisme de Peaucellier. Ici nous nous servirons d'une autre astuce : au lieu de laisser le poids libre d'osciller (dans ce cas il décrirait une circonférence), nous en conditionnerons la trajectoire en faisant appuyer le fil sur deux profils. Le problème devient alors : comment doivent être des façonnés ces profils si nous voulons que le poids parcoure une cycloïde ? La réponse est : ils doivent être des arcs de cycloïde. Dans ce cas (et seulement dans ce cas) le pendule oscillera sur une cycloïde, et donc sera isochrone.

Nous avons comparé deux pendules : l'un libre, qui décrit une circonférence, et l'autre cycloïdal, obtenu avec les profils placés en haut. Deux cellules photoélectriques mesurent leurs périodes, qui sont visualisées sur l'écran des ordinateurs. Comme on le voit, pendant que la période du pendule ordinaire diminue avec l'ampleur des oscillations, celui du pendule cycloïdal est rigoureusement constante.

Les spirales.

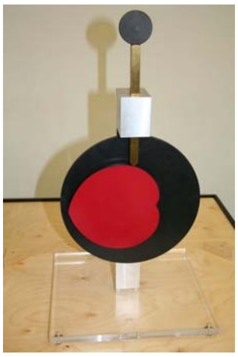
Une fourmi qui part du centre du plat d'un tourne-disque et qui se dirige vers l'extérieur, parcourt une ligne droite. Mais si au moment du départ le plat commence à tourner, et tous les deux, le tourne-disque et la fourmi, vont toujours à la même vitesse, la fourmi parcourra une courbe à forme de spirale, qui s'appelle d'Archimède parce qu'elle a été étudiée pour la première fois par le mathématicien de Syracuse.

Le profil cycloïdal

Les pendules comparés

La spirale d'Archimède

Nous pouvons substituer un feutre à la place de la fourmi, en le déplaçant du centre vers l'extérieur avec une vitesse aussi constante que possible; nous verrons alors se former une spirale d'Archimède, qui tournera d'autant plus de fois que la vitesse du feutre sera moindre.



Une application intéressante de la spirale se trouve dans les machines à coudre, dans la partie qui sert à enrouler le fil sur la bobine. Le fil qui arrive de l'écheveau est maintenu tendu, et il s'enroule sur la bobine qui tourne et oscille en avant et en arrière, de façon à permettre une distribution uniforme du fil. C'est à ce point qui la spirale joue son rôle. En effet, si on veut que le fil s'enroule uniformément sur toute la longueur de la bobine, il faut que le mouvement d'oscillation ait lieu toujours avec la même vitesse. Si au contraire, comme il arriverait si on ne prenait pas de précautions, le mouvement oscillatoire était plus rapide vers le centre qu'aux extrémités, quand la bobine change de direction, le fil ne s'enroulerait pas de façon uniforme, mais il s'épaissirait aux extrémités de la bobine.

En conclusion, il est nécessaire qu'un mécanisme fasse osciller la bobine toujours à la même vitesse. Cela est obtenu en réglant l'oscillation de la bobine avec un profil constitué par des arcs de spirale couplés. Nous voyons ici le mécanisme particulier de la machine à coudre, et en même temps une reproduction agrandie et en fonctionnement. La tige verticale se déplace alternativement vers le haut et vers le bas, toujours avec la même vitesse.

Une machine à coudre

Le mécanisme d'enroulement à double spirale et son modèle agrandi

Une caustique de reflexion

Les caustiques.

On pourrait continuer longtemps à décrire des courbes particulières. Ceux qui sont intéressés par ce sujet, pourront voir sur l'ordinateur la simulation de plusieurs mécanismes pour tracer des courbes. Nous poursuivrons notre visite en examinant d'un coté la structure générale des courbes, et de l'autre les propriétés spécifiques de quelques unes des plus importantes.

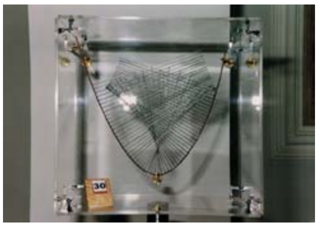
Nous avons vu comment les sections coniques, et particulièrement la parabole, avaient la capacité de concentrer les rayons lumineux en un point. Les autres courbes n'ont pas en général cette propriété. Naturellement, cela ne signifie pas que les rayons réflechis s'éparpillent complètement dans l'espace et qu'ils illuminent plus ou moins uniformément; très souvent ils se concentrent aussi, non en un point mais sur une ligne courbe: la *caustique*. Comme pour le foyer des sections coniques, le nom de cette courbe dérive du verbe brûler; en effet le terme "caustique" signifie « qui brûle ». En réalité à ce nom ne correspond pas une effective capacité d'allumer un feu, du moins si la source lumineuse a une puissance modérée, comme une ampoule.

On peut observer les caustiques dans la vie quotidienne ; par exemple quand une soupière est illuminée obliquement, les rayons qui se reflètent sur la paroi verticale dessinent sur le fond un courbe, qui prend le nom de caustique de réflexion, parce qu'elle est obtenue en faisant réfléchir des rayons lumineux.

On peut aussi obtenir les caustiques par réfraction, quand les rayons qui proviennent d'une source pénètrent en un milieu de densité différente.

Enveloppes.

Les rayons réflechis ou réfractes sont tous tangents à la courbe qu'ils forment. Plus généralement, les ligne droites d'une famille arbitraire (comme par exemple les rayons réflechis ou réfractes dans les cas des caustiques), peuvent se distribuer uniformément dans le plan, comme il arrive si elle sont toutes parallèles, mais elles peuvent aussi s'épaissir sur une courbe, à laquelle elles seront toutes tangentes. On appelle cette courbe l'*enveloppe* des lignes droites. Par exemple une caustique de réflexion est l'enveloppe des rayons réflechis par un miroir. On peut obtenir des enveloppes de lignes droites en tendant des ficelles entre différents points du plan ou de l'espace. La roue de bicyclette que vous voyez sur votre tête et les droites perpendiculaires à la parabole montrent des courbes obtenues comme enveloppe de droites.



D'ailleurs pour construire des enveloppes il n'est pas nécessaire de partir des lignes droites : on peut faire la même chose avec des courbes. Chaque courbe de la famille sera alors tangente à l'enveloppe, c'est-à-dire la courbe et l'enveloppe auront la même tangente au point de contact.

Un exemple intéressant vient de la balistique. Si on néglige la résistance de l'air, le projectile tiré d'une pièce d'artillerie parcourt une parabole, dont la forme dépend de la puissance du canon et de l'angle de tir. Supposons maintenant que nous disposions d'un canon qui tire toujours avec la même force, mais dont on peut varier l'angle de tir. Où devrons-nous nous placer pour être surs de rester au dehors de la portée du canon ?

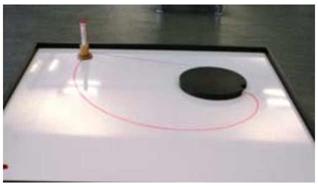
La réponse est simple: on trace toutes les paraboles qui représentent les trajectoires des projectiles quand on change l'angle de tir, et on se place au dehors de la région qu'elles couvrent. Cette région est délimitée par la courbe enveloppe de toutes les paraboles, elle est une parabole elle même, qui s'appelle la parabole de sécurité.

Les fils tendus enveloppent une courbe qui ressamble à une caustique

L'enveloppe des normales à une parabole

La lampe Fortuny

Il faut remarquer que les caustiques, et en général les enveloppes, ne sont pas présentes physiquement. Ce qui existe ce sont les rayons de lumière ou les courbes de la famille enveloppante ; la courbe qu'ils enveloppent se manifeste seulement parce qu'ils s'épaissent sur elle. Ainsi les rayons qui donnent lieu à une caustique illuminent avec plus de force la partie du plan qui correspond à la courbe, qui devient donc visible. La même chose se produit avec les droites normales à la parabole: elles tracent une courbe qui se voit, même si elle n'existe pas: en effet seuls les droites enveloppantes existent réellement.



Dans certain cas, il est important d'éviter la formation de caustiques, pour avoir une lumière la plus uniforme possible. Par exemple en photographie l'uniformité de l'illumination est essentielle. La lampe Fortuny, aujourd'hui encore utilisée, donne une densité de lumière constante en chaque point grâce à la forme de sa surface réfléchissante.

Nouvelles tendances.

Un des caractères du chemin que nous avons parcouru jusqu'ici est le passage du simple au complexe. À mesure que les techniques s'affinaient et les connaissances augmentaient, il devenait possible d'étudier des courbes plus complexes, dont on se servait pour affronter des problèmes autrement insolubles. En même temps, on assistait à un passage semblable du particulier au général : au lieu d'étudier la genèse et des propriétés de l'une ou l'autre courbe, on s'intéressait à des classes entières de courbes, et on élaborait des concepts qui pouvaient servir indifférentement pour toutes. La géométrie moderne a poursuivi et a rendu encore plus évident cette méthode, dans l'une et l'autre de ces deux directions : plus grande généralité, plus grande complexité. En conséquence, les techniques mathématiques sont devenues de plus en plus abstraites, au point d'en rendre difficile, voire impossible, une description même approximative.

Ne voulant pas renoncer entièrement à donner une idée des développements modernes de la géométrie des courbes, nous avons choisi deux exemples représentatifs des deux tendances : les géodésiques et les fractals.

Sur une surface plane, par exemple dans une place, le chemin plus bref entre deux points est la ligne droite. Si cependant nous nous mouvons sur une surface courbe, comme peut être la surface de la Terre, il n'est plus possible d'aller en ligne droite, et à sa place nous avons une courbe, dite *géodésique*, dont la longueur est la plus petite entre toutes les courbes qui unissent ses extrêmités.

Comme au debout de notre visite nous tirions une corde pour avoir une droite, nous pourrons trouver les géodésiques d'une surface convexe en tirant une ficelle entre deux points. Dans le cas de la Terre, qui est à peu près une sphère, les géodésiques sont les cercles maximaux, c'est-à-dire ceux qui divisent la sphère en deux parties égales. Pour aller d'un point à un autre il convient alors de suivre le cercle le plus grand qui passe par les deux points.

Ceci explique les routes polaires dans les voyages aériens intercontinentaux : sur le papiers elles semblent très longues, parce qu'elles sont tracèes sur en plan, mais il suffit de tendre un élastique sur une mappemonde pour constater qu'en réalité la route plus courte entre Florence et Los Angeles passe près du pole nord.

Le second exemple concerne le concept même de courbe. Celles que nous avons vues jusqu'à présent correspondent à l'idée intuitive de courbe que nous avons tous ; des objets à une dimension, qu'on peut penser obtenus en pliant un fil. S'ils ont des points singuliers, comme dans le cas du bord d'un polygone, ceux-ci sont en nombre fini et isolés. Vers la fin du dix-neuvième siècle, commencent à paraître des courbes "pathologiques" aux propriétés surprenantes. Une de celles-ci est la courbe de Peano, qui remplit tout un carré et qui pose le problème de la signification de la dimension ; une deuxième est la courbe de Koch, qui n'a de tangente en aucun point. Finalement, dans les années plus récentes, on a découvert des nouveaux objets, les fractales, qui ont une dimension fractionnaire et la propriété surprenante que chacune de leur parties, aussi petite qu'elle soit, est semblable à l'ensemble. Ces formes, dont la génération est relativement simple, donnent des images de considérable beauté ; images avec lesquelles nous concluons notre visite dans le monde des courbes.

L'evolvente del cerchio

Une route polaire