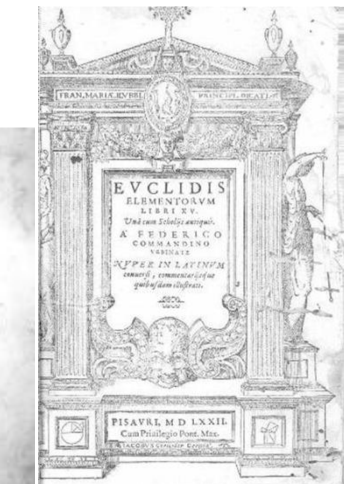
Il piacere di insegnare - Il piacere di imparare la matematica

La storia della matematica in classe: dalle materne alle superiori

SECONDO CONVEGNO NAZIONALE
IVREA 14 - 16 Marzo 2013
Liceo scientifico A. Gramsci - Polo Formativo e di Ricerca Officina H

Testi classici: Euclide, gli *Elementi*

Veronica Gavagna
Università di Salerno



Euclide: una biografia (?)

Non ci sono notizie biografiche affidabili e anche la sua collocazione cronologica è piuttosto incerta: si situa approssimativamente nel III sec. a.C.

Una delle testimonianze più nota è tratta dal ***Commento al primo libro degli*** **Elementi** di Proclo (412-485)

Non molto più giovane di questi [i matematici dell'Accademia platonica] è Euclide, che raccolse gli Elementi, ordinò molti risultati di Eudosso, ne perfezionò molti di Teeteto ed ancora condusse a dimostrazioni inconfutabili ciò che i suoi predecessori avevano dimostrato più debolmente.

*Costui **visse al tempo del primo Tolomeo** e infatti Archimede, che venne anch'esso dopo il primo <Tolomeo> cita Euclide; e a dire il vero si racconta anche che Tolomeo chiese una volta a quest'ultimo se non ci fosse una strada per apprendere la geometria più breve degli Elementi; **ed egli rispose che non ci sono vie regie alla geometria**. Euclide è dunque più giovane dei discepoli di Platone, ma più anziano di Eratostene e di Archimede. Costoro infatti sono contemporanei come dice da qualche parte Eratostene.* (Proclo, *Commento*)

Esiste un aneddoto analogo -- raccontato da Stobeo e Giovanni Damasceno -- che vede come personaggi Menecmo e Alessandro il Grande.

Anche notizie relative all’affiliazione di Euclide al Museo o alla Biblioteca di Alessandria vanno considerate con molta cautela.

Le fonti disponibili relative a queste istituzioni sono più tarde del periodo ellenistico e documentano una realtà ormai ben definita che la storiografia ha indebitamente proiettato all’indietro.

Il *corpus* euclideo greco (trasmesso)

Elementi l'opera più ponderosa del *corpus* matematico greco – geometria e aritmetica

Dati: raccolta di proposizioni del tipo «se in una figura alcuni elementi sono dati, altri elementi o relazioni sono dati»

Ottica: teoria della visione diretta

Catottrica (autenticità è in discussione) teoria della riflessione

Fenomeni: appartiene al *corpus* della piccola astronomia

Sectio canonis: teoria armonica

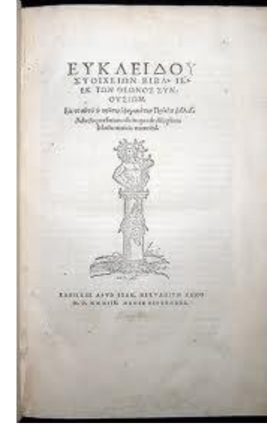
Gli *Elementi*

Quello degli «elementi» era un genere letterario antecedente ad Euclide (forse anche Ippocrate di Chio, V sec. a.C. scrisse un'opera di questo genere).

L'opera di Euclide diventò tanto famosa da assumere un ruolo paradigmatico e da oscurare quanto era stato scritto in precedenza in materia.

Gli *Elementi* non vennero concepiti come manuale d'insegnamento, ma con ogni probabilità lo diventarono molto presto.

Gli *Elementi*



L’opera non comprende tutta la geometria, ma solo quella **«della riga e del compasso»:** sono esclusi oggetti matematici come le sezioni coniche (forse trattate da Euclide in un’altra opera perduta), ma anche la «geometria della sfera» (che appartiene al *corpus* della piccola astronomia)

Negli *Elementi* non compare il lavoro di ricerca e di investigazione matematica che ha portato ai risultati. L’esposizione è **sintetica**, **cioè procede deduttivamente dalle ipotesi alla tesi** e presuppone dei punti di partenza indimostrati (postulati e assiomi)

Gli *Elementi*

Architettura generale

Libri piani

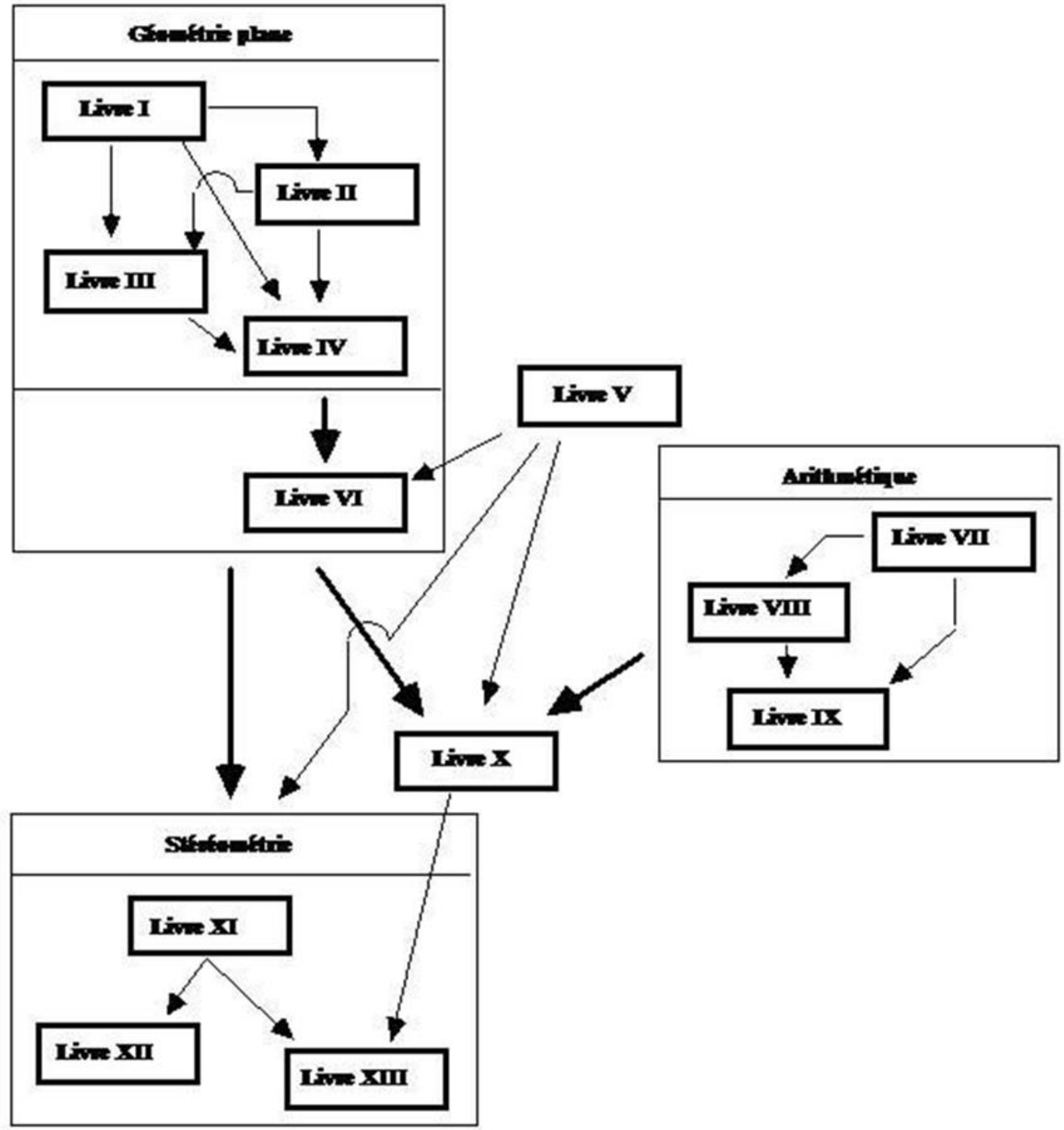
I-VI

Libri aritmetici

VII-X

Libri stereometrici

XI-XIII



Gli *Elementi*

I contenuti

Definizioni, Postulati

Nozioni comuni

Libro I: geometria del triangolo e del parallelogrammo (criteri di congruenza, propp. 4, 8, 26; th. Pitagora prop.47)

Libro II: sezioni di segmenti e uguaglianza di aree associate, quadratura di un poligono

Gli *Elementi*
I contenuti

Libro III: il cerchio e le sue parti. Tangente al cerchio.

Libro IV: costruzione di poligoni regolari (4, 5, 6, 10, 15 lati)

Libro V: teoria generale delle proporzioni tra grandezze

Libro VI: teoria della similitudine tra figure piane

Gli *Elementi*
I contenuti dei libri aritmetici

Libro VII: teoria dei rapporti tra numeri, Massimo comun divisore e minimo comune multiplo

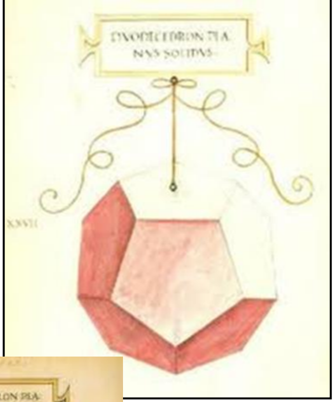
Libro VIII-IX: progressioni geometriche (proporzioni continue), numeri primi e numeri perfetti

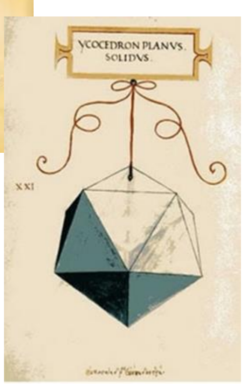
Libro X: classificazione delle linee irrazionali

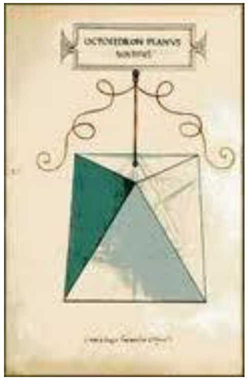
Gli *Elementi*

I contenuti dei libri stereometrici

Solidi platonici disegnati da Leonardo da Vinci per la *Divina Proportione* di Luca Pacioli (1509)







Libro XI: costruzioni stereometriche fondamentali; parallelepipedi

Libro XII: piramidi e prismi, coni, cilindri

Libro XIII: sezione aurea, costruzione dei cinque poliedri regolari (o solidi platonici)

Naturalmente fino ad ora abbiamo parlato dell'*Euclide* che abbiamo oggi, senza porci il problema dell'originalità del testo….

ma è importante avere e trasmettere la consapevolezza che quest'opera ha attraversato molteplici culture nei secoli e la sua trasmissione ha inevitabilmente portato a un'alterazione del testo originale.

Quanto sono diversi gli *Elementi* che abbiamo oggi da quelli che ha scritto Euclide?

E' possibile ricostruire la storia della trasmissione di questo testo?

Gli *Elementi* che abbiamo oggi

La tradizione testuale degli *Elementi* è molto complessa e non comprende solo edizioni, ma anche **compendi, edizioni commentate, citazioni, traduzioni** (persiano, ebraico, arabo, armeno…): tutti questi documenti dovrebbero essere valutati per la ricostruzione del testo, anche se appartengono a una tradizione minore. E comunque la possibilità di ricostruire il testo originale di Euclide è estremamente remota (per usare un eufemismo)

La tradizione euclidea

La trasmissione di un testo matematico (greco) è anche complicata da un altro aspetto: il testo è facilmente alterabile.

I testi matematici greci e geometrici in particolare sono caratterizzati da un **carattere formulare** ben codificato della lingua geometrica.

Il linguaggio formulare, assieme al **vocabolario limitato e alle formule fisse e ripetitive** crea molteplici rischi di errore di copiatura per distrazione, ma induce anche facilmente alla tentazione di correggere.

La tradizione euclidea

Anche il fatto che gli *Elementi* siano plasmati secondo una **architettura di tipo logico-deduttivo** ha spesso offerto la possibilità di compiere alterazioni del testo che hanno lasciato poche tracce.

Vediamo in cosa possono consistere le alterazioni volontarie del testo.

Le alterazioni *volontarie* del testo

Le alterazioni volontarie hanno talvolta avuto lo scopo di rendere **più «euclideo»** il testo.

- **Aggiunte/espunzioni**: in genere si tratta di aggiunte (più che di espunzioni) di lemmi, corollari, definizioni. Sono sospettate di rientrare in questo contesto: 35 definizioni, 2 nozioni comuni, 28 proposizioni (su un totale di 485), tutti i 29 lemmi, 25 dei 30 porismi.
- **Alterazione dell'ordine** delle proposizioni finalizzato ad accentuare la struttura deduttiva

Le alterazioni *volontarie* del testo

- **Sostituzioni di dimostrazioni** dovute al rifiuto di alcuni strumenti (es. dimostrazione per assurdo, distinzione in vari casi), oppure alla volontà di miglioramento o al desiderio di potenziare la generalizzazione. Ci sono redazioni che presentano dimostrazioni del tutto diverse della stessa proposizione, oppure numerosi *aliter*.

Le alterazioni del testo

Un esempio: II.4 Porisma

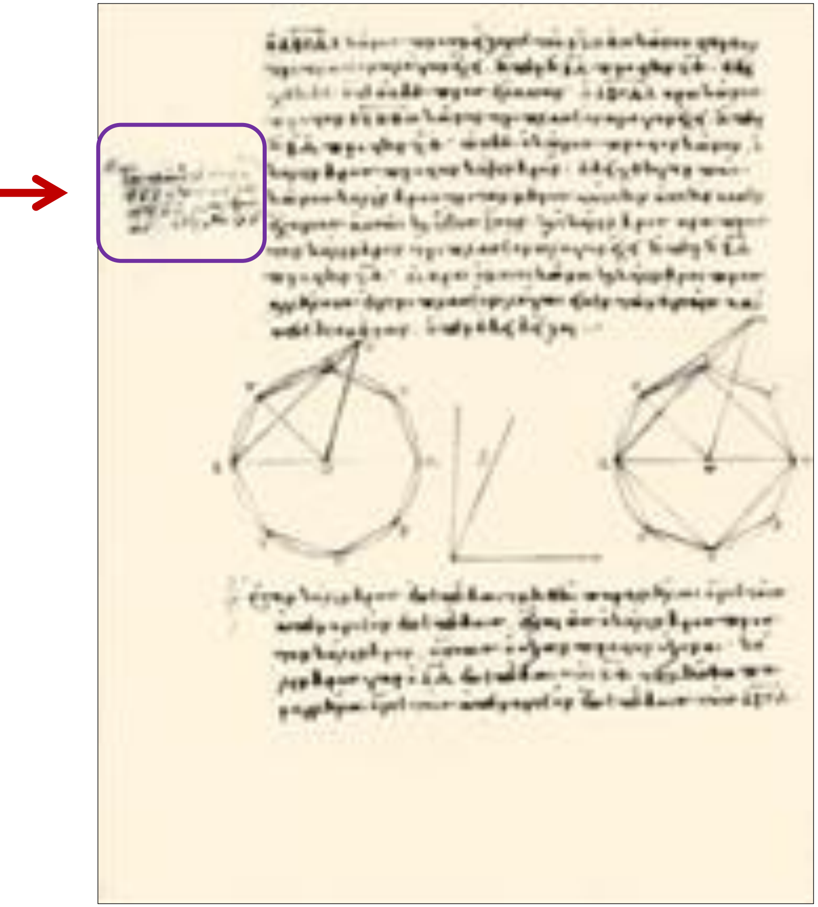
A Oxyrhynque , sulle rive del Nilo a una sessantina di chilometri dal Cairo, sono stati trovati molti frammenti di papiro, tra cui questo che è **il più antico testimone degli *Elementi*** (attualmente è datato I-II sec. d.C.)

- scrittura maiuscola continua: le parole non sono separate, non c'è punteggiatura né accenti
- la figura è tracciata a mano libera e senza lettere (caso anomalo tra i manoscritti bizantini e anche greci)
- La fine della II.4 si incatena direttamente con la II.5, ovvero manca il corollario alla II.4 che esiste in quasi tutti i manoscritti.

Nel più antico manoscritto bizantino il corollario è riportato in margine da una mano più recente e questo suggerisce in maniera convincente che è un'interpolazione.

Le alterazioni del testo

Un esempio: XII.12



Diversamente dai criteri moderni, la figura è posta **al termine della proposizione**, appena prima della XII.13.

Un lettore o un correttore (non è la stessa mano del copista del testo principale) ha aggiunto in margine un rinvio alla XII.10.

Spesso alcuni *scolia* sono stati incorporati nel testo (nella ricopiatura successiva) e sono diventate delle interpolazioni. E' proprio il caso di questo *scolium*, che in altre trascrizioni è incorporato nel testo.

La storia del testo

Per quanto ne sappiamo, ci sono state almeno **due edizioni fondamentali**:

la prima in epoca ellenistica – ed è quella che riteniamo essere l'originale –

mentre la seconda è la ri-edizione del testo compiuta da Teone d'Alessandria nella seconda metà del IV secolo.

Tra Euclide e Teone

Tra l'edizione di Euclide e quella di Teone sono stati scritti due commenti estremamente importanti ad opera di:

Erone (I sec.)

Pappo (III-IV sec.)

E' possibile che al tempo di Teone circolassero già redazioni che accoglievano i suggerimenti di Erone e di Pappo e che Teone abbia deciso se accoglierli o meno (magari scartando i suggerimenti eroniani in favore di un ritorno al modello ellenistico).

In realtà gli *Elementi* che abbiamo oggi derivano dall'edizione teonina più che da quella euclidea, infatti… nel suo *Commento all'Almagesto*, Teone scrive

Nella mia edizione degli* Elementi*, alla fine del libro VI, ho dimostrato che in cerchi uguali i settori circolari stanno tra loro come gli angoli su cui insistono

Questa proposizione, che è la seconda parte della VI.33, si trova in **tutti i manoscritti noti degli *Elementi***.

Unica (parziale) eccezione, il ms. Vat.Gr.190 che riporta l'aggiunta teonina a margine da mano posteriore

al copista del testo.

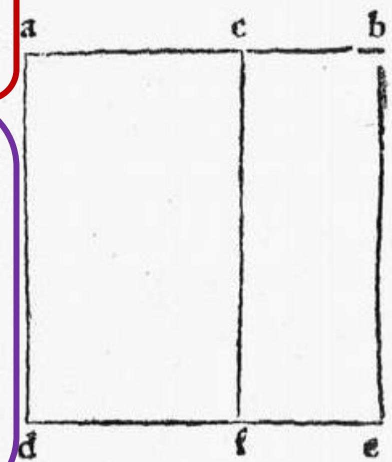
Il Vat.Gr.190 è il testimone completo più antico degli Elementi (prima metà IX sec.). Il testimone *datato* (888 d.C) più antico è il Bodleiano X,1

Fino al tardo Rinascimento non pochi erano addirittura convinti che Euclide avesse solo scritto gli enunciati delle proposizioni e che Teone avesse provveduto alle dimostrazioni

Eucli. ex Zamb. Theorema 2. propositio 2.

2 ¶ Si recta linea secetur vtcunq; quæ sub tota & quolibet segmentorum rectangula comprehenduntur/ æqualia sunt ei quod ex tota est quadrato.

¶ THEON ex Zamb. ¶ Recta enim linea a b, secetur vtcunq; in signo c. Dico q rectangulum comprehensum sub a b & b c, cum rectangulo cõprehenso sub b a & a c: æquum est quadrato quod ex a b. Describatur enim per 46 primi ex a b, quadratum a d e b. excitetur q; per 31 primi per c: vtriq; & a d & b e parallelus c f. æquum est igitur a e ipsis a f & c e. est autem a e: ex a b quadratum. Et a f: ex b a & a c rectangulum contentum. comprehenditur enim ex d a & a c. æqualis autem est a d ipsi a b. Et c e ei quod sub a b, b c. æqualis enim est b e ipsi a b. Quod igitur sub b a & a c cum eo quod sub a b & b c: æquum est quadrato quod ex a b. Si recta igitur linea/ & quæ sequuntur reliqua vt in theoremate. quod ostendere oportuit.



II.2, Edizione 1516

Un ramo importante: la tradizione araba degli *Elementi*

Prima fase: IX secolo

La prima traduzione attestata è anteriore all'anno 809 d.C. e la seconda posteriore all'anno 813: precedono dunque il testimone greco più antico sopravvissuto.

L'autore è **al-Haǧǧāǧ ibn Yusuf ibn Matar** (sono sopravvissuti i primi sei libri) e lo scopo dichiarato della sua traduzione è quella di rendere fruibile il testo, omettendo il superfluo, correggendo gli errori…

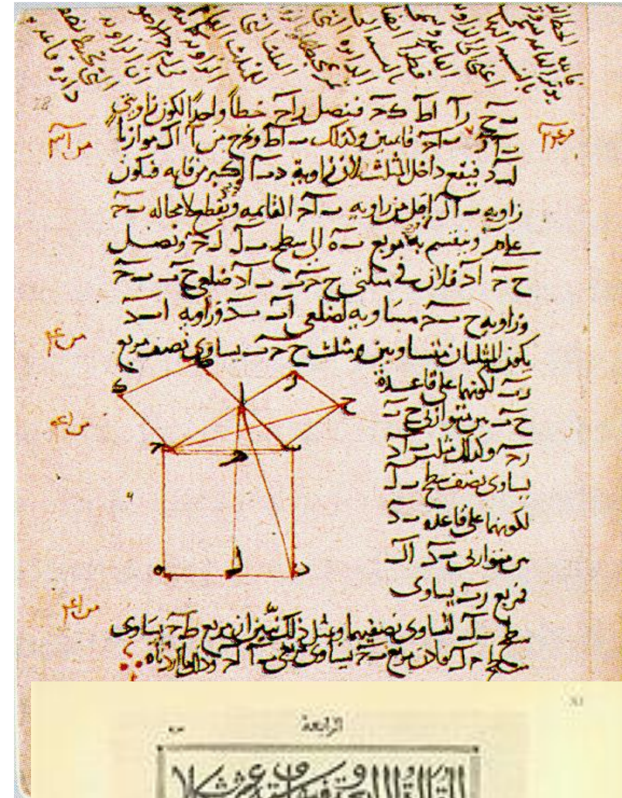
Seconda fase: seconda metà IX secolo

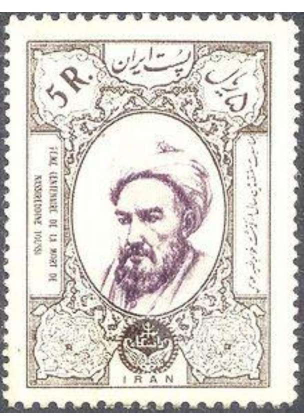
Abū Ya′qūb Ishāq ibn Hunayn (m. 910): la sua traduzione (non pervenuta, sembra) fu poi rivista da

Tābit ibn Qurra (836-901) che confrontò le versioni arabe con alcuni mss. greci, mostrando interesse per le fonti oltre che per il contenuto matematico. Ne esistono diversi testimoni

Terza fase: XIII secolo

Nasīr ad Dīn at-Tūsī (1201-1274): autore di un'edizione commentata. A Firenze esistono testimoni della «grande edizione» (forse apocrifa) sui quali si è basata l'edizione a stampa.





Euclidis elementorum geometricorum libri tredecim. Ex traditione doctissimi Nasiridini Tusini. Nunc primum Arabice impressi. Romae: in Typographia Medicea, 1594

كتاب تحرير اصول لاوقليدس

من تاليف خوجه نصير الدين الطوسي

EVCLIDIS ELEMENTORVM GEOMETRICORVM

Libri Tredecim.

EX TRADITIONE DOCTISSIMI NASIRIDINI TVSINI

Nunc primum Arabicè impressi.

XXII-

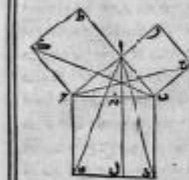
ROMAE

In Typographia Medicea.

M.D.XCIV.

Cum licentia Superiorum.

مجموع مربعي الضلعين المحيطين بـهـا ☙



لتكن الزاوية ب ا ج من مثلث ا ب ج قائمة فاقول ان مربع ب ج يساوي مجموع مربعي ا ب ا ج برهانه نرسم علي اضلاع مثلث ا ب ج مربعات ب د ه ج ا و ك ط ا ب ح ز بالشكل المتقدم ونخرج من نقطة ا خط ا ل موازيا لخط ب د بالشكل الواحد والثلثين فلان زاويتي ا ب د ب ا ل كقائمتين بالشكل التاسع والعشرين وزاوية ا ب د اعظم من قائمة فزاوية ب ا ل اصغر منها فخط ا ل ينقطع خط ب ج اذا اخرجناه علي استقامته في تلك الجهة الي غير النهاية فليقطع خط ب ج علي نقطة م ولينته الي خط د ه علي نقطة ل ونصل بين كل واحدة من نقطتي ا د ا ه ح ج ب ك بخط مستقيم فلان كل واحدة من زوايا ب ا ج ب ا ز ج ا ط قائمة فخطا ا ج ا ز خط مستقيم وكذلك ا ب ا ط بالشكل الرابع عشر ولان كل واحدة من زاويتي ح ب ا ب ا ز قائمة فخط ا ز يوازي خط ب ح ولان كل واحدة من زاويتي ا ج ك ج ا ط قائمة فخط ا ط يوازي ج ك بالشكل الثامن والعشرين واذا اخذنا زاوية ا ب ج مع كل واحدة من زاويتي ج ب د ا ب ح يكون زاوية ا ب د كزاوية ح ب ج من مثلثي ا ب د ج ب ح وضلعا ا ب ب د كضلعي ب ح ب ج فبالشكل الرابع مثلث ا ب د كمثلث ح ب ج لكن سطح ب ل المتوازي الاضلاع ضعف مثلث ا ب د ومربع ا ح ضعف مثلث ح ب ج بالشكل الواحد والاربعين فمربع ا ب كسطح ب ل ولان كل واحدة من زاويتي ب ج ه ا ج ك قائمة فناخذ زاوية ا ج ب مع كل واحدة منهما فتكون زاويتا ا ج ه ب ج ك متساويتين والاضلاع المحيطة بهما متساوية علي التناظر فبالشكل الرابع مثلث ا ج ه كمثلث ج ب ك لكن مربع ا ك ضعف مثلث ب ج ك وسطح ج ل ضعف مثلث ا ج ه بالشكل الواحد والاربعين فمربع ا ك كسطح ج ل فالحكم ثابت وذلك ما اردنا ان نبـيـن ☙

ولهذا الشكل اختلاف وقوع فان مربع ب ه اما ان يقع في جهة القاعدة من زاوية ب ا ج او ينطبق علي مثلث ا ب ج وعلي التقديرين فمربعا ا ح ا ك اما ان يقعا غير منطبقين علي مثلث ا ب ج او منطبقين عليه او يقع مربع ا ح منطبقا عليه ومربع ا ك غير منطبق او بالعكس وهذه ثمانية اوجه اما الاول فقد بيناه وله ثلثة اوضاع بحسب ضلعي ا ب ا ج بالمساواة والصغر والكبر وذلك ظاهر واما الثاني فضلع ا ز اما ان يكون مساويا لضلع ا ج او اعظم او اصغر منه فنقطة ز اما ان ينطبق علي

Anche se la tradizione araba si divide essenzialmente in due grandi famiglie, possiamo dire che in generale **presenta un testo meno ricco di quella greca**: tra definizioni, lemmi, porismi e proposizioni mancano un centinaio di unità testuali.

Queste omissioni sono indizi di un testo meno contaminato di quello di tradizione greca che ci è stato trasmesso?

Non esiste ancora una risposta definitiva e convincente (mancano edizioni critiche del testo arabo). Quello che è certo è che nell'edizione di riferimento degli *Elementi* curata dal filologo Ludvig Johann Heiberg la tradizione araba non viene tenuta in considerazione.

La tradizione araba ha giocato un ruolo fondamentale nella trasmissione degli *Elementi* nell'Occidente Latino.

Le edizioni latine che circolano nel Medioevo sono di due tipi

1. **dal greco al latino**

Traduzione (perduta) di Boezio (480-524). Si trovano tracce (assiomi, definizioni, enunciati libri I-V) in altre sue opere

Traduzione compiuta nella Sicilia normanna del XII secolo (un testimone a Parigi e uno a Firenze) <u>forse</u> usata da Leonardo Fibonacci

2. dall'arabo al latino

Gerardo da Cremona (1114-1187)

traduce il testo di Tābit ibn Qurra a Toledo consultando anche un ms. greco. Circolazione limitata

Adelardo di Bath (1075-1160)

E' all'origine della tradizione euclidea più diffusa nel Medioevo. Gli sono attribuite tre versioni degli *Elementi*, ovvero

1. Una traduzione vera e propria (al-Haǧǧāǧ ?)
2. Un compendio (commenti al posto delle dimostrazioni)
3. Un'edizione mista, con le dimostrazioni di (1) e i commenti di (2)

Adelardo non usa solo fonti arabe, ma anche fonti greche: il suo stile è infarcito arabismi ma anche di ellenismi.

Le traduzioni di Adelardo saranno le fonti utilizzate dal più importante traduttore e commentatore euclideo del Medioevo:

Campano da Novara (m.1296)

Cappellano pontificio alla corte di Viterbo dal 1264.

Nel 1259 redige un'edizione commentata degli Elementi, che diventa il modello di riferimento fino al Cinquecento.

Campano non si preoccupa di restituire il testo di Euclide, ma di comporre un’opera matematicamente coerente.

Per il suo *Euclide*, Campano utilizza diverse fonti risalenti al XII secolo, tra cui traduzioni dall’arabo affiancate da fonti latine e probabilmente anche la traduzione fatta dal greco nella Sicilia normanna

Non solo: usa anche testi più recenti, come la coeva *Arithmetica* di Giordano Nemorario e il commento di Anaritius (al-Nayrīzī) agli *Elementi* (fine del XII sec.), allo scopo di colmare alcune lacune della trattazione euclidea soprattutto in ambito aritmetico.

La sua *recensio* è sicuramente la più diffusa nelle biblioteche d’Europa.

Il Cinquecento
le premesse

Una delle caratteristiche dell'attività culturale del Quattrocento italiano fu l'**intensa ricerca di testi antichi**, che portò dapprima alla formazione di raccolte librarie e poi alla costituzione delle vere e proprie biblioteche umanistiche. I centri principali di questa rinnovata e vivacissima circolazione libraria furono essenzialmente Firenze, Roma, Urbino e Venezia.

Gli umanisti italiani del Quattrocento non solo riuscirono a recuperare in gran parte il *corpus* della matematica greca, ma ne promossero anche la traduzione e lo studio: per non fare che un esempio, Vittorino da Feltre, il celebre umanista e pedagogista, faceva leggere ai propri studenti gli *Elementi* di Euclide in greco già nei primi decenni del secolo.

Il Cinquecento

Alla fine del Quattrocento si impose una straordinaria rivoluzione tecnologica: la **stampa a caratteri mobili**.

A differenza del manoscritto, il libro stampato è più economico ed è un unico modello condiviso: cambia la trasmissione del sapere.

Nel corso del Cinquecento tutte le opere della matematica greca verranno pubblicate a stampa, ma la vicenda più tormentata è quella degli *Elementi,* che si sviluppa in larga parte a Venezia.

L’ambiente culturale veneto nel Cinquecento: l’editoria

Venezia diventa un centro tipografico di straordinaria importanza per diversi motivi

- Posizione geografica propizia
- Legislazione favorevole della Serenissima
- Presenza delle cartiere nell’entroterra
- Vicinanza dello Studio di Padova
- Buona alfabetizzazione

Tra il 1469 e il 1501, nelle circa 200 tipografie attive, vengono stampati circa 2 milioni di volumi, che riguardano soprattutto le umanità.

L’ambiente culturale veneto nel Cinquecento: l’editoria scientifica

1482 *Elementi* tr. Arabo-latina

1490 Opere di Galeno in latino

1496 *Epitoma in Almagestum Ptolomei* (Puerbach e Regiomontano)

1501 G.Valla *De expetendis et fugiendis rebus*

1503 L.Gaurico, *Tetragonismus*

1505 *Elementi* tr. Greco-latina

1509 *Elementi* ed. Luca Pacioli

1515 *Almagesto* secondo la tr. di G. da Cremona

1525 Opere di Galeno in greco

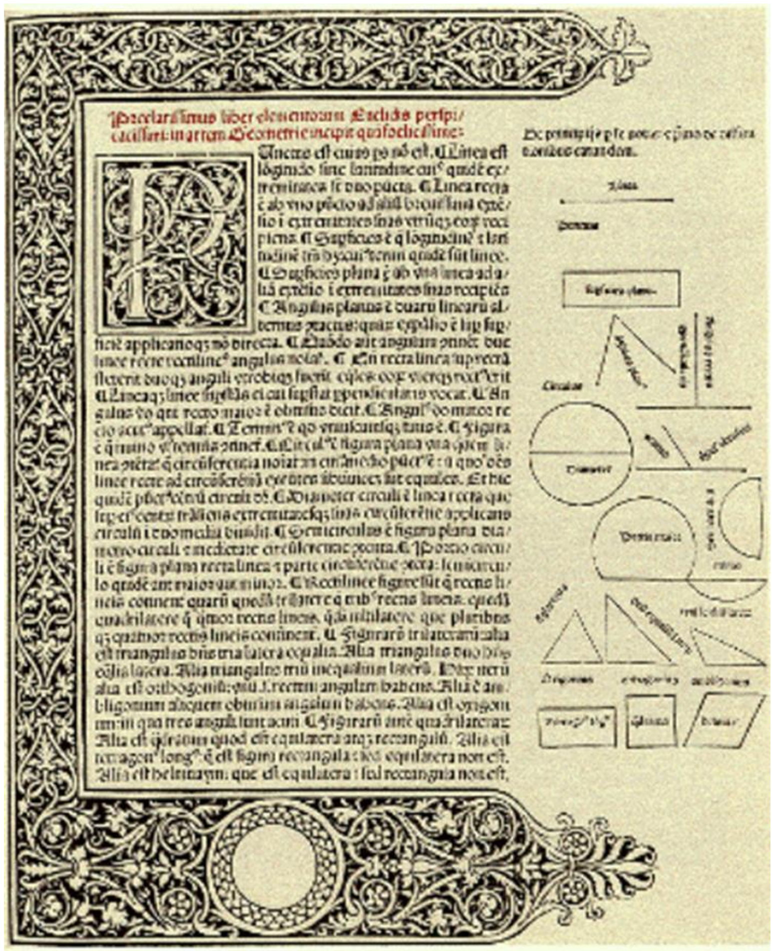
1526 Opere di Ippocrate

1528 *Almagesto* secondo la tr. di Trapezunzio

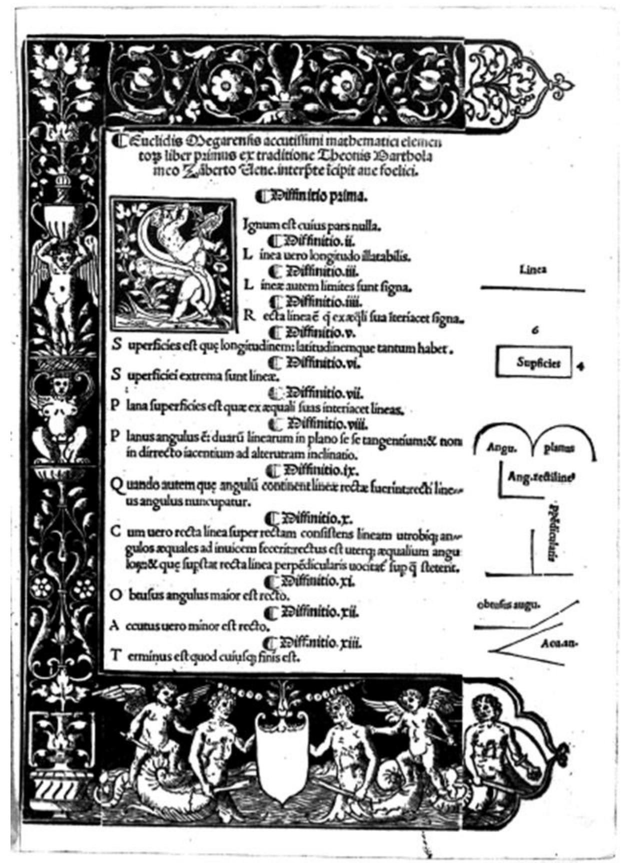
1537 *Coniche* di Apollonio curate da G.B.Memmo

La tradizione euclidea a Venezia

Campano da Novara, 1482



Bartolomeo Zamberti 1505



Euclidis Megarensis acutissimi mathematici elementorum liber primus ex traditione Theonis Bartholameo Zamberto Vene. interprete incipit cum foelici.

Diffinitio prima.

Signum est cuius pars nulla.

Diffinitio. ii.

Linea uero longitudo illatabilis.

Diffinitio. iii.

Lineae autem limites sunt signa.

Diffinitio. iiii.

Recta linea est quae ex aequali sua interiacet signa.

Diffinitio. v.

Superficies est quae longitudinem: latitudinemque tantum habet.

Diffinitio. vi.

Superficiei extrema sunt lineae.

Diffinitio. vii.

Plana superficies est quae ex aequali suas interiacet lineas.

Diffinitio. viii.

Planus angulus est: duarum linearum in plano se se tangentium: & non in directo iacentium ad alterutram inclinatio.

Diffinitio. ix.

Quando autem quae angulum continent lineae rectae fuerint: rectilineus angulus nuncupatur.

Diffinitio. x.

Cum uero recta linea super rectam consistens lineam utrobique angulos aequales ad inuicem fecerit: rectus est uterque aequalium angulorum: & quae superstat recta linea perpendicularis uocatur super quam steterit.

Diffinitio. xi.

Obtusus angulus maior est recto.

Diffinitio. xii.

Acutus uero minor est recto.

Diffinitio. xiii.

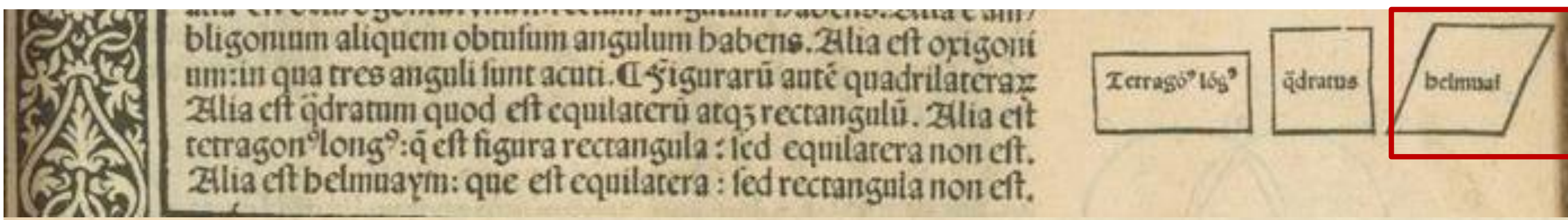
Terminus est quod cuiusque finis est.

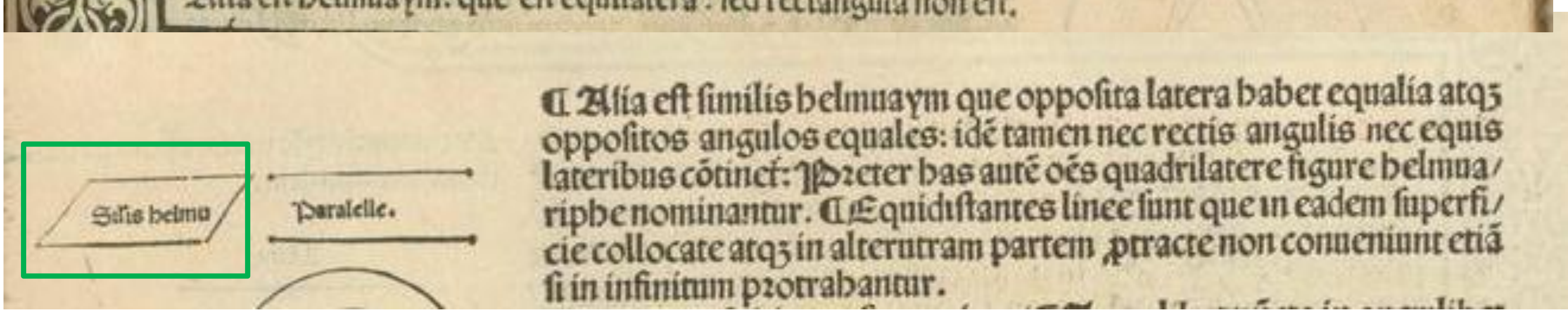
L'*editio princeps* del testo latino (Ratdolt, 1482)

Erhard Ratdolt era un tipografo tedesco che aveva lavorato alla bottega di Regiomontano e che era arrivato a Venezia negli anni Settanta del Quattrocento. Sebbene operasse in uno dei centri più attivi per la rinascita della cultura greca e avesse presumibilmente qualche possibilità di procurarsi dei codici greci e latini dell'opera euclidea, scelse di pubblicare la *recensio* degli *Elementi* più diffusa, ovvero quella redatta da Campano da Novara. Si tratta di un'operazione commerciale, non culturale.

La *princeps* latina degli *Elementi* era quanto di più estraneo si potesse pensare alla sensibilità umanistica e filologica che si era andata formando nei circoli veneziani. Vediamo un esempio banale: la terminologia di Campano.

Alia est ***helmuaym*** [rombo]: *que est equilatera: sed rectangula non est. Alia est* ***similis helmuaym*** [parallelogramma o romboide] *que opposita latera habet equalia atque oppositos angulos equales…. Preter has autem omnes quadrilatere figure helmuariphe nominantur* (ed. Ratdolt 1482, recensio di Campano)


bligonium aliquem obtusum angulum habens. Alia est oxigonium: in qua tres anguli sunt acuti. ¶ Figurarū autē quadrilaterarū
Alia est q̄dratum quod est equilaterū atq; rectangulū. Alia est tetragon⁹ long⁹: q̄ est figura rectangula: sed equilatera non est.
Alia est helmuaym: que est equilatera: sed rectangula non est.


¶ Alia est similis helmuaym que opposita latera habet equalia atq; oppositos angulos equales: idē tamen nec rectis angulis nec equis lateribus cōtinet: Preter has autē oēs quadrilatere figure helmuariphe nominantur. ¶ Equidistantes linee sunt que in eadem superficie collocate atq; in alterutram partem protracte non conueniunt etiā si in infinitum protrahantur.

La risposta degli ambienti umanistici non si fece attendere molto: nel 1505 il veneziano Bartolomeo Zamberti pubblicò l’intero corpus euclideo.

Diversamente da Campano, **Zamberti ambiva a restituire il testo euclideo originale e per ottenere questo scopo aveva deciso di attenersi il più fedelmente possibile al (pessimo) codice greco di cui disponeva.**

Scriveva nell’introduzione

Elementa igitur huiusmodi a Campano non interpretata communi iudicio, sed barbarie excecata … et adeo ut non elementa sed accommodatius chaos appellari possint intuentes … sed sicut apud graecos scriptum invenimus sic fideli solertia et cura sumus interpretati

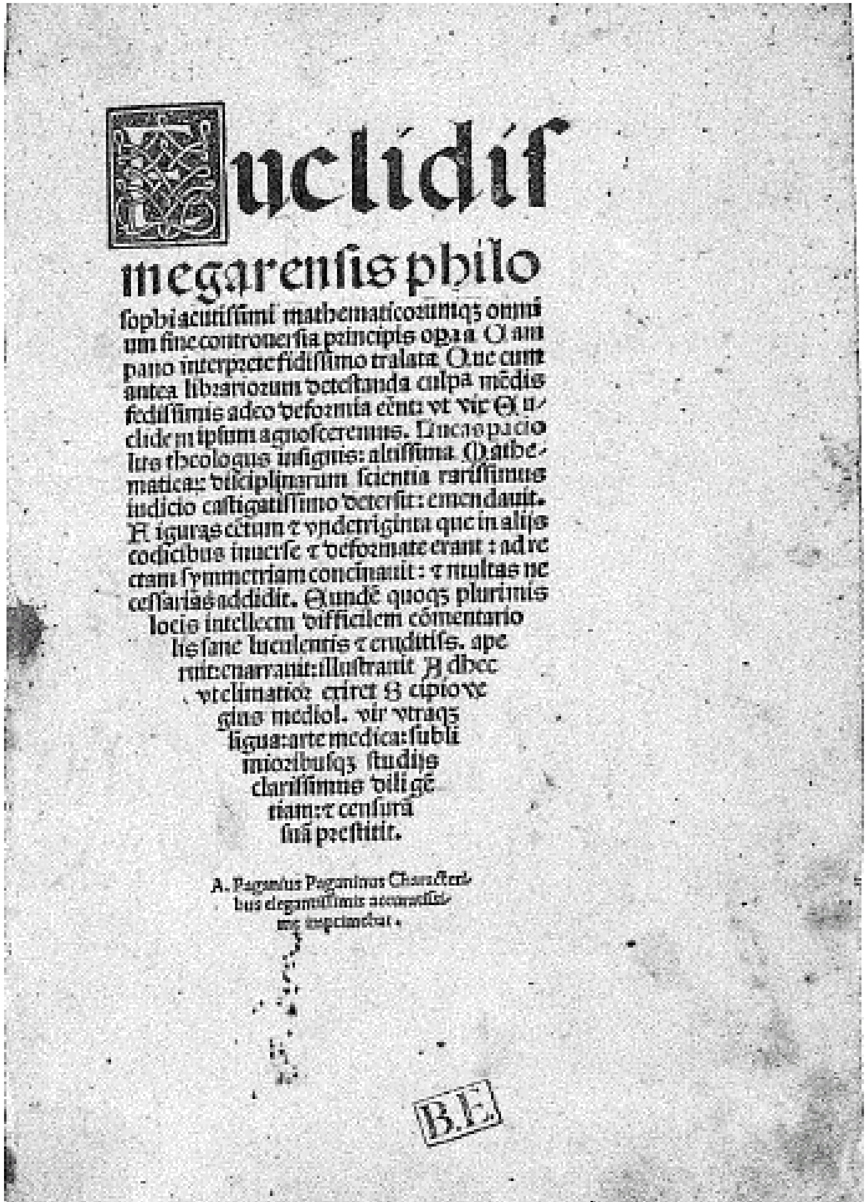
Le critiche di Zamberti

Interpres.

¶ Ubi apud græcos in diffinitionibus legit͂ Rhombus: & Rhomboides: &
trapezia: Cãpanus: ut incipiamus istius insani ineptias ostendere: qui Euclidẽ
non intellexit posuit nescio quid helmuain: & similis helmuain: & helmua
riphe: quæ nomina latinis sunt ignota quippe qm̃ barbara: & uandalica: nos
uero sicut se hñt græci codices sic in latinum conuertimus: p̃terea: illud sciẽ
dum est autem & reliqua quæ sequuntur: inepte ne dum etiã per inscitiam ad
ditum est: nam illud apud græcos nusq̃ inuenitur: Insuper cãpanus eas quas
Euclides cões appellat sñias: cões animi dicit esse conceptiões: melius inq̃ cõ-
munes sñiæ: nam oẽs cõiter sciũt ea quæ in ipsis cõtinent: qm̃ axiomata sunt .i.

Le numerose edizioni cinquecentesche non riescono ad andare oltre il dualismo Campano-Zamberti, seguendo con minime variazioni ora l’una ora l’altra edizione (anche se si sbandierano grandi novità come nel caso di **Luca Pacioli**)

Jacobus Faber Stapulensis addirittura arriverà a comporre un’edizione in cui, proposizione per proposizione, i due testi vengono giustapposti per tentare inutilmente di bilanciare le rispettive manchevolezze, cioè uno scarso rispetto del dettato euclideo nel caso di Campano e una totale mancanza di sensibilità geometrica da parte di Zamberti.



Euclidis
megarensis philo
sophi acutissimi mathematicorumque omni
um sine controversia principis opera a Cam
pano interprete fidissimo tralata. Que cum
antea librariorum detestanda culpa mendis
fedissimis adeo deformia essent: ut vix Eu
clidem ipsum agnosceremus. Lucas pacio
lus theologus insignis: altissima Mathe
maticarum disciplinarum scientia rarissimus
iudicio castigatissimo detersit: emendavit.
Figuras centum et undetriginta que in alijs
codicibus inverse et deformate erant: ad re
ctam symmetriam concinnavit: et multas ne
cessarias addidit.

A. Paganius Paganinus Characteribus elegantissimis accuratissime imprimebat.

L. Pacioli

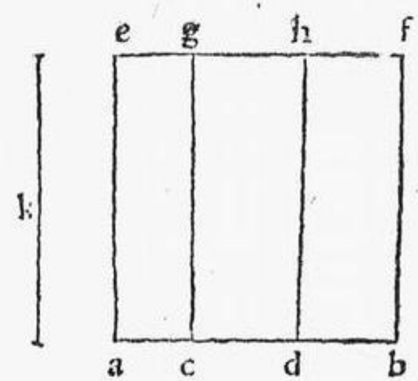
Euclidis megarensis … opera a Campano interprete fidelissimo tralata… Venezia, 1509

«… figuras centum et undetriginta que in alijs codicibus inverse et deformate erant: ad rectam symmetriam concinnavit: et multas necessarias addidit»

Jacobus Faber Stapulensis, 1516

Eucli. ex Camp. ¶Propoſitio 2.

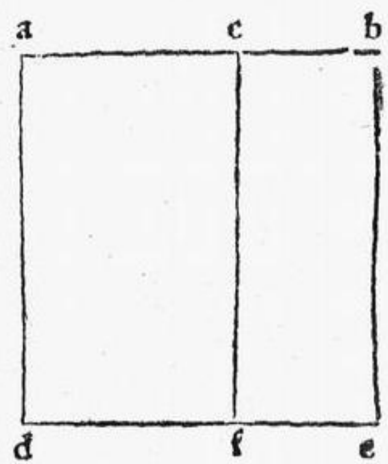
2 SI fuerit linea in partes diuiſa: illud quod ex ductu totius lineæ in ſeipſam fit/æquum erit ijs quę ex ductu eiuſdem in omnes ſuas partes.



¶CAMPANVS. ¶Sit linea a b diuiſa in a c & c d & d b. dico q illud quod fit ex ductu totius a b in ſe quod ſit a e b f: æquum eſt ijs quæ fiũt ex ipſa tota in vnamquamq; dictarum partium. quod palam patebit: ductis e g & d h æquidiſtãter a c & b f. ¶Aliter. Sumatur k æqualis a b. eritq; per præmiſſam quod fit ex ductu k in totam a b: æquum ei quod fit ex ductu k in omnes partes a b. Et quia ex k in a b tantum fit quantum ex a b in ſe/ & ex k in omnes partes a b quantum ex a b in omnes partes eiuſdem/ propter id q k & a b ſunt æquales: patet verum eſſe propoſitum.

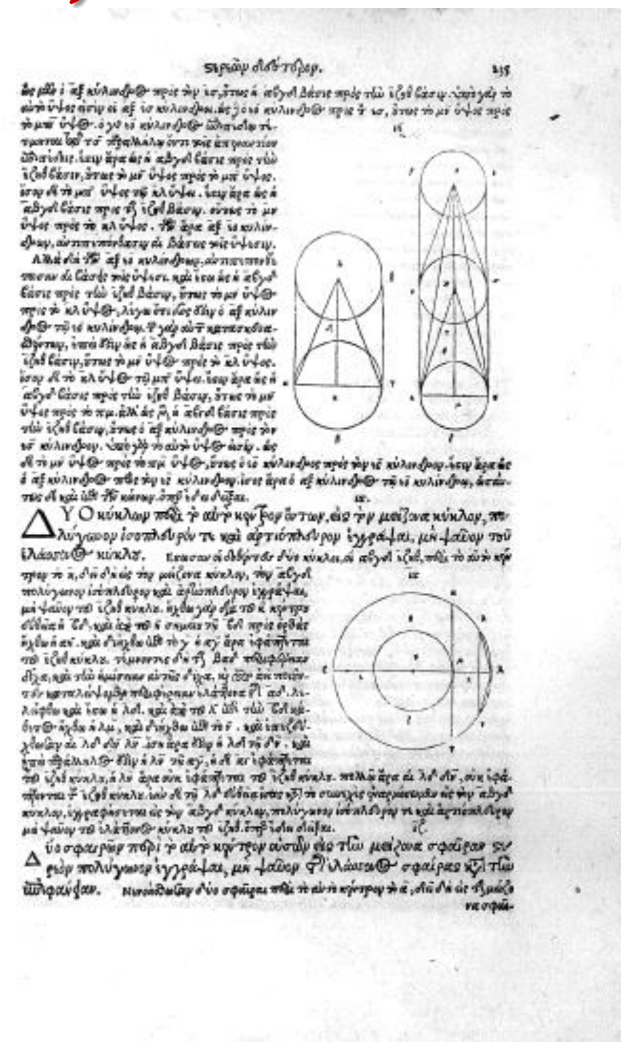
Eucli. ex Zamb. Theorema 2. propoſitio 2.

2 ¶Si recta linea ſecetur vtcũq;: quæ ſub tota & quolibet ſegmentorum rectangula compræhenduntur/ æqualia ſunt ei quod ex tota eſt quadrato.



¶THEON ex Zamb. ¶Recta enim linea a b, ſecetur vtcumq; in ſigno c. Dico q rectangulum compræhenſum ſub a b & b c, cum rectangulo cõpræhenſo ſub b a & a c: æquum eſt quadrato quod ex a b. Deſcribatur enim per 46 primi ex a b, quadratum a d e b. exciteturq; per 31 primi per c: vtriq; & a d & b e parallelus c f. æquum eſt igitur a e ipſis a f & c e. eſt autem a e: ex a b quadratum. Et a f: ex b a & a c rectangulum contentum. compræhenditur enim ex d a & a c. æqualis autem eſt a d ipſi a b. Et c e ei quod ſub a b, b c. æqualis enim eſt b e ipſi a b. Quod igitur ſub b a & a c cum eo quod ſub a b & b c: æquum eſt quadrato quod ex a b. Si recta igitur linea/ & quæ ſequuntur reliqua vt in theoremate. quod oſtendere oportuit.

S. Grynaeus
Basilea, 1533



Nemmeno l'*editio princeps* del testo greco cambia la situazione: i protagonisti rimangono Campano e Zamberti

La prima edizione in lingua viva
Niccolò Tartaglia (1499-1557)

Tartaglia non è un erudito, ma è un maestro d’abaco che si propone come interlocutore degli ambienti dotti attraverso l’edizione di classici: Euclide in volgare e Archimede in latino, entrambe pubblicate nel 1543.

Gli *Elementi* di Euclide sono presentati come il fondamento di qualsiasi ragionamento

Di ben intendere senza le Euclidiane Istruttioni, niun certo si puo avantare.

Antiporta della *Nova scientia* (1537)

Tartaglia è posto tra aritmetica e geometria mentre guarda le traiettorie di un cannone e di un mortaio. Platone brandisce un cartiglio *Nemo huc geometriae expers ingrediatur*

Euclide è posto a guardia del recinto e apre a sua discrezione il cancello che dà l'accesso al sapere.

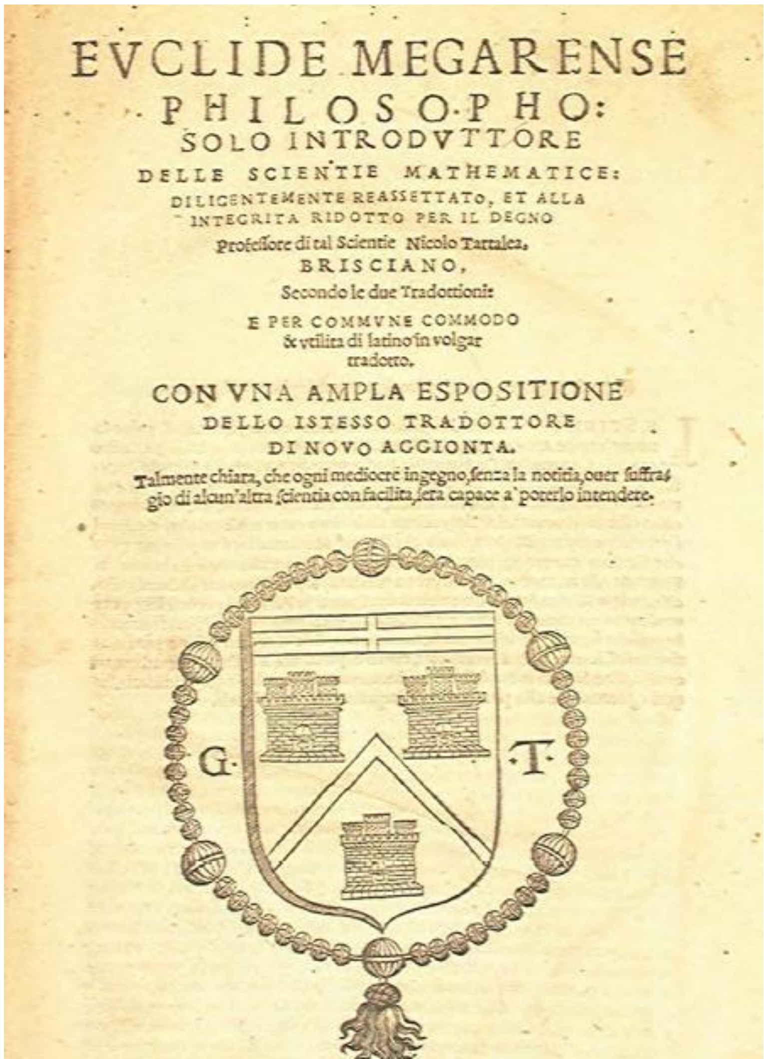
Aurum probatur igni et ingenium mathematicis

La tradizione volgare

Anche se Tartaglia è il primo a pubblicare una traduzione in italiano, è attestata una circolazione manoscritta in forma diretta e indiretta.

Ad esempio, nella *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (1494) Luca Pacioli inserisce molti passi tradotti letteralmente dagli *Elementi* (forse appartenenti a una sua traduzione, talvolta citata ma non pervenuta)

L'*editio princeps* in volgare (1543)
Le fonti


EVCLIDE MEGARENSE
PHILOSOPHO:
SOLO INTRODVTTORE
DELLE SCIENTIE MATHEMATICE:
DILIGENTEMENTE REASSETTATO, ET ALLA
INTEGRITA RIDOTTO PER IL DEGNO
Professore di tal Scientie Nicolo Tartalea,
BRISCIANO,
Secondo le due Tradottioni:
E PER COMMVNE COMMODO
& vtilita di latino in volgar
tradotto.
CON VNA AMPLA ESPOSITIONE
DELLO ISTESSO TRADOTTORE
DI NOVO AGGIONTA.
Talmente chiara, che ogni mediocre ingegno, senza la notitia, ouer suffra-
gio di alcun'altra scientia con facilita, sera capace a poterlo intendere.

Euclide Megarense Philosopho solo introduttore delle scientie mathematice: diligentemente reassettato et alla integrita ridotto per il degno professore di tal scientie Nicolo Tartalea Brisciano secondo le ***due tradottioni*** *e per commune commodo & utilita di latino in volgar tradotto. Con una ampla espositione dello istesso tradottore di novo aggionta, talmente chiara, che ogni mediocre ingegno senza la notitia over suffragio di alcun'altra scientia con facilitam sera capace a poterlo intendere.*

L'*Euclide* di Tartaglia
Considerazioni generali

- Rifusione delle due tradizioni più diffuse – Campano e Zamberti – secondo criteri personali (vedi esempio successivo)
- Interventi editoriali sulla struttura logica limitati
- Commenti a chiarimento o a giustificazione delle scelte compiute. Qualche accenno a possibili applicazioni pratiche

Finalmente l'edizione che si aspettava!

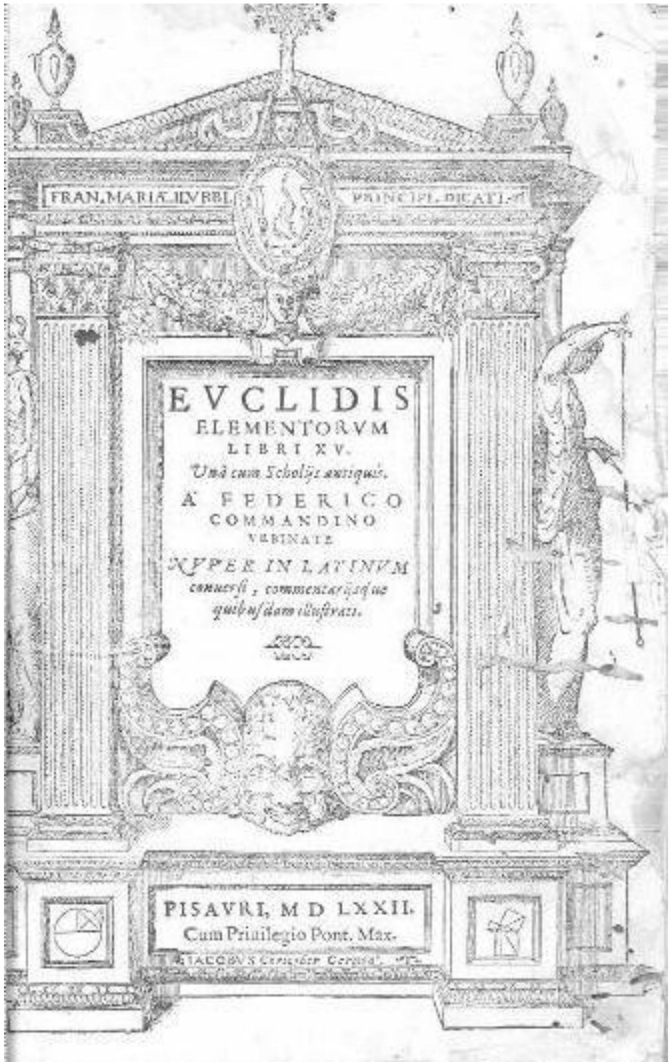
Nella seconda metà del Cinquecento compare sulla scena l'urbinate Federico Commandino (1509-1575) che traduce vari classici della matematica greca tra cui gli *Elementi* in latino (1572) e in volgare (1575)

Commandino coniuga – finalmente – competenza filologica e sensibilità matematica. E sgombra il campo da alcuni equivoci, da «Euclide Megarense» al ruolo di Teone.

F. Commandino

Euclidis Elementorum libri XV

Pesaro, 1572



F. Commandino

De gli Elementi d'Euclide libri quindici con gli scholii antichi, Urbino, 1575

Teone o Euclide?

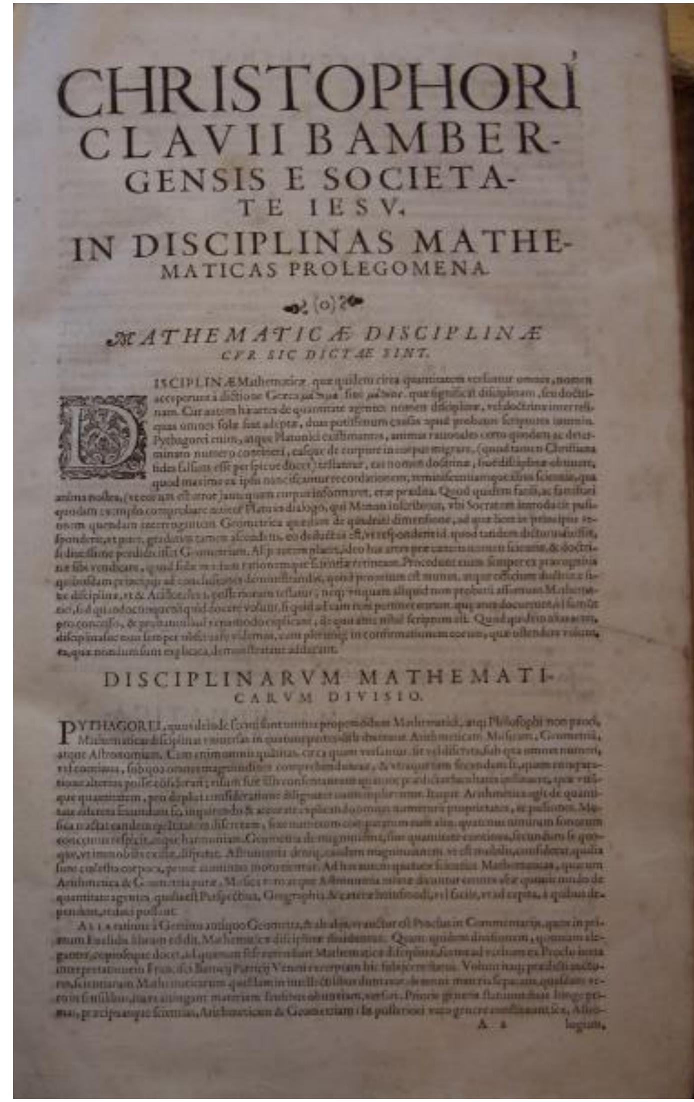
Dall'introduzione

Tra gli altri dunque che di ciò hanno discorso, Giovanni Buteone e Pietro Ramo, uomini amendue di grandissimo giuditio, sono stati di parere in tutto diverso… [Ramus] non solamente attribuisce à Teone le dimostrationi … ma gli Elementi ancora … [Buteone] nell'annotationi che fa in Euclide con dottissime ragioni lo nega, & difende l'antica lode di questo eccellentissimo huomo…

Teone o Euclide?

ma noi, prendendo la strada di mezzo crediamo, che ***Euclide ci lasciasse i suoi libri de gli Elementi ornati delle sue dimostrationi*** *… cosi meritamente concediamo quell'altro: cioè* ***che Teone huomo di eccellentissimo ingegno desse in luce le dimostrationi d'Euclide più chiaramente e difusamente spiegate*** *… se per parere di tutti si concedono queste cose ad Euclide, gli elementi ancora non sono da essergli negati: poi che Teone piu tosto nelle parole è da lui differente, che ne' modi del dimostrare.* ***Sono dunque le dimostrationi d'Euclide; ma scritte in quel modo che Teone seguendo Euclide le spiegò a' discepoli suoi.***

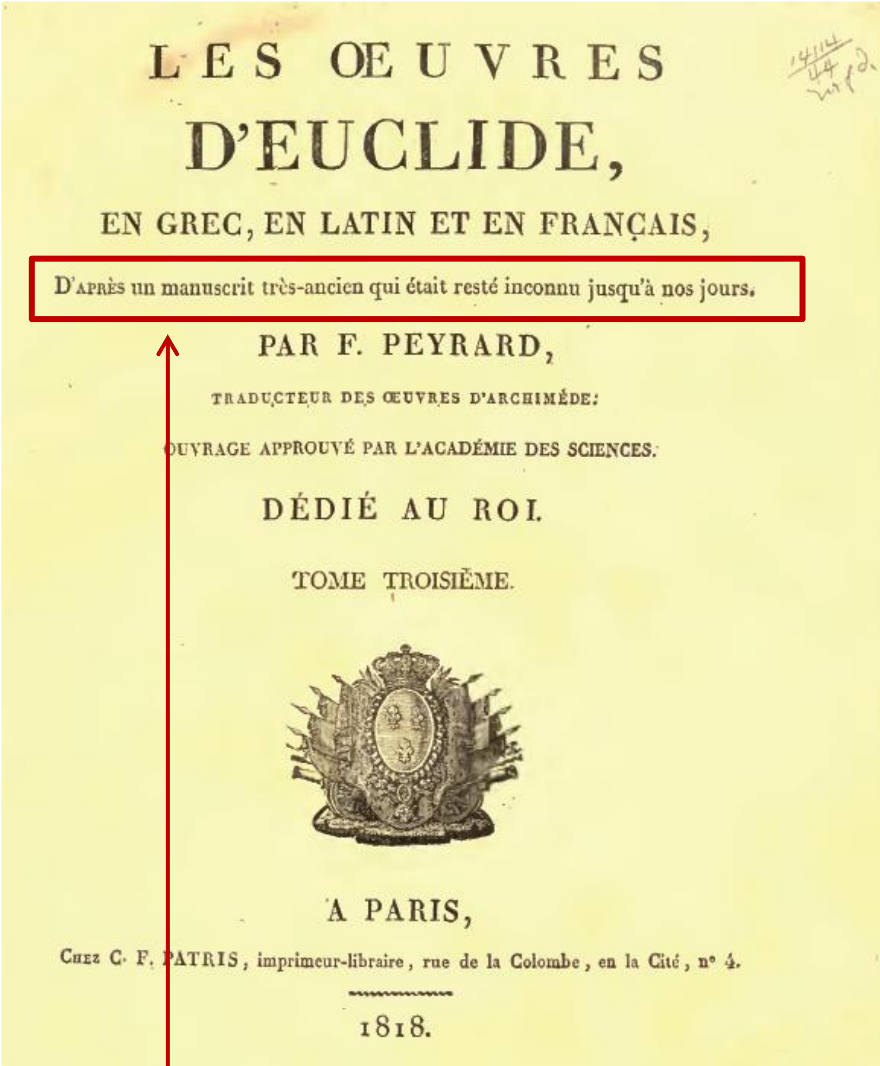
L’edizione di Commandino e quella commentata del gesuita Cristoforo Clavio (1574, 1589, 1603) diventano il modello di riferimento sul quale si formano intere generazioni.
Le edizioni si susseguono, ma le cose cambiano quando l’armata napoleonica porta a Parigi alcuni codici vaticani


CHRISTOPHORI CLAVII BAMBER-GENSIS E SOCIETA-TE IESV.
IN DISCIPLINAS MATHE-MATICAS PROLEGOMENA.

MATHEMATICÆ DISCIPLINÆ CVR SIC DICTAE SINT.

DISCIPLINARVM MATHEMATI-CARVM DIVISIO.

Il bibliotecario François Peyrard riconosce nel Vat. Gr. 190 qualcosa di straordinario…


LES ŒUVRES
D'EUCLIDE,
EN GREC, EN LATIN ET EN FRANÇAIS,
D'après un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours.
PAR F. PEYRARD,
TRADUCTEUR DES ŒUVRES D'ARCHIMÈDE:
OUVRAGE APPROUVÉ PAR L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
DÉDIÉ AU ROI.
TOME TROISIÈME.
A PARIS,
Chez C. F. PATRIS, imprimeur-libraire, rue de la Colombe, en la Cité, n° 4.
1818.

D'après un manuscrit très-ancien qui était resté inconnus jusq'à nos jours

Nel Vat.Gr.190 l'aggiunta di Teone alla VI.33 è a margine, scritta da una mano posteriore: dunque il copista aveva di fronte a sé un'edizione pre-teonina («vecchia edizione») e una teonina («nuova edizione»).

Peyrard si limita a registrare le varianti in apparato rispetto all'edizione di D.Gregory del 1703, ma non rende giustizia al manoscritto (che è il più antico non datato). Chi invece attribuirà a questo codice la giusta importanza sarà un filologo danese…

Johann Ludvig Heiberg
1854-1928

Il grande filologo danese è autore delle più importanti edizioni dei classici della matematica greca: Euclide, Archimede, Apollonio, Erone, Tolomeo… ancora oggi costituiscono il modello di riferimento per la comunità degli studiosi.

Girò l'Europa a studiare manoscritti e **per Euclide ne scelse (essenzialmente) sei.**

BIBLIOTHECA
SCRIPTORUM GRAECORUM ET ROMANORUM
TEUBNERIANA.

EUCLIDIS
OPERA OMNIA.

EDIDERUNT
I. L. HEIBERG ET H. MENGE.

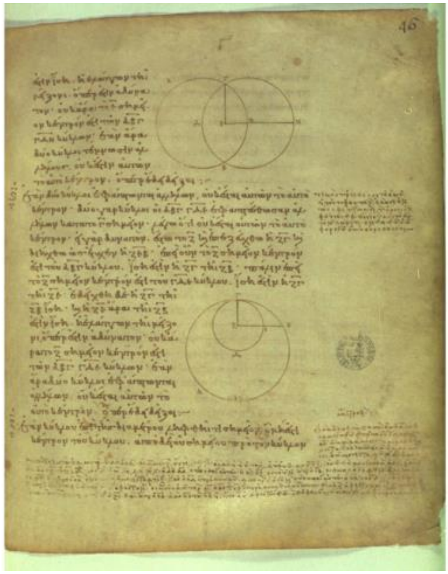
EUCLIDIS ELEMENTA.

EDIDIT ET LATINE INTERPRETATUS EST
I. L. HEIBERG,
DR. PHIL.

VOL. I. LIBROS I–IV CONTINENS.

LIPSIAE
IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI.
MDCCCLXXXIII.

I testimoni di Heiberg



P Vat.Gr. 190, Biblioteca Vaticana, IX sec.
F Laurenziano XXVIII.3, X sec.
B D'Orville 301, Bib. bodleiana, 888 d.C.
V Gr.103, Vienna, XII sec.
b Biblioteca comunale di Bologna, 18-19, XI sec.
p Gr.2466, XII sec.

In realtà, il migliore dei manoscritti teonini usati da Heiberg era proprio il laurenziano F (consultato a Firenze nel 1881), ma il suo stato rese necessario l'utilizzo congiunto di un altro manoscritto laurenziano (XXVIII.6, *siglum* f) del XIII-XIV secolo.

L’edizione di Heiberg

Heiberg, come riconosce subito nell’introduzione, non ha collazionato TUTTI i manoscritti greci esistenti (sarebbe più o meno impossibile anche coi mezzi di oggi).

Heiberg era consapevole di aver pubblicato un’edizione provvisoria e cercò di migliorarla per tutta la sua vita.

Tuttavia la sua edizione non è stata considerata dai posteri un punto di partenza, come avrebbe voluto il suo autore, ma un punto di arrivo.

E’ arrivato il momento, dopo oltre un secolo di stasi, di continuare il lavoro di Heiberg, migliorandolo.

Alcune nuove linee di ricerca

- Miglioramento dello *stemma codicum* (o parti) anche attraverso l'analisi delle fonti secondarie
- Valutazione della tradizione araba e arabo-latina, del tutto sottostimata da Heiberg
- Edizione critica delle figure

I disegni a corredo delle proposizioni: un nuovo campo di ricerca (K.Saito)

Le figure sono elementi essenziali di un testo geometrico. Eccetto alcuni casi particolari è pressoché impossibile capire una dimostrazione senza il rispettivo disegno. Tuttavia fino a tempi recentissimi, l'attenzione degli studiosi si è concentrata esclusivamente sul testo, trascurando del tutto i disegni.

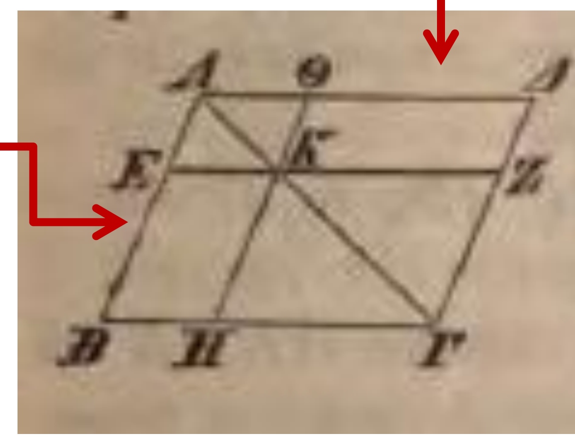
Tutte le edizioni moderne riproducono i diagrammi dell'edizione di Heiberg, che a sua volta copia dall'edizione di E.F. August (1826-9), ad eccezione dei libri aritmetici.

August non ha mai consultato un manoscritto: ha usato il testo di Peyrard e ha modificato piuttosto liberamente i diagrammi assoggettandoli solo ai suoi personali criteri.

Ci sono differenze tra i manoscritti e l'ed. Heiberg?

Consideriamo ad esempio la proposizione I.43

In un parallelogrammo, i complementi dei parallelogrammi attorno alla diagonale (cioè i due piccoli parallelogrammi ΒΓΕΔ e ΔΖΚΗ) sono uguali tra loro.



La figura a destra, tratta da ed. Heiberg, è certamente la figura che chiunque farebbe oggi… vediamo invece come appare nei codici sui quali Heiberg ha costituito il testo critico degli *Elementi*

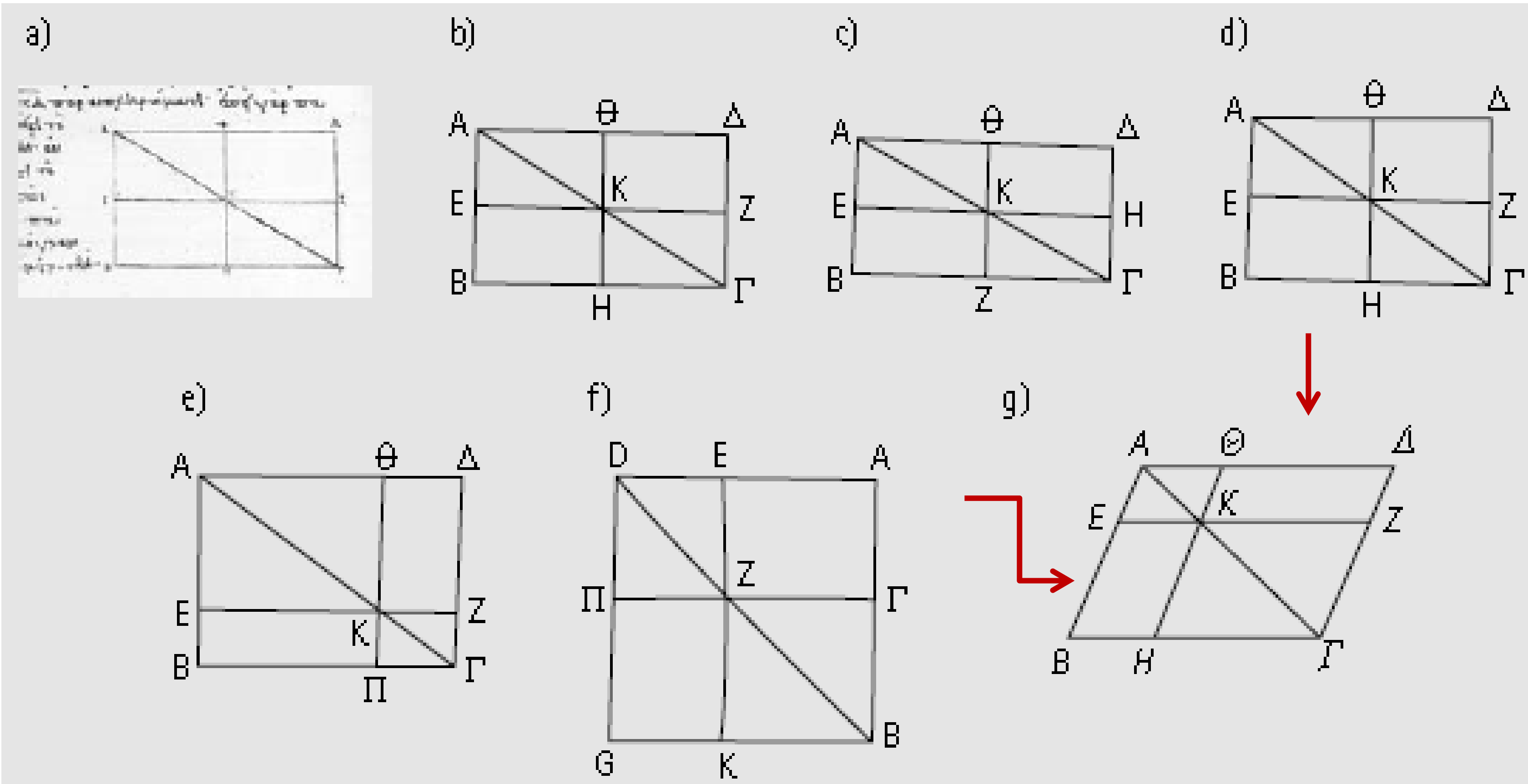


Figure 9.2.10 (a) The diagram of Proposition I.43 in Codex B; (b) the same diagram, redrawn from Codex B; (c) the same, from Codex P; (d) the same, from Codex b; (e) the same, from Codex V; (f) the same, from Bruges 521 (Gerard's translation); (g) Heiberg's diagram of Proposition I.43

Nei manoscritti greci il parallelogrammo è un rettangolo (in un caso un quadrato) e i punti Θ ed E sono spesso i punti medi dei lati.

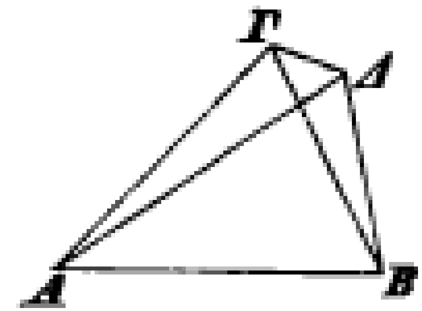
Queste figure «particolari» oggi non sono in genere considerate adeguate perché si ritiene che introducano delle ipotesi surrettizie che potrebbero essere erroneamente utilizzate nel corso della dimostrazione.

Ci sono differenze tra i manoscritti e l'ed. Heiberg?

Vediamo l'esempio della proposizione I.7:

Su una retta data e da ciascun suo estremo si conducano due rette che si incontrino in un punto; non è possibile costruire con gli stessi estremi e dalla stessa parte altre due rette rispettivamente uguali a quelle prima costruite e aventi un diverso punto d'incontro.

Euclide ragiona **per assurdo** supponendo che si possano costruire due coppie di lati (ΑΓ, ΒΓ) e (ΑΔ, ΒΔ) tali che ΑΓ=ΑΔ e ΒΓ=ΒΔ e tali che si incontrino in due punti distinti Γ e Δ



Si tratta evidentemente di un disegno impossibile da realizzare. Nell’immagine, tratta dall’edizione di Heiberg, si cerca di enfatizzare la *generalità* del disegno.

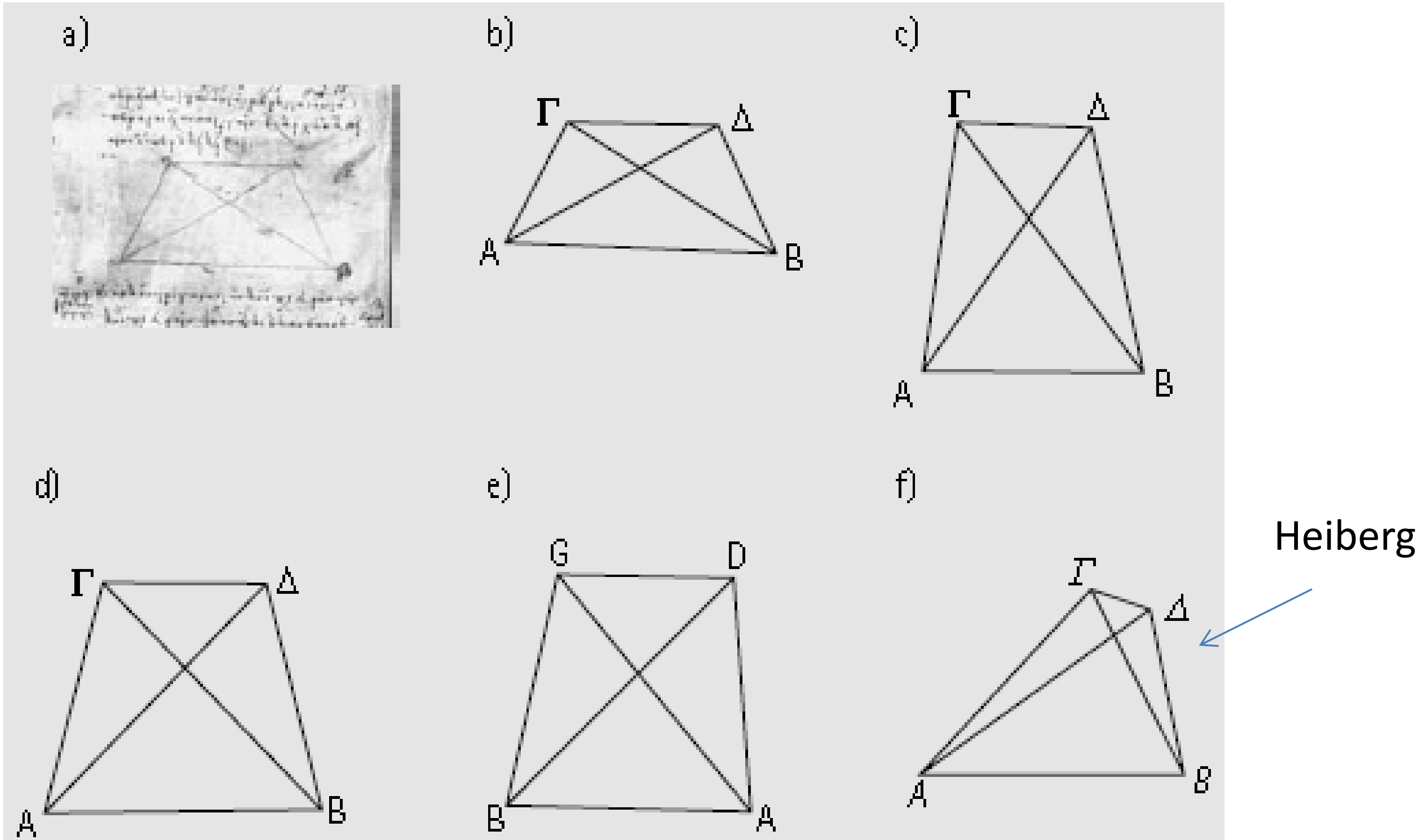
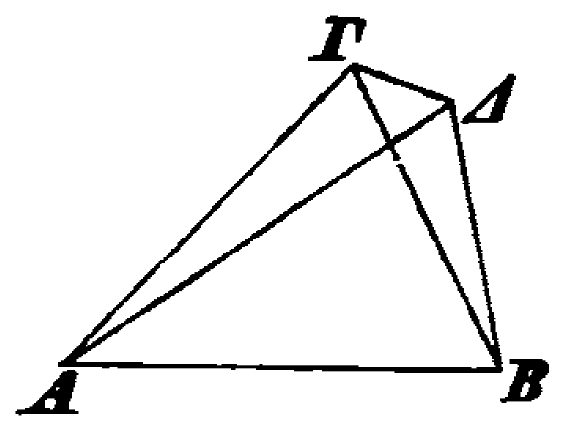


Figure 9.2.9 (a) The diagram of Proposition I.7 in Codex P; (b) the same diagram, redrawn from Codex P; (c) the same, from Codex F; (d) the same, from Codex V; (e) the same, from Bruges 521 (Gerard's translation); (f) Heiberg's diagram of Proposition I.7

In tutti i manoscritti visti da Ken Saito, sia con testo arabo che latino, la figura è approssimativamente simmetrica e AB è parallelo a ΓΔ.

Non ci sono ragioni matematiche per giustificare la simmetria della figura o il parallelismo di AB e ΓΔ.

Nell'edizione di Heiberg, viene disegnata una figura, diversa dai manoscritti, che però sottolinea la mancanza di simmetria.



Da questi (e altri) esempi emerge chiaramente quale sia la tendenza dei manoscritti nel disegno delle figure: se due lati di un triangolo possono essere uguali, saranno disegnati uguali; se un angolo può essere retto, sarà disegnato retto…

Ken Saito chiama questo fenomeno ***over-specification*** (iper-specificazione) e caratterizza tanto i manoscritti greci quanto quelli arabo-latini: **si tratta di un diverso modo di intendere i disegni geometrici legato anche agli strumenti di esecuzione**

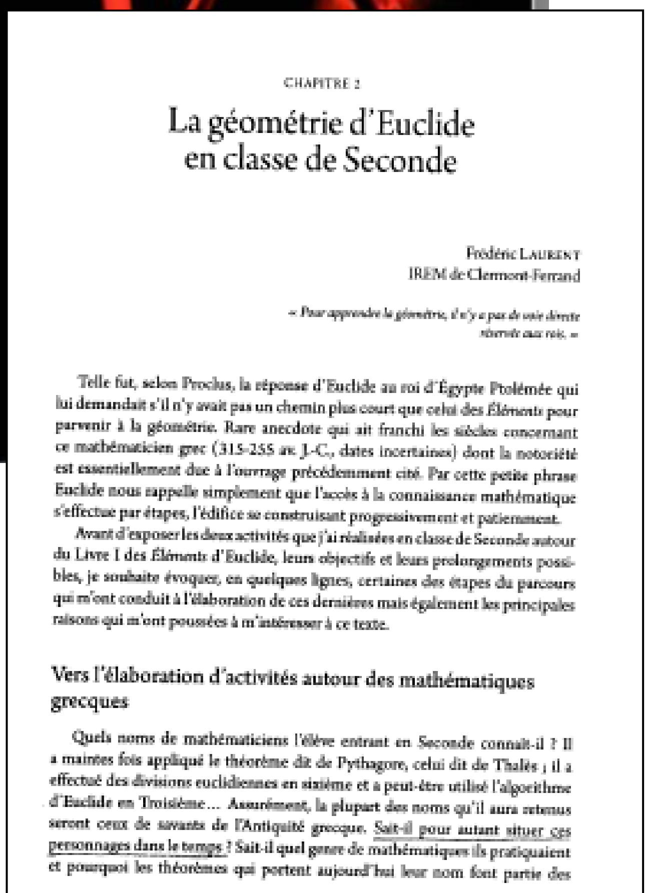
Mentre Heiberg non si era preoccupato dei disegni, ma in genere anche gli editori moderni tendono ad evitare la iper-specificazione e cercano di costruire un disegno quanto più generico possibile, forse per evitare possibili equivoci (ipotesi nascoste) dovuti a una particolare configurazione.

Come osserva Ken Saito, a ben vedere non si può parlare veramente di edizione critica a proposito di un'edizione che altera scientemente i testimoni: sarebbe opportuno cominciare a fare anche l'edizione critica dei disegni geometrici stabilendo opportuni criteri ecdotici.

Euclide in classe:
la quadratura dei poligoni

Il «problema della quadratura dei poligoni» si presta, a mio avviso, ad essere studiato in classe attraverso la lettura **diretta del testo euclideo** e lo studio delle proposizioni più direttamente interessate (I.42, I.45, II.14).

Per di più, lo studio di questo problema si presta anche a un interessante **confronto tra la tradizione testuale greco-latina e quella arabo-latina degli *Elementi***



CHAPITRE 2

La géométrie d'Euclide en classe de Seconde

Frédéric LAURENT
IREM de Clermont-Ferrand

« Pour apprendre la géométrie, il n'y a pas de voie directe réservée aux rois. »

Telle fut, selon Proclus, la réponse d'Euclide au roi d'Égypte Ptolémée qui lui demandait s'il n'y avait pas un chemin plus court que celui des *Éléments* pour parvenir à la géométrie. Rare anecdote qui ait franchi les siècles concernant ce mathématicien grec (315-255 av. J.-C., dates incertaines) dont la notoriété est essentiellement due à l'ouvrage précédemment cité. Par cette petite phrase Euclide nous rappelle simplement que l'accès à la connaissance mathématique s'effectue par étapes, l'édifice se construisant progressivement et patiemment.

Avant d'exposer les deux activités que j'ai réalisées en classe de Seconde autour du Livre I des *Éléments* d'Euclide, leurs objectifs et leurs prolongements possibles, je souhaite évoquer, en quelques lignes, certaines des étapes du parcours qui m'ont conduit à l'élaboration de ces dernières mais également les principales raisons qui m'ont poussées à m'intéresser à ce texte.

Vers l'élaboration d'activités autour des mathématiques grecques

Quels noms de mathématiciens l'élève entrant en Seconde connaît-il ? Il a maintes fois appliqué le théorème dit de Pythagore, celui dit de Thalès ; il a effectué des divisions euclidiennes en sixième et a peut-être utilisé l'algorithme d'Euclide en Troisième… Assurément, la plupart des noms qu'il aura retenus seront ceux de savants de l'Antiquité grecque. Sait-il pour autant situer ces personnages dans le temps ? Sait-il quel genre de mathématiques ils pratiquaient et pourquoi les théorèmes qui portent aujourd'hui leur nom font partie des

Un 'esperienza simile si trova ben descritta in

F.Laurent, *La géométrie d'Euclide en classe de Seconde,* in E.Barbin *De grands défis mathématiques. D'Euclide a Condorcet,* Vuibert 2009

Le proposizioni proposte sono diverse, ma ci sono interessanti considerazioni didattiche

Il problema delle quadrature delle figure rettilinee

Perché *quadratura* e non *calcolo dell'area di una figura piana*

Nella geometria greca non si *misura* una grandezza geometrica nel senso che oggi viene attribuito a questa espressione, perché ci si scontra immediatamente con il problema dell'incommensurabilità.

Il problema generale di determinare l'area di una figura piana o il volume di un solido si traduce, quando è possibile, in un procedimento per **trasformare le figure di partenza (usando solo riga e compasso) in un quadrato equiesteso** o rispettivamente in un cubo (da cui, rispettivamente, il termine *quadrare* e *cubare*).

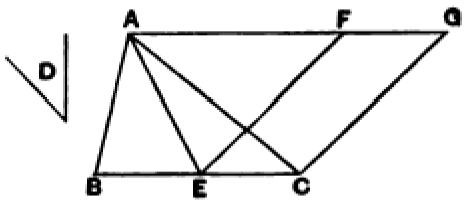
Il problema delle quadrature delle figure rettilinee

- ✓ I primi due libri degli *Elementi* di Euclide risolvono completamente il problema della quadratura dei poligoni, basandosi essenzialmente sulla **scomposizione in triangoli**, «elementi costitutivi» delle figure rettilinee.

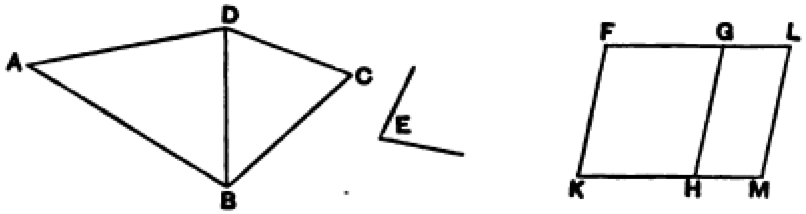
- ✓ Il problema cambia aspetto quando si passa dalle figure rettilinee a quelle curvilinee. La determinazione dell'area e del volume delle figure si colloca nel contesto della teoria delle proporzioni.

Quadratura delle figure rettilinee
Le proposizioni

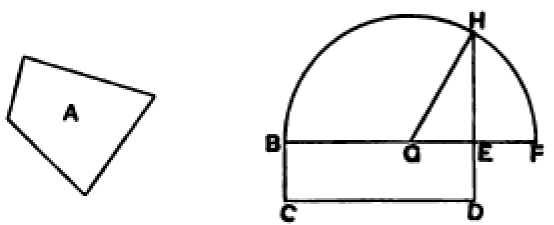
Euclide, I.42. *Costruire, in un dato angolo rettilineo un parallelogrammo uguale a un triangolo dato.*



Euclide I.45 *Costruire un parallelogrammo uguale a una figura rettilinea data in un angolo dato rettilineo*

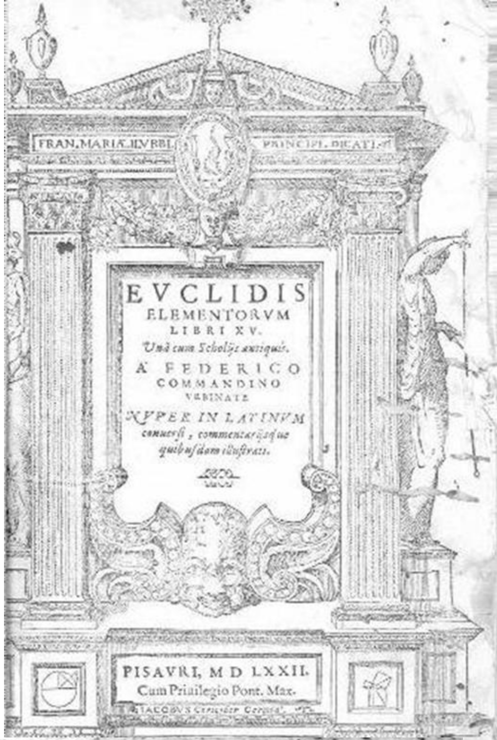


Euclide II.14 *Costruire un quadrato uguale a una figura rettilinea data*



Quale testo usare in classe?

Commandino
1572



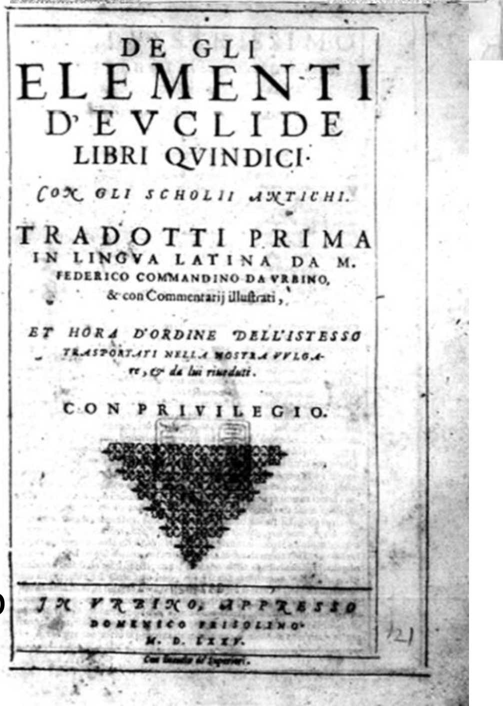
Traduzioni italiane (Frajese, Acerbi)

http://www.scienzaatscuola.it/euclide/index.html

Traduzione inglese

http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html

Edizioni storiche (vd sitografia)



Commandino
1575

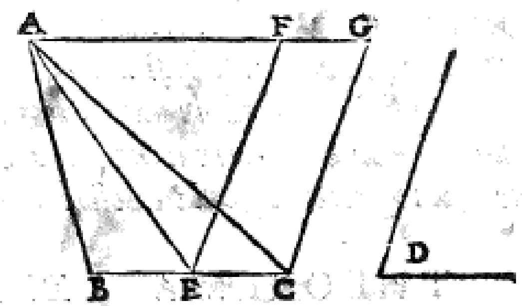
Traduzione degli *Elementi* di Federico Commandino (1575), I.42

Distinzione tra teorema e problema

Riferimenti alle proposizioni precedenti

PROBLEMA XI. PROPOSITIONE XLII.

Conſtituire nel angolo rettilineo dato vn parallelogrammo vguale al dato triangolo.

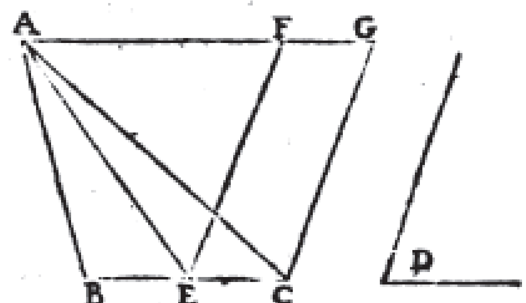


Sia il dato triangolo A B C, l'angolo
rettilineo dato ſia D. biſogna nell'ango-
lo rettilineo vguale ad eſſo D conſtituire
un parallelogrammo vguale al triango-
lo A B C. ſeghiſi B C per mezo nel punto
23. di queſto. E: & giunta A E nella linea retta E C, &
nel punto ch'è in eſſa E conſtituiſcaſi l'an
golo C E F, vguale all'angolo D, & per A
31. di queſto. tiriſi la A G parallela alla E C, & per C
tiriſi la C G parallela alla F E. adunque F E C G è parallelogrammo. & perche la
38. di queſto. B E è vguale alla E C, ſarà anche il triangolo A B E vguale al triangolo A E C,
concioſiacoſa che ſiano nelle baſi vguali B E E C, & nelle medeſime parallele
34. di queſto. B C A G. il triangolo dunque A B C è doppio del triangolo A E C. & è etian-
dio il parallelogrammo F E C G doppio del triangolo, perche ha la medeſima
baſe, & è nelle medeſime parallele. onde il parallelogrammo F E C G è vguale
al triangolo A B C: & ha l'angolo C E F vguale all'angolo dato D. adunque ſi è
conſtituito nell'angolo C E F, che è vguale al dato angolo D, il parallelogrammo
F E C G vguale al dato triangolo A B C. il che biſognaua fare.

Edizione degli *Elementi* di Federico Commandino (1572), I.42

PROBLEMA XI. PROPOSITIO XLII.

Dato triangulo ęquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.



Sit datum triangulum A B C, datus autem rectilineus angulus D. Itaq; oportet, dato triangulo ABC ęquale parallelogrãmum constituere in angulo rectilineo ipsi D æquali. secetur B C bifariam in E, et iuncta A E ad rectam lineam E C, atque ad pũctum in ea E, constituatur angulus C E F ęqualis ipsi D: et per A quidẽ ipsi E C parallela ducatur A G; per C vero ipsi F E ducatur parallela C G. parallelogrãmum igitur est F E C G. Et quoniam B E est ęqualis E C, erit et A B E triangulum triangulo A E C ęquale; in ęqualibus enim sunt basibus B E, E C, et in eisdem B C A G parallelis. Ergo triangulum A B C trianguli A E C est duplum. est autem et parallelogrammum F E C G duplum trianguli A E C; basim enim eandem habet, et in eisdẽ est parallelis. ęquale igitur est F E C G parallelogrammum triangulo A B C, habetq; C E F angulum ęqualem angulo D dato. Dato igitur triangulo A B C æquale parallelogrammum F E C G constitutum est, in angulo C E F, qui angulo D est æqualis. quod quidem facere oportebat.

23. huius.
31. huius.
38. huius.
34. huius.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIONE XLV.

Constituire in vn'angolo rettilineo dato vn parallelogrammo vguale ad vn dato rettilineo.

42. di questo. per l'antecedente.

29. di questo.

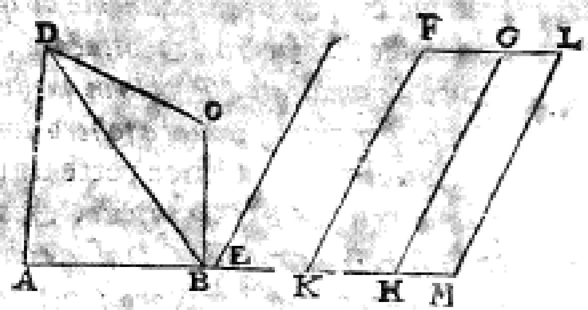
14. di questo. 29. di questo.

34. di questo. 30. di questo.

Sia il dato rettilineo A B C D, & l'angolo rettilineo dato E. bisogna in vn'angolo vguale ad E constituire vn parallelogrammo vguale al rettilineo A B C D. giungasi B D, & constituiscasi il parallelogrammo FH, vguale al triangolo ADB nell'angolo H K F, vguale ad E, & poi alla linea retta G H adattisi il parallelogrammo G M, vguale al triangolo D B C, nell'angolo G H M, che è vguale ad E. & perche l'angolo E è vguale ad amendue H K F G H M, sarà anche H K F vguale à G H M. pongasi K H G commune. adunque gli angoli F K H K H G sono vguali à gli angoli KHG G H M. ma F K H K H G sono vguali à due retti. adunque K H G G H M saranno vguali à due retti, & però nella linea retta G H & nel dato punto H, che è in essa, le due linee rette K H H M non poste dalle medesime parti fanno gli angoli conseguenti vguali à due retti. adunque la K H è per diritto alla H M. & perche nelle parallele K M F G cade la linea retta H G, gli angoli alterni M H G H G F sono vguali. pongasi H G L commune. gli angoli dunque M H G H G L sono vguali à gli angoli H G F H G L. ma gli angoli M H G H G L sono vguali à due retti. onde anchor gli angoli H G F H G L saranno uguali à due retti. adunque la F G è per diritto alla G L. & perche la K F è vguale & parallela alla H G, ma anchor la H G alla M L, sarà la K F vguale

le

le & parallela alla M L. & sono cógiunte dalle linee rette KM FL. adunque le K M F L anchora sono vguali & parallele. onde K F L M è parallelogrammo. & essendo il triangolo A B D vguale al parallelogrammo H F, & il triangolo D B C al parallelogrammo G M, sarà tutto il rettilineo A B C D vguale à tutto'l parallelogrammo K F L M. si è dunque constituito nell'angolo F K M, che è vguale al dato angolo E, il parallelogrammo K F L M, vguale al dato rettilineo A B C D. il che bisognaua fare.



I.45
Federico Commandino (1572)

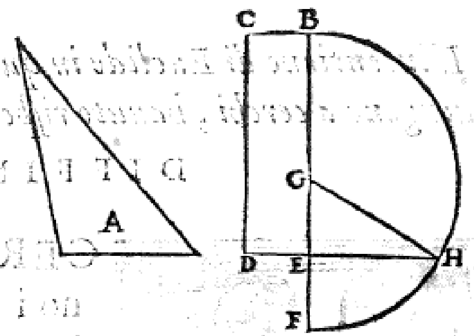
Possibile attività: Eliminate i riferimenti e far ricercare agli studenti le proposizioni che giustificano i passaggi

Per avere a disposizione un elenco delle proposizioni si può agevolmente consultare **http://www.scienzaatscuola.it/euclide/index.html**

Federico Commandino (1575), II.14

PROBLEMA II. PROPOSITIONE XIIII.

Constituire vn quadrato vguale ad vn dato rettilineo.

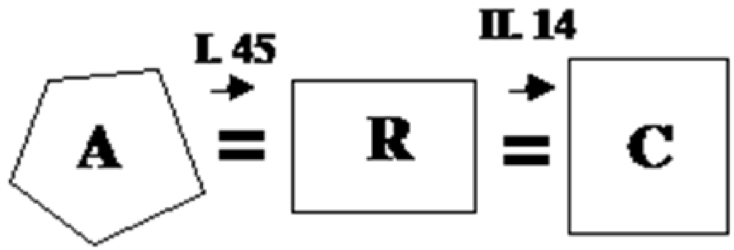


Sia il dato rettilineo A. bisogna constituire vn quadrato vguale al rettilineo A. constituiscasi il parallelogrammo rettangolo B C D E, vguale al rettilineo A. se dunque B E è vguale ad E D, sarà fatto quello che si proponeua, percioche al rettilineo A si è constituito il quadrato B D uguale. ma se B E non è vguale ad E D; vna di esse sarà maggiore. sia maggiore B E, & prolunghisi in F, & pongasi E F vguale ad E D; poi diuisa F B per mezo nel punto G, dal centro G con l'interuallo di vna di esse G B G F descriuasi il mezo cerchio B H F. & prolunghisi D E in H, & giungasi G H. perche dunque la linea retta B F è diuisa in parti vguali nel punto G, & in parti disuguali nel E, sarà il rettangolo B E F insieme col quadrato di E G vguale al quadrato di G F: & G F è vguale à G H. onde il rettangolo B E F insieme col quadrato di G E è vguale al quadrato di G H. ma al quadrato di G H sono vguali i quadrati di H E E G. il rettangolo dunque B E F insieme col quadrato di E G è vguale al li quadrati di H E E G. traggasi il quadrato di E G commune. adunque il rettangolo rimanente B E F è vguale al quadrato di E H. ma il rettangolo B E F è esso parallelogrammo B D, percioche E F è vguale ad E D. il parallelogrammo dunque B D è vguale al quadrato di E H. ma è vguale etiandio al rettilineo A. & però il rettilineo A sarà vguale al quadrato di E H. la onde al rettilineo A si è constituito vn quadrato vguale, cioè quello che si descriue da E H. il che bisognaua fare.

45 del prim

5. di

Nella tradizione greca, l'idea della quadratura può essere schematizzata da questo diagramma



Tratto da B. VITRAC, *Les géométres de la Grèce antique*, CultureMATH

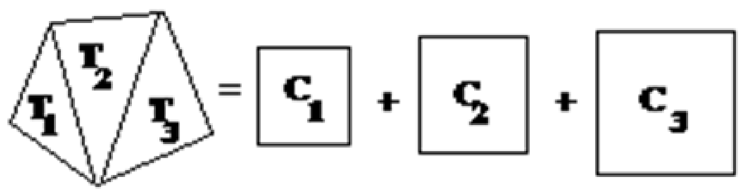
E' l'unico percorso possibile?

Nella tradizione arabo-latina **manca la proposizione I.45**, che è fondamentale in questo schema.

Come si risolve in questo caso il problema della quadratura?

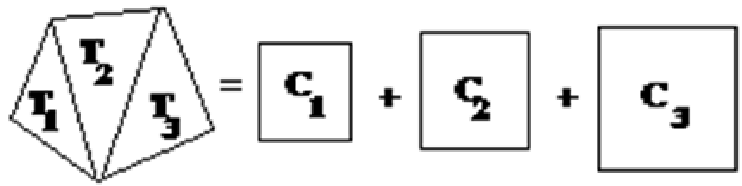
La situazione è la seguente: possiamo scomporre un poligono in triangoli, per ognuno dei quali, in virtù della I.42 possiamo costruire un rettangolo equiesteso.

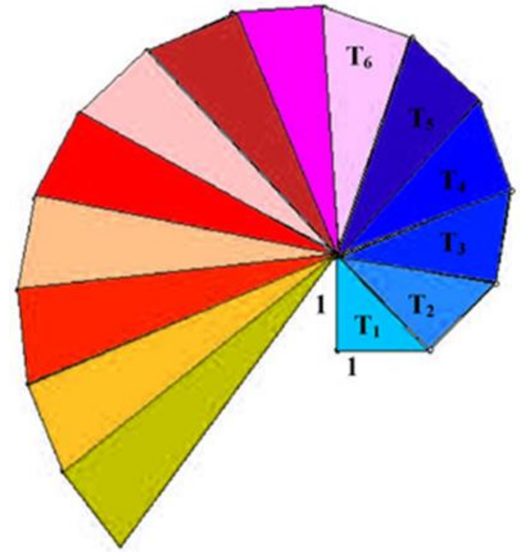
Se poi applichiamo la II.14, per ogni rettangolo possiamo costruire un quadrato equiesteso.



In realtà noi vorremmo costruire un *unico* quadrato equiesteso al poligono di partenza. Dunque, **dati *n* quadrati come è possibile costruire con riga e compasso, un unico quadrato ad essi equivalente**?

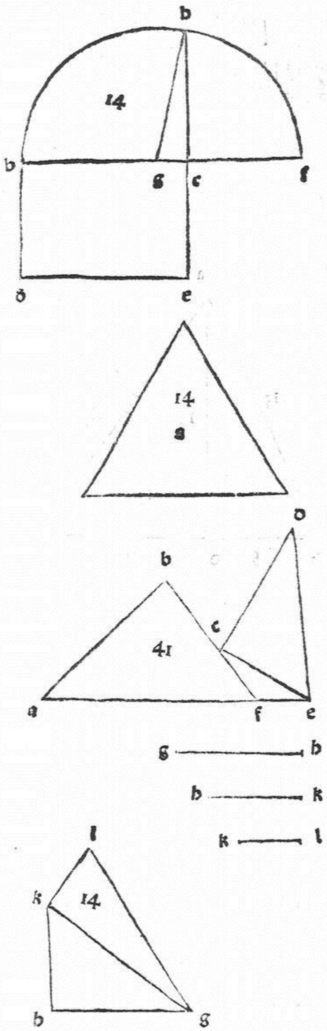
La risposta è … il teorema di Pitagora.





$$\left.\begin{array}{l} T_1 \xrightarrow{\text{I.42}} R_1 \xrightarrow{\text{II.14}} C_1 \\[2em] T_2 \xrightarrow{\text{I.42}} R_2 \xrightarrow{\text{II.14}} C_2 \end{array}\right\} \text{I.47}\ C$$

In questo contesto viene considerato come un vero e proprio «strumento virtuale» per fabbricare quadrati equiestesi a una coppia di quadrati assegnati. Non solo: questo percorso rende chiara una delle funzioni del teorema di Pitagora negli *Elementi* e dà conto della sua posizione al termine del libro I.



cognoscitur area ipsius & auxiliantibus tabulis de corda & arcu cognoscitur omnis eius angulus.

Castigator

a ¶ Alioquin angulus.c.uel.b.qui sunt acuti ex ypothesi esset maior recto uel rectus p.16.p.ideo.

Propositio .14.

Dato trigono equum quadratum describere.

¶ Sit datus trigonus.a.cui nos uolumus equum q̄dratū describere. ⁋ Designabo supficiem equidistantium laterū & rectorum angulorum equalem trigono dato ꝼm quod docet .42.p̄mi: sitq; supficies illa.b.c.d.e.cuius si latera fuerint equalia habemus quod querimus. Ipsa enim erit quadrata.per diffinitionem. Si autem latera sint inequalia tunc adiungam minus ipsorum laterum maiori secundum rectitudinem.sitq; linea.e.f. eq̄lis minori duoꝝ lateꝝ quod est.c.e.adiūcta maiori qđ est.b.c.ꝼm rectitudinem. Totā.b.f.diuidam p eq̄lia in puncto.g.& facto.g.cētro sup lineā.b.f.ꝼm q̄ntitatem linee.g.b.describā semicirculū.b.h.f.& latus.e.c.pducam usquequo secet circumferentiam in puncto.h. Dico q̄ quadratum linee.c.h.est equale trigono dato. ⁋ Producā lineam.g.h.& quia linea.b.f.diuisa est per equalia in.g.& per inequalia in.c.erit per.5.huius quod fit ex ductu.b.c.in.c.f.cum quadrato.c.g.equale quadrato.g.f.quare & quadrato.g.h.quare per penultimam primi & duobus quadratis duarum linearum.g.c.&.c.h. Ergo dempto utrinq; quadrato.c.g.erit quod fit ex.b.c.in.c.f.quod est equale superficiei.b.e.eo q̄.e.f.est eq̄le.c.e. Equale quadrato linee.c.h.quare quadratum linee.c.h.est equale trigono.a. quod est propositum. ⁋ Et nota q̄ per hoc inuenitur latus tetragonicum cuiuslibet altera parte longioris & simpliciter omnis figure rectis lineis contēte quecunq; fuerit. Quoniam omnem figuram talem in triangulos resoluemus & cuiuslibet illorum triangulorum inueniemus tetragonicum latus ꝼm doctrinam istius.& inueniemus per penultimam primi. lineam unam que possit in omnia latera tetragonica inuenta. Verbi gratia, uolo nunc inuenire latus tetragonicum rectilinee figure irregularis.a.b.c.d.e.f. Resoluo eam in.3.triangulos qui sunt.a b f.c d.e.&.c f e. Inuenio quoq; ꝼm doctrinam istius tria latera tetragonica istorum trium triangulorum que sunt.g h.h k.&.k l.& erigo.h.k.perpendiculariter super.g.h.& produco.g.k. eritq; per penultimam primi quadratum.g.k.equale quadratis duarum linearum.g.h.&.h.k.& tertium latus.k.l.erigo perpēdiculariter super lineam.g.k.& produco.lineam.g.l.eritq; per penultimam primi.g.l.latus tetragonicum totius figure rectilinee proposite. ⁋ Explicit liber secundus.

Castigator

a ¶ Etiam dato quadrato equum ei trigonum describere ut in.28.sexti habebis & in.41.p.apparet si ei diligēs intellectus extiterit. Et non solum quadrato sed cuicūq; figure & supficiei multilater̄ seu poligonie his mediantibus possumus semper equum triāgulum designare q̄m oēs tales resoluemus in triāgulos & unicuiq; triāgulo p hanc asignabimus equum q̄dratum siue palellogramum quodcūq;. De hinc ex oībus illis unum cōficiemus per hanc &.25. sexti equale illis oībus postea sup duplum basis huius maximi faciemus triangulum equalis altitudinis & ipse erit equalis illi poligonie proposite.

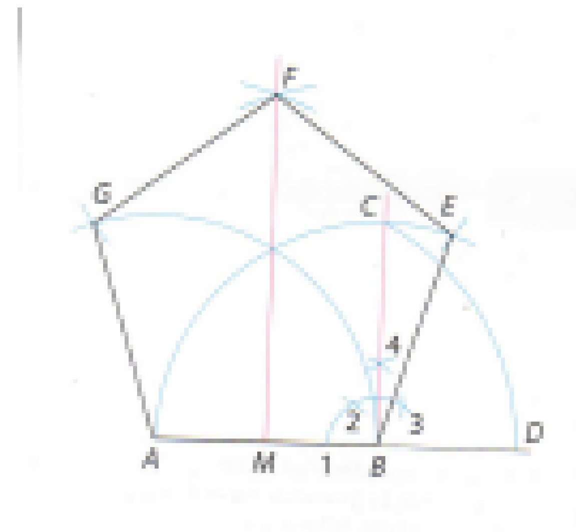
Dimostrazione della II.14 nella tradizione arabo-latina

Edizione degli *Elementi* a cura di Luca Pacioli, 1509

Un’altra proposta
la costruzione dei poligoni regolari (pentagono)

I poligoni regolari vengono disegnati con riga e compasso fin dalla secondaria di primo grado (in «Tecnologia») in maniera prescrittiva, senza distinguere,

molto spesso, tra costruzioni approssimate e costruzioni esatte e senza ovviamente dare una giustificazione geometrica.

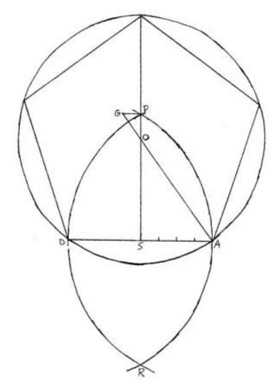


- Punta infine in F, in A e in B con apertura AB, e traccia gli archi che si intersecano in E e in G.
- Unisci consecutivamente i punti A, G, F, E, B e otterrai il pentagono.

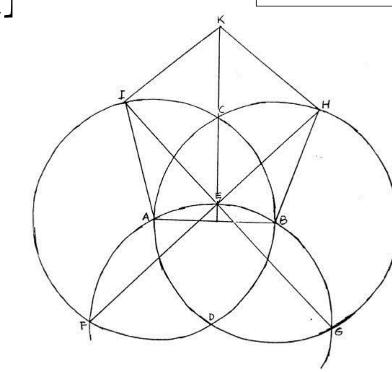
Possibili attività

- Studiare la costruzione geometrica degli *Elementi* (in cui è noto il raggio del cerchio inscritto o circoscritto al pentagono)
- Giustificare, dal punto di vista euclideo, la costruzione che parte invece dal lato del pentagono (tipica del disegno geometrico)
- Studiare le costruzioni dei due artisti rinascimentali Leonardo e

Dürer per stabilire se sono esatte o approssimate



Leonardo



Dürer

Bibliografia di riferimento

Letteratura primaria

Euclide. Les Éléments. Traduction et commentaires par B.VITRAC, Paris, Presses Universitaires de France, 1990-2001, 4 voll.

Euclide. Tutte le opere, a cura di F. ACERBI, Bompiani 2007.

Euclidis opera omnia, ediderunt I.L. HEIBERG et H.MENGE, Lipsiae, In aedibus G.B.Teubneri, 1883-1895

Letteratura secondaria

F. ACERBI, *Il silenzio delle sirene. La matematica greca antica*, Carocci 2010.

F. ACERBI, *Euclide. Images des Mathématiques,* CNRS 2010,
http://images.math.cnrs.fr/Euclide.html

V. GAVAGNA, *La tradizione euclidea nel Rinascimento*, in F. COMMANDINO, *De gli Elementi di Euclide*, anast. ediz. 1575 con saggi, Urbino 2009, pp.1-10.

V. GAVAGNA, *Euclide a Venezia*, in E. Giusti, M. Martelli (a cura di), *Pacioli 500 anni dopo*, Sansepolcro 2010, pp.97-123 (http://www.centrostudimariopancrazi.it/pdf/pacioli500/volume.pdf

K. SAITO, *Reading ancient Greek mathematics*, in E.Robson, J.Stedall (ed.), *The Oxford handbook of History of Mathematics*, Oxford University Press 2009, pp.801--826

B. VITRAC, *Les géométres de la Grèce antique*, CultureMATH
http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/htm/Vitrac/grecs-index.htm

B. VITRAC, *La transmission des textes mathématiques: l'exemple des* Éléments *d'Euclide*, in *Des Alexandries I. Du livre au texte*, L.Giard, Ch. Jacob ed (2001) 339-355.

Sitografia

L’edizione moderna degli *Elementi* (in lingua inglese) curata da D.E.Joyce e basata sulla traduzione di T.Heath si può trovare alla seguente pagina
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html

Una interessante edizione ottocentesca dei primi sei libri, curata da O.Byrne e impostata su un approccio visuale si può trovare
http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/byrne.html

Nel sito http://www.wilbourhall.org/ sono disponibili e scaricabili molte edizioni degli *Elementi*, tra cui l’edizione di Heiberg, di Federico Commandino (1572), Nasir ad Din at Tusi (1594). E’ disponibile anche la traduzione inglese novecentesca di T.Heath. Inoltre, alla voce *Early Printed Texts on the Web. Euclid* sono elencati alcuni *link* a edizioni antiche, tra cui l’*editio princeps* del testo latino pubblicata da Ratdolt (1482), l’edizione di Luca Pacioli (1509), l’*editio princeps* del testo greco curata da S.Grynaeus (1533).

Nel sito *Mathematica Italiana* della Scuola Superiore Normale di Pisa (http://mathematica.sns.it/) è possibile scaricare l’edizione curata N.Tartaglia (1543) http://mathematica.sns.it/opere/23/,

da C.Clavio (1574)
http://mathematica.sns.it/opere/158/,

da V.Viviani (1718)
http://mathematica.sns.it/opere/180/,
e da E.Betti e F.Brioschi (1867)
http://mathematica.sns.it/opere/149/

Altre edizioni antiche sono disponibili nella *Biblioteca Digitale* del Museo Galileo
http://www.museogalileo.it/esplora/biblioteche/bibliotecadigitale.html
nel sito *Echo* (European Cultural Heritage Online) curato dal Max Planck Institut di Berlino (http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/home/search?searchSimple=Euclides)
nella Bibliothèque Numérique *Gallica*
http://gallica.bnf.fr/?lang=FR