Le prime trattazioni organiche del calcolo delle probabilità.

Luca Dell'Aglio

La storia della matematica in classe. Dalle materne alle superiori. Convegno nazionale. L'Aquila 15-17 ottobre 2015

Opere principali sul calcolo delle probabilità nel probabilismo classico

Huygens C. 1657, *De ratiociniis in ludo aleae*

Bernoulli Jacob 1713, *Ars conjectandi*

Montmort P.-R. de 1708, *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*
(1713, 2ème édition revue et augmentée de plusieurs lettres)

De Moivre A. 1712, *De mensura sortis*

De Moivre A. 1718, *The Doctrine of Chances*
(2nd edition, 1738; 3rd edition, 1756)

Laplace P.-S. 1812, *Théorie analytique des probabilités*

Huygens 1657, *De ratiociniis in ludo aleae*

Struttura dell'opera:

14 proposizioni su:

1. Principi generali (proposizioni I-III)

2. Problema delle parti (proposizioni IV-IX)

3. Giochi di dadi (proposizioni X-XIV)

5 problemi finali enunciati.

Huygens 1657, *De ratiociniis in ludo aleae*

Sebbene i risultati dei giochi d’azzardo, nei quali decide unicamente il caso, siano di solito incerti, tuttavia in essi sono determinate le quantità che possono esser vinte e quelle che possono essere perse.

Per esempio, se un giocatore scommette di ottenere un 6 al primo lancio di un dado, è ovviamente incerto se risulterà vincitore o meno. Si può però definire e calcolare il valore da attribuire alla possibilità che egli ha di vincere qualche cosa.

Così pure, se io gioco con un’altra persona sotto la condizione che la vittoria risulti da tre partite e inoltre io ne abbia già vinta una, non si sa, a priori, quale di noi due sarà il vincitore; malgrado ciò è possibile stabilire, in modo preciso, quanto debba essere valutata la mia speranza e quanto quella dell’altro.

Huygens 1657, *De ratiociniis in ludo aleae*

Il principio fondamentale

Molti problemi analoghi possono sorgere con due, tre o più giocatori e, dal momento che questi procedimenti di calcolo non sono affatto di dominio pubblico e possono spesso venir utilizzati, esporrò qui in breve quali ragionamenti si debbano fare, nel caso dei giochi di azzardo, e in particolare in quelli dei dadi.

A fondamento di questa mia trattazione pongo pertanto il seguente principio: in un gioco d'azzardo, la speranza di un giocatore di ottenere qualcosa, è quella quantità tale che, se il giocatore la possedesse, allora di nuovo egli potrebbe pervenire alla stessa speranza con un gioco equo, cioè con un gioco che non miri a danneggiare nessuno.

Huygens 1657, *De ratiociniis in ludo aleae*

Il principio fondamentale

Ad esempio, se qualcuno, a mia insaputa, nasconde tre monete in una mano e sette nell’altra e poi mi chiede di scegliere fra le due mani, io dico che questa offerta ha per me lo stesso valore che se mi regalassero cinque monete. Infatti, se possiedo cinque monete, posso nuovamente pormi nella situazione di avere la stessa possibilità di ottenere o tre o sette monete; e ciò con un gioco equo.

<u>Huygens 1657</u>, *De ratiociniis in ludo aleae*

Propositio I

Se con uguale facilità posso ottenere una somma a oppure una somma b, allora la mia speranza è (a+b)/2.

Con l’intento non solo di dimostrare questa regola, ma soprattutto di scoprirla, pongo uguale ad x la mia speranza. E’ ora quindi necessario che, possedendo x, io riesca, con un gioco equo, a pormi nuovamente in una situazione simile a quella iniziale. Convengo perciò con il mio avversario che il gioco sia il seguente: ciascuno di noi deponga sul tavolo la somma x e chi vince ritiri la posta 2x e dia la somma a all’altro. Il gioco è senza dubbio equo. E’ evidente, con questo ragionamento, che io ho uguale possibilità di ottenere a, se purtroppo perdo, oppure 2x–a, se vinco (…).

Huygens 1657, *De ratiociniis in ludo aleae*

Propositio I

Se, d'altra parte, $2x–a$ fosse uguale alla somma b, allora avrei uguale possibilità di ottenere a oppure b. Pongo pertanto $2x–a =b$, per cui $x=(a+b)/2$ sarà il valore della mia speranza.

E ciò si dimostra facilmente. Infatti, se possiedo $(a+b)/2$, posso giocare con un altro che voglia, anche lui, porre sul tavolo $(a+b)/2$, sempre a patto che il vincitore dia a all'avversario. Con questo ragionamento, avrei una uguale possibilità di ottenere a, se perdo, oppure di ottenere b, se vinco; in questo secondo caso, infatti, riceverei a+b, cioè la posta, e darei poi a al mio avversario.

Huygens 1657, *De ratiociniis in ludo aleae*

In numeri. Se con uguale facilità posso ottenere 3 oppure 7, allora la mia speranza, secondo questa Proposizione, è 5 ed è evidente che, possedendo 5, io riesco nuovamente a ricostruire la situazione iniziale.

Se infatti, giocando con un altro, poniamo entrambi sul tavolo 5 monete, con la condizione che chi vince darà 3 monete all'avversario, questo gioco è senz'altro equo e io, con uguale facilità, posso ottenere 3 monete, se perdo, oppure 7 monete, se vinco: in quest'ultimo caso, infatti, ritiro 10 monete, ma 3 le dò al mio avversario.

Huygens 1657, *De ratiociniis in ludo aleae*

Propositio II

Se, con uguale facilità, io posso ottenere a, oppure b, oppure c, allora la mia speranza è (a+b+c)/3.

(…) Bisogna che, possedendo x, io possa pervenire alla stessa speranza con un gioco equo. Gioco con due avversari alle seguenti condizioni: ognuno di noi depone una somma x e inoltre se vincerò io, dovrò dare la somma b a uno di questi, che mi darà la stessa somma se vincerà lui e dovrò dare la somma c all’altro, che mi darà la stessa somma se vincerà lui.

Evidentemente questo gioco è equo. Con uguale facilità, potrò ottenere b se vincerà il primo avversario, oppure c se vincerà il secondo o anche 3x-b-c se vincerò io; infatti, in quest’ultimo caso, ritirerei la posta 3x, ma dovrei poi dare b e c agli altri. Se ora 3x-b-c fosse proprio uguale ad a, io avrei la stessa possibilità di ottenere a oppure b oppure c. Pongo quindi 3x-b-c=a (…).

Huygens 1657, *De ratiociniis in ludo aleae*

Propositio III

Se il numero dei casi, con i quali ottengo la somma a è p e il numero dei casi con i quali ottengo la somma b è q, e ammetto che tutti i casi possano verificarsi con la stessa facilità, allora la mia speranza è (pa+qb)/(p+q).

(…) Bisogna allora che possedendo x, io possa, come prima, pervenire alla stessa speranza con un gioco equo. Considero a questo scopo p+q–1 compagni di gioco, il quale si effettuerà quindi fra p+q giocatori. Ciascun giocatore depone la somma x, per cui l'intera posta risulta px+qx e ognuno gioca, per conto suo, con uguale prospettiva di vincere.

<u>Huygens 1657</u>, *De ratiociniis in ludo aleae*

Propositio III

Se il numero dei casi, con i quali ottengo la somma a è p e il numero dei casi con i quali ottengo la somma b è q, e ammetto che tutti i casi possano verificarsi con la stessa facilità, allora la mia speranza è(pa+qb)/(p+q).

Inoltre, con q compagni di gioco convengo che ciascuno di loro, se vince il gioco, mi deve dare la somma b, e viceversa, io devo dargli la stessa somma b, se vinco io. Analogamente, con ciascuno dei rimanenti p–1 giocatori stabilisco che ciascuno di loro mi deve dare a, se vincerà il gioco, mentre io dovrò dare a lui la stessa somma (cioè a), se sarò io il vincitore. E’ evidente che, sotto queste condizioni, il gioco è equo, cioè che nessun giocatore è in svantaggio nei confronti degli altri.

Huygens 1657, *De ratiociniis in ludo aleae*

Propositio III

Se il numero dei casi, con i quali ottengo la somma a è p e il numero dei casi con i quali ottengo la somma b è q, e ammetto che tutti i casi possano verificarsi con la stessa facilità, allora la mia speranza è$(pa+qb)/(p+q)$.

Inoltre risulta che io ho ora q possibilità di ottenere la somma b e $p-1$ possibilità di ottenere la somma a e un solo caso (s'intende, quando sono io che vinco) di ottenere la somma $px+qx-qb-(p-1)a$; (…). Se pertanto $px+qx-qb-(p-1)a$ fosse proprio uguale ad a, avrei p possibilità di ottenere a (…) e q possibilità di ottenere b e così avrei di nuovo raggiunto la mia precedente speranza. Pongo quindi $px+qx-qb-(p-1)a=a$ e la speranza risulterà perciò $(pa+qb)/(p+q)$, come si doveva dimostrare.

<u>Huygens 1657</u>, *De ratiociniis in ludo aleae*

Propositio IV

A gioca con B sotto la condizione che chi avrà vinto per primo tre partite, ritirerà la posta. Ora, se A ha vinto due partite e B ne ha vinta una sola, e, di comune accordo, vogliono interrompere il gioco, si chiede come debba essere divisa la posta in modo giusto.

(…) In primo luogo si devono considerare le partite che ancora mancano a entrambi i giocatori. Se essi avessero stabilito fra di loro che vincerebbe la posta, per esempio, chi per primo avesse vinto 20 partite e A ne avesse già vinte 19, mentre B ne avesse vinte 18, allora è evidente che A avrebbe una prospettiva di vincere il gioco migliore di quella di B. (…)

Huygens 1657, *De ratiociniis in ludo aleae*

Per calcolare poi la parte della posta che spetta a ciascuno dei giocatori, si deve considerare ciò che accadrebbe se essi continuassero il gioco. E' infatti evidente che, se A vince la partita successiva, egli ha raggiunto il numero prescritto di partite e ritira la posta, che sarà indicata con a. Se invece è B che vince detta partita, allora le prospettive di A e B di vincere il gioco saranno uguali (in questo caso, infatti, a ciascuno dei due manca ancora una partita), e quindi ognuno avrà diritto ad a/2. E' inoltre evidente che A ha una uguale possibilità di vincere o di perdere questa prima partita, cosicché ha pari possibilità di ottenere a oppure a/2.

Huygens 1657, *De ratiociniis in ludo aleae*

In virtù della proposizione I, tutto ciò equivale ad avere la metà di queste due quantità, cioè 3a/4. Al giocatore B rimane perciò a/4, e questa parte avrebbe potuto essere trovata subito, direttamente, e nello stesso modo in cui è stata determinata quella di A.

Ne risulta che un giocatore, il quale volesse prendere il posto di A nel gioco, dovrebbe dargli 3a/4 (…).

Huygens 1657, *De ratiociniis in ludo aleae*

Propositio IV

A gioca con B sotto la condizione che chi avrà vinto per primo tre partite, ritirerà la posta. Ora, se A ha vinto due partite e B ne ha vinta una sola, e, di comune accordo, vogliono interrompere il gioco, si chiede come debba essere divisa la posta in modo giusto.

$$A_{-1}B_{-2}\begin{cases} \text{se vince } A \quad A_0B_{-2} \qquad \alpha = a \quad \beta = 0 \\ \text{se vince } B \quad A_{-1}B_{-1} \quad \alpha = \frac{1}{2}a \quad \beta = \frac{1}{2}a \end{cases}$$

$$\text{sm(A)} = \frac{a + \frac{1}{2}a}{2} = \frac{3}{4}a$$

$$\text{sm(B)} = a - \frac{3}{4}a = \frac{1}{4}a$$

Huygens 1657, *De ratiociniis in ludo aleae*

Propositio V

Al giocatore A manchi una partita (per vincere il gioco) e al suo avversario B ne manchino tre. Si chiede, a questo punto, come debba essere divisa la posta.

$$A_{-1}B_{-3}\begin{cases} \textit{se vince } A \quad A_0 B_{-3} \qquad \alpha = a \;\; \beta = 0 \\ \textit{se vince } B \quad A_{-1} B_{-2} \quad \alpha = \dfrac{3}{4}a \;\; \beta = \dfrac{1}{4}a \end{cases}$$

$$\mathrm{sm(A)} = \frac{a + \frac{3}{4}a}{2} = \frac{7}{8}a$$

$$\mathrm{sm(B)} = a - \frac{7}{8}a = \frac{1}{8}a$$

Huygens 1657, *De ratiociniis in ludo aleae*

Propositio VI

Al giocatore A manchino due partite (per vincere il gioco) e al giocatore B ne manchino tre.

$$A_{-2}B_{-3}\begin{cases} se\ vince\ A \quad A_{-1}B_{-3} \quad \alpha=\frac{7}{8}a \;\; \beta=\frac{1}{8}a \qquad \mathrm{sm(A)} = \dfrac{\frac{7}{8}a+\frac{1}{2}a}{2} = \frac{11}{16}a \\ se\ vince\ B \quad A_{-2}B_{-2} \quad \alpha=\frac{1}{2}a \;\; \beta=\frac{1}{2}a \qquad \mathrm{sm(B)} = a-\frac{11}{16}a=\frac{5}{16}a \end{cases}$$

Propositio VII

Al giocatore A manchino due partite (per vincere il gioco) e al giocatore B ne manchino quattro.

$$A_{-2}B_{-4}\begin{cases} se\ vince\ A \quad A_{-1}B_{-4} \quad \alpha=\frac{15}{16}a \;\; \beta=\frac{1}{16}a \qquad \mathrm{sm(A)} = \dfrac{\frac{15}{16}a+\frac{11}{16}a}{2} = \frac{26}{32}a \\ se\ vince\ B \quad A_{-2}B_{-3} \quad \alpha=\frac{11}{16}a \;\; \beta=\frac{5}{16}a \qquad \mathrm{sm(B)} = a-\frac{26}{32}a=\frac{6}{32}a \end{cases}$$

Huygens 1657, *De ratiociniis in ludo aleae*

Propositio VIII

Ora, i giocatori siano tre: A, B, C. Ad A e a B manchi una partita (per vincere il gioco) mentre a C ne manchino due.

Per calcolare dunque la parte che tocca ad A, bisogna di nuovo considerare ciò che gli spetta, se egli stesso o uno degli altri giocatori vince la prima partita.

Se proprio A vince, ritira la posta, cioè a. Se vince B, A non avrà nulla, poiché B ha posto fine al gioco. Se invece vince C, allora a tutti e tre i giocatori manca ancora una partita, e quindi, a ciascuno di essi, spetta a/3.

<u>Huygens 1657</u>, *De ratiociniis in ludo aleae*

Propositio VIII

Ora, i giocatori siano tre: A, B, C. Ad A e B manchi una partita (per vincere il gioco) mentre a C ne manchino due.

Così il giocatore A ha una possibilità di ottenere a, una di ottenere 0 ed una di ottenere a/3 (dal momento che a ciascuno dei tre giocatori può accadere, con la stessa facilità, di vincere la prima partita) e questo, per la prop.II, gli vale 4a/9. Allo stesso modo si trova che al giocatore B spetta 4a/9 e a C rimane a/9. Quest'ultima parte avrebbe anche potuto essere determinata separatamente e poi, di lì, essere calcolate le parti degli altri giocatori.

Huygens 1657, *De ratiociniis in ludo aleae*

Propositio VIII

Ora, i giocatori siano tre: A, B, C. Ad A e B manchi una partita (per vincere il gioco) mentre a C ne manchino due.

$$A_{-1}B_{-1}C_{-2}\begin{cases} \text{se vince } A & A_0B_{-1}C_{-2} & a,\ 0,\ 0 \\ \text{se vince } B & A_{-1}B_0C_{-2} & 0,\ a,\ 0 \\ \text{se vince C} & A_{-1}B_{-1}C_{-1} & \frac{1}{3}a,\ \frac{1}{3}a,\ \frac{1}{3}a \end{cases}$$

$$\mathrm{sm(A)} = \mathrm{sm(B)} = \frac{a+0+\frac{1}{3}a}{3} = \frac{4}{9}a \qquad \mathrm{sm(C)} = \frac{0+0+\frac{1}{3}a}{3} = \frac{1}{9}a$$

Huygens 1657, *De ratiociniis in ludo aleae*

Il gioco dei dadi

Con riferimento al gioco dei dadi, si possono porre le seguenti domande: quante volte si deve provare per ottenere, con un dado, un 6 o uno degli altri numeri e, analogamente, quante volte si deve provare per ottenere due 6 con due dadi, o tre 6 con tre dadi, e molti altri problemi dello stesso tipo.

Huygens 1657, *De ratiociniis in ludo aleae*

Propositio X

Determinare il numero dei lanci che un giocatore può accettare di fare per ottenere il 6 con un dado.

Se il giocatore vuole ottenere il 6 con un lancio, è evidente che vi è un solo caso in cui vince e ritira la posta, e 5 in cui perde e non riceve nulla. (…) La posta sia poi indicata con a. Allora quel giocatore ha una sola possibilità di ottenere a e cinque possibilità di ottenere 0 e ciò, per la prop. III, gli vale a/6. Al suo avversario, che gli ha offerto quest'unico lancio, rimane 5a/6. (…)

La speranza del giocatore che intende ottenere una volta il 6 con due lanci, si calcola nel modo seguente.

Huygens 1657, *De ratiociniis in ludo aleae*

Propositio X

Determinare il numero dei lanci che un giocatore può accettare di fare per ottenere 6 con un dado.

Se al primo lancio viene 6, il giocatore ottiene a. Se invece viene un numero diverso da 6, gli resta ancora un lancio che, per quanto detto sopra, gli vale a/6. Vi è però, al primo lancio, soltanto una possibilità di ottenere 6 e cinque possibilità che venga un numero diverso da 6. Ricapitolando (il giocatore) ha una possibilità di ottenere a e cinque possibilità di ottenere a/6 e ciò gli vale, per la Prop. III, 11a/36. All’avversario rimane quindi 25a/36 (…).

Huygens 1657, *De ratiociniis in ludo aleae*

Propositio XI

Determinare il numero dei lanci che un giocatore può accettare di fare per ottenere 12 con due dadi.

Propositio XII

Trovare il numero di dadi con i quali un giocatore può scommettere di ottenere due 6 al primo lancio.

Jacob Bernoulli 1713,
Ars conjectandi

JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,

ARS CONJECTANDI,

OPUS POSTHUMUM.

Accedit

TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,

Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↃ IↃCC XIII.

Jacob Bernoulli 1713, *Ars conjectandi*

Struttura:

1. Commenti e sviluppi sul *De ratiociniis in ludo aleae*

2. Calcolo combinatorio

3. Analisi di vari tipi giochi

4. Questioni applicative e legge dei grandi numeri

Jacob Bernoulli 1713

LETTRE
à un Amy, ſur *les Parties du Jeu de Paume.*

VOus me marquez, Monſieur, que vous avez vû une de mes Theſes, où j'avance quelques Propoſitions nouvelles, touchant les Parties du Jeu de Paume; & vous me demandez, ſi ces Propoſitions renferment quelque realité qui puiſſe étre démontrée, ou ſi elles ne ſont fondées que ſur de pures conjectures faites en l'air, & qui n'ont rien de ſolide; ne pouvant pas concevoir, à ce que vous dites, que l'on puiſſe meſurer les forces des joüeurs par nombres, & encore moins en tirer toutes les concluſions, que j'en ay tirées. Ce qui m'oblige de mettre par écrit tout ce que j'ay medité ſur cette matiere, & d'en faire le ſujet de cette Lettre, que je vous écris en François, pour ne vous pas rebuter dans ſa lecture par la traduction des termes qui ſont en uſage parmy les joüeurs, & qui deviendroient peu intelligibles, ſi on les mettoit en une autre Langue. Je ne m'arréte pas à vous y expliquer les Regles du Jeu, ni le principe de l'Art de conjecturer, qui doit ſervir de fondement à nôtre recherche, ſachant que l'un & l'autre

Jacob Bernoulli 1713, *Lettre à un Amy sur les Parties du Jeu de Paume*

Vi farò prima di tutto notare che il motivo per cui nei giochi casuali si può valutare esattamente i vantaggi e gli svantaggi dei giocatori è dovuto al fatto che molto spesso si conosce esattamente il numero dei casi che sono favorevoli o contrari ai giocatori; e devo dirvi che non è lo stesso per i giochi che dipendono unicamente, o in parte, dal genio o dall'abilità dei giocatori, come sono il Jeu de paume, gli scacchi, e la maggioranza dei giochi di carte; essendo chiaro che non si saprebbe determinare dalle cause, o a priori come si dice, di quanto un uomo è più saggio, con più destrezza e più abile di un altro, senza avere una perfetta conoscenza della natura dello spirito e della disposizione degli organi del corpo umano, la quale è resa assolutamente impossibile da mille cause occulte che vi concorrono.

Jacob Bernoulli 1713, *Lettre à un Amy sur les Parties du Jeu de Paume*

Ma ciò non impedisce che non si possa conoscerla in modo pressoché certo a posteriori, mediante l’osservazione dell’evento più volte ripetuto, facendo quello che si può praticare negli stessi giochi puramente casuali quando non si conoscono i numeri dei casi che si possono presentare.

Poniamo che in un sacco ci sia una quantità di biglietti in parte bianchi e in parte neri, e che io non sappia il numero degli uni e degli altri; cosa farò per scoprirlo? Li estrarrò l’uno dopo altro, (rimettendo ogni volta nel sacco il biglietto che ne avrò estratto, prima di prendere il successivo, in modo che il numero dei biglietti nel sacco non diminuisca mai) e se osservassi cento volte l’estrazione di uno nero e duecento volte di uno bianco, non esiterei a concludere che il numero dei bianchi sia circa il doppio di quelli neri (…).

Jacob Bernoulli 1713, *Lettre à un Amy sur les Parties du Jeu de Paume*

E’ anche in questa maniera che nei giochi di abilità si può conoscere di quanto un giocatore è più forte dell’altro. Osservo, per esempio, due uomini, che giocano al jeu de paume; li osservo a lungo e noto che uno dei due vince 200 o 300 colpi, mentre l’altro non ne vince che cento: valuto così, con notevole certezza, che il primo è un giocatore due o tre volte migliore dell’altro, avendo per così dire due o tre parti di abilità, come tanti casi o cause che lo fanno vincere, laddove l’altro non ne ha che una.

Jacob Bernoulli 1713, *Lettre à un Amy sur les Parties du Jeu de Paume*

I. Ciò detto, consideriamo, per entrare in argomento, due giocatori uguali A e B (ovvero, a cui abbiamo visto vincere o perdere uno stesso numero di punti) che siano inizialmente a due, o a trenta, o a quindici o all'inizio. E' evidente che essi hanno entrambi una uguale speranza di vincere i punti che gli mancano e di vincere così il gioco; per questo la speranza di ognuno di loro è stimata ½ J o ½ Jeu.

Supponiamo poi che A abbia 30 e B 45, o che quest'ultimo sia davanti ai vantaggi: vedete che è altrettanto probabile che A vincerà o perderà il punto seguente;

<u>Jacob Bernoulli 1713</u>, *Lettre à un Amy sur les Parties du Jeu de Paume*

ma se egli lo vince, essi torneranno a due e ognuno avrà, come ho detto, ½ J; e se egli perde il punto, perderà anche il gioco; ciò gli vale, per la dottrina che conoscete:

$$\frac{1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot 0}{2}J=\frac{1}{4}J$$

Poniamo ancora che A abbia 15 a 45; è anche chiaro che gli è ugualmente possibile vincere 30 a 45, e di avere così la speranza precedente ¼ J, o di perdere il gioco (a seconda di chi vince o perde il primo colpo) ciò che rende ora la sua speranza

$$\frac{1\cdot\frac{1}{4}+1\cdot 0}{2}J=\frac{1}{8}J$$

Jacob Bernoulli 1713, *Lettre à un Amy sur les Parties du Jeu de Paume, 6*

II. Allo stesso modo se i due giocatori sono a due giochi, è chiaro che ognuno di essi può ugualmente sperare di vincere la partita, facendo due giochi di seguito e che dunque la speranza di ognuno di essi è ½ P o ½ Partita. Ma se (la partita giocandosi per esempio a quattro giochi) A ne avesse vinti 2 e B 3 (…), ci sarebbe la stessa possibilità che il primo gioco li porti in parità o che esso faccia perdere la partita a A (a seconda se vincerà o perderà questo gioco), ciò che gli farebbe avere:

$$\frac{1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot 0}{2}P=\frac{1}{4}P$$

Jacob Bernoulli 1713, *Lettre à un Amy sur les Parties du Jeu de Paume*

Se ne conclude allo stesso modo che se A avesse un gioco e B tre, la speranza di A sarebbe 1/8 P. E così a seguire, come potete vedere in questa altra tabella, che comprende le speranze di A rispetto a tutta la partita. Voi potete giudicare che essa deve essere la stessa della prima; poiché ciò che i 4 colpi di un gioco sono rispetto a questo gioco, i 4 giochi sono rispetto a tutta la Partita.

Jacob Bernoulli 1713, *Lettre à un Amy sur les Parties du Jeu de Paume*, Table I, II

Table I.

Points de A	Points de B	Sort de A
45	45	$\frac{1}{2}$ J.
30	45	$\frac{1}{4}$ J.
15	45	$\frac{1}{8}$ J.
0	45	$\frac{1}{16}$ J.
30	30	$\frac{1}{2}$ J.
15	30	$\frac{5}{16}$ J.
0	30	$\frac{3}{16}$ J.
15	15	$\frac{1}{2}$ J.
0	15	$\frac{11}{32}$ J.
0	0	$\frac{1}{2}$ J.

Table II.

Jeux de A	Jeux de B	Sort de A
3	3	$\frac{1}{2}$ P.
2	3	$\frac{1}{4}$ P.
1	3	$\frac{1}{8}$ P.
0	3	$\frac{1}{16}$ P.
2	2	$\frac{1}{2}$ P.
1	2	$\frac{5}{16}$ P.
0	2	$\frac{3}{16}$ P.
1	1	$\frac{1}{2}$ P.
0	1	$\frac{1}{32}$ P.
0	0	$\frac{1}{2}$ P.

Jacob Bernoulli 1713, *Lettre à un Amy sur les Parties du Jeu de Paume*

IV. Cerchiamo ora di determinare la speranza dei giocatori, quando sono di forza diversa. Per abbreviare i calcoli, sia preso generalmente n come il numero di colpi che si sia visto vincere al giocatore più forte A contro i quali il giocatore più debole B non ne ha vinto che uno; in modo che n a 1 indichi il rapporto dei due giocatori; dopo che supponiamo che siano a due e che si debba trovare la loro speranza. Se un solo colpo fosse sufficiente a ognuno di essi per vincere il gioco, la questione sarebbe già decisa; poiché il rapporto di n a 1, che è quello delle loro forze, sarebbe anche quello delle loro speranze per questo gioco (…).

<u>Jacob Bernoulli 1713</u>, *Lettre à un Amy sur les Parties du Jeu de Paume*

IV. Sapendo dunque che dopo il primo colpo, uno deve essere in vantaggio e che dopo il secondo colpo il gioco può tornare a due e che, essendo a due, si riottiene la stessa speranza incognita che vogliamo cercare, chiamiamo x la speranza di A in questo stato e consideriamo ciò che avverrebbe se l'uno o l'altro guadagnasse il vantaggio. Ora se vince A, che è n volte più abile dell'altro giocatore, ci saranno per lui n possibilità di vincere il gioco e una possibilità di ritornare in parità (a seconda di chi vincerà o perderà l'altro colpo), ciò che gli vale

$$\frac{n \cdot 1 + 1 \cdot x}{n+1} = \frac{n + x}{n+1}$$

Jacob Bernoulli 1713, *Lettre à un Amy sur les Parties du Jeu de Paume*

IV. E se è B che guadagna il vantaggio, ci saranno per A n possibilità di ritornare in parità, ciò che gli vale

$$\frac{n \cdot x + 1 \cdot 0}{n+1} = \frac{nx}{n+1}$$

Da qui segue che, i giocatori essendo ancora in parità ai vantaggi, caso in cui ci saranno per A, per la stessa ragione, n più possibilità di ottenere il vantaggio che di perderlo, la sua speranza deve essere

$$\frac{n \cdot \frac{n+x}{n+1} + 1 \cdot \frac{nx}{n+1}}{n+1} = \frac{nn+2nx}{nn+2n+1}$$

e poiché la stessa quantità è stata indicata x, si avrà

$$x = \frac{nn+2nx}{nn+2n+1}$$

ciò che ci dà $x = \dfrac{nn}{nn+1}$

<u>Jacob Bernoulli 1713</u>, *Lettre à un Amy sur les Parties du Jeu de Paume,* Table IV

Table IV.

Points de A	Points de B	Sorts de A.
45	45	$\frac{nn}{nn+1}$
30	45	$\frac{n^3}{n^3+nn+n+n+1}$
15	45	$\frac{n^4}{n^4+2n^3+2nn+2n+1}$
0	45	$\frac{n^5}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
45	30	$\frac{n^3+nn+n}{n^3+nn+n+1}$
30	30	$\frac{nn}{nn+1}$
15	30	$\frac{n^5+3n^4+n^3}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
0	30	$\frac{n^6+4n^5+n^4}{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+7nn+4n+1}$
45	15	$\frac{n^4+2n^3+2nn+2n}{n^4+2n^3+2nn+2n+1}$
30	15	$\frac{n^5+3n^4+4n^3+3nn}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
15	15	$\frac{n^5+3n^4+4n^3}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
0	15	$\frac{n^7+5n^6+11n^5+5n^4}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$
45	0	$\frac{n^5+2n^4+4n^3+4nn+3n}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
30	0	$\frac{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+6nn}{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+7nn+4n+1}$
15	0	$\frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+10n^3}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$
0	0	$\frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$

Jacob Bernoulli 1713, *Lettre à un Amy sur les Parties du Jeu de Paume,* Table V

Table V.

Points de A	B	Raiſons de leurs ſorts, A étant plus fort que B, 2 fois		3 fois		4 fois.	
45	45	4 .	1	9 .	1	16 .	1
30	45	8 .	7	27 .	13	64 .	21
15	45	16 .	29	81 .	79	256 .	169
0	45	32 .	103	243 .	397	1024 .	1101
45	30	14 .	1	39 .	1	84 .	1
30	30	4 .	1	9 .	1	16 .	1
15	30	88 .	47	513 .	127	1856 .	269
0	30	208 .	197	891 .	389	8448 .	2177
45	15	44 .	1	159 .	1	424 .	1
30	15	124 .	11	621 .	19	2096 .	29
15	15	112 .	23	297 .	23	2048 .	77
0	15	176 .	67	891 .	133	49408 .	3717
45	0	134 .	1	639 .	1	2124 .	1
30	0	392 .	13	1269 .	11	10592 .	33
15	0	224 .	19	999 .	25	52608 .	517
0	0	208 .	35	243 .	13	51968 .	1157

Jacob Bernoulli 1713, *Lettre à un Amy sur les Parties du Jeu de Paume*

VI. Se il rapporto delle forze di due giocatori è conosciuto, si può conoscere quale vantaggio uno dei due giocatori deve dare all'altro per rendere il gioco equo.

VII. Se A dà a B 15, o 30, o 45, si può comprendere al contrario di quanto A è più forte di B?

XIII. Conoscendo i rapporti tra le forze di tre giocatori A, B, C, che giocano l'uno contro l'altro in tutti i sensi, si conoscerà anche il rapporto delle loro forze, quando due di questi giocatori giocano insieme contro il terzo. (…)

Quando consideriamo come ugualmente probabile che il giocatore A mandi la palla a B o a C, non si tratta che di una ipotesi e la verità è che, più il giocatore è abile, più spesso manderà la palla al più debole.

Jacob Bernoulli 1713, *Lettre à un Amy sur les Parties du Jeu de Paume*

XIII. Ma si deve ancora considerare qui una cosa che controbilancia in qualche modo il vantaggio che prende il giocatore A nel giocare più spesso sul più debole. Si tratta del fatto che, essendo solo contro due avversari, egli si stanca più di ciascuno degli altri e che questa fatica sembra diminuire considerevolmente la sua forza e la sua speranza (…). Per prestare dunque attenzione a questa differenza, si devono valutare le forze dei nostri giocatori con il numero di colpi che essi vincono o perdono, non quando essi giocano da soli contro A, ma quando giocano insieme contro di lui (…).

XIV. Conoscendo i rapporti delle forze di quattro giocatori A, B, C, D che giocano l'uno contro l'altro in tutti i sensi, si conoscerà il rapporto delle loro forze quando giocano due contro due, A e B contro C e D; (…).

Bernoulli Jacob 1713, Ars conjectandi → jeu de paume

Montmort P.-R. de 1708,
Essay d'analyse sur les jeux de hazard, Paris

De Moivre A. 1712, De mensura sortis → problema di Robartes

Montmort P.-R. de 1713, → analisi dell'Her
Essay d'analyse sur les jeux de hazard,
Paris; 2ème édition

De Moivre A. 1718, The Doctrine of Chances,
London (2nd edition, 1738; 3rd edition, 1756)

Condorcet M.J.-A.-N. 1785,
Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité
des décisions rendues à la pluralité des voix,
Paris, Imprimerie Royale

Laplace P.-S. 1812, → 'adresse' di un giocatore
Théorie analytique des probabilités, Paris, Courcier