

# **Considerazioni storiche sulle diverse interpretazioni della probabilità.**

Luca Dell'Aglio

**La storia della matematica in classe. Dalle materne alle  
superiori. Convegno nazionale. L'Aquila 15-17 ottobre 2015**

# Schema sullo sviluppo delle interpretazioni della probabilità nel Novecento

definizione classica → Laplace 1812, 1814

interpretazione epistemica → Keynes 1921

Interpretazione soggettiva → Borel 1924, 1939; Ramsey 1926;  
de Finetti, 1930, 1931

interpretazione frequentista → von Mises 1928, 1939

definizione assiomatica → Kolmogorov 1933

## Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*

### **Definizione classica di probabilità**

La teoria del caso consiste nel ridurre tutti gli eventi dello stesso tipo, a un certo numero di casi ugualmente possibili, ovvero tali che noi siamo ugualmente indecisi sulla loro esistenza, e a determinare il numero dei casi favorevoli all'evento di cui si cerca la probabilità. Il rapporto di questo numero a quello di tutti i casi possibili è la misura di questa probabilità che non è altro dunque che una frazione il cui numeratore è il numero dei casi favorevoli e il cui denominatore è il numero di tutti i casi possibili.

## Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*

### **Principi generali del calcolo delle probabilità**

I Principio. Il primo principio è la definizione stessa di probabilità, che, come si è visto, è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e quello di tutti i casi possibili.

Il Principio. Ma ciò presuppone che i diversi casi siano ugualmente possibili. Se non lo sono, si determinano prima le loro rispettive possibilità, la cui esatta valutazione è uno dei punti più delicati della teoria del caso. Allora la probabilità sarà la somma delle possibilità di ciascun caso favorevole. Facciamo un esempio che chiarisca il principio.

## Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*

Si getti in aria una moneta larga e sottilissima, le cui facce opposte, che chiameremo croce e testa, siano perfettamente simili. Calcoliamo la probabilità di riportare croce almeno una volta in due lanci. E' chiaro che possono verificarsi quattro casi ugualmente possibili: croce al primo e al secondo lancio; croce al primo lancio e testa al secondo; testa al primo lancio e croce al secondo; infine testa al primo e al secondo lancio. I primi tre casi sono favorevoli all'evento di cui si cerca la probabilità, che perciò è uguale  $\frac{3}{4}$ ; per cui si può scommettere tre contro uno che croce si verificherà almeno una volta in due lanci.

## Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*

Si potrebbero, in questo gioco, calcolare solamente tre casi diversi, e cioè croce al primo lancio, il che dispensa dal farne un altro; testa al primo lancio e croce al secondo; infine testa al primo e al secondo lancio. (...) E' chiaro che la probabilità di riportare croce al primo lancio è  $1/2$ , mentre quella degli altri due casi è  $1/4$ ; (...). Se ora, conformemente al secondo principio, si somma la possibilità  $1/2$  di ottenere croce al primo lancio con la possibilità  $1/4$  di ottenere testa al primo lancio e croce al secondo, si avrà  $3/4$  per la probabilità che si cerca, il che è in accordo con ciò che si trova nella supposizione che si facciano i due lanci. Tale supposizione non cambia per nulla la sorte di chi scommette per l'evento; serve solo a ridurre i diversi casi a casi ugualmente possibili.

A TREATISE  
ON PROBABILITY

Keynes John M. 1921

BY  
JOHN MAYNARD KEYNES  
FELLOW OF KING'S COLLEGE, CAMBRIDGE

IN. 40473  
Je

MACMILLAN AND CO., LIMITED  
ST. MARTIN'S STREET, LONDON

1948

# Keynes 1921, *A Treatise on Probability*

## **Schema della posizione logicista**

- (a) Si può parlare di probabilità solo in relazione a proposizioni o giudizi e non rispetto a eventi.
- (b) Si può parlare di probabilità solo relativamente a un determinato corpo di conoscenze; sono individuate delle precise relazioni ('relazioni probabiliste') tra un corpo di conoscenze e una determinata proposizione; è in virtù di queste relazioni che si può parlare dell'esistenza di 'gradi di credenza razionali' in relazione a una determinata proposizione.
- (c) Non tutte le proposizioni sono suscettibili di una valutazione probabilistica. Possono essere dati vari esempi, i più rilevanti dei quali hanno a che fare con proposizioni riguardanti giudizi di qualità.

## Keynes 1921, A Treatise on Probability

In questa misura, quindi, la probabilità può venire denominata soggettiva. Ma nel significato rilevante per la logica, la probabilità non è soggettiva. Non è soggetta, cioè, al capriccio umano. Una proposizione non è probabile solo perché pensiamo che lo sia. Una volta dati i fatti che determinano la nostra conoscenza, ciò che è probabile o improbabile in queste circostanze è stato fissato oggettivamente ed è indipendente dalla nostra opinione. Quindi la teoria della probabilità è logica perché riguarda il grado di credenza che è razionale considerare in date condizioni e non concerne meramente le credenze effettive di particolari individui che possono essere o non essere razionali.



---

## A propos d'un traité de probabilités

---

### Borel 1924

M. John Maynard Keynes est fort connu par ses ouvrages sur les conséquences économiques de la paix; il ne mérite pas moins de l'être par le livre qu'il a publié sur les probabilités; l'une des fâcheuses conséquences économiques de la paix a malheureusement été de rendre pratiquement inaccessibles aux lecteurs français les ouvrages publiés en Angleterre<sup>1</sup>. Je dois à l'obligeance de la *Revue philosophique* de posséder celui de M. Keynes. C'est un livre touffu, dont le titre (littéralement: Traité sur la probabilité) n'indique qu'imparfaitement le sujet. Si j'avais à le définir brièvement, je dirais que c'est un essai philosophique et logique sur l'idée de probabilité et sur ses relations avec les théories mathématiques dites calcul des probabilités. Ces théories mathématiques ne sont pas ignorées de l'auteur et sont effleurées à l'occasion, mais elles ne sont pas son objet principal; ce qui l'intéresse, c'est l'aspect philosophique et logique des questions, non leur aspect scientifique. Le peu d'intérêt porté par M. Keynes aux sciences exactes apparaît immédiatement à la lecture de la bibliographie qui termine son *Traité*. Cette bibliographie est très étendue; elle occupe plus de 25 pages dont chacune contient plus de 25 titres, soit plus de 600 livres ou articles; M. Keynes s'excuse avec humour de n'avoir peut-être pas toujours suffisamment résisté au plaisir du collectionneur désireux d'augmenter d'une unité sa collection; en fait, il aurait pu se dispenser de citer, comme j'ai pu l'observer pour un auteur que j'ai des raisons de bien connaître, des articles de *Revue* qui se retrouvent dans un livre lui-même cité. Et cependant, dans cette Bibliographie si étendue, on ne trouve rien sur les applications de la théorie des probabilités à la physique; le nom de Maxwell est cité dans le livre à la page 172, mais la bibliographie ne mentionne ni Maxwell, ni Gibbs, ni Boltzmann; Maxwell est cependant un des noms les plus illustres dont puisse s'enorgueillir la célèbre Université de Cambridge à laquelle

1. *A Treatise on Probability*, by John Maynard Keynes, fellow of King's College, Cambridge. (Macmillan and Co, London, 1921, xi-466 p., 18 s.)

# Émile Borel

- Nasce a Saint-Affrique in Francia nel 1871
- dal 1905 ricerche in calcolo delle probabilità
- 1909, *Éléments de la théorie des probabilités*
- 1914, *Le hasard*
- 1921, note sulla teoria moderna dei giochi
- 1924-1939, *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*
- 1939, *Valeur pratique et philosophie des probabilités*
- Muore a Parigi nel 1956

## Borel 1924, *A propos d'un traité de probabilités*

M. Keynes considera che è un progresso importante osservare che la nozione di probabilità è relativa a un giudizio, a una proposizione e non a un fatto, a un evento. Se scelgo una carta da un mazzo di 32, è scorretto parlare della probabilità che essa sia un re di quadri, ma si può legittimamente parlare della probabilità del giudizio che enuncio dicendo che è un re di quadri; questa probabilità è relativa al mio giudizio e alle informazioni che possiedo sull'esperienza fatta; essa non sarebbe necessariamente la stessa per un altro osservatore con informazioni differenti.

## Borel 1924, *A propos d'un traité de probabilités*

Si deve dunque precisare che la nozione è relativa a un certo corpo di conoscenze, corpo di conoscenze necessariamente incluso in uno spirito umano determinato, poiché le stesse conoscenze astratte non costituiscono lo stesso corpo di conoscenze in due spiriti umani differenti.

Uno degli esempi che ci sono più familiari sono le previsioni atmosferiche a scadenza molto breve (...). Tra due persone che conoscono entrambe lo stato del cielo, del vento, del mare, eventualmente le variazioni barometriche, potrà accadere che A si sbagli nei suoi consigli meno spesso di B, ovvero che le previsioni di A siano più probabili di quelle di B.

## Borel 1924, *A propos d'un traité de probabilités*

Arriviamo a affrontare l'osservazione forse più importante di Keynes su questa questione. Dal momento che si ammette il carattere soggettivo della probabilità, non è possibile cercare di perfezionare o precisare ciò che questa probabilità può avere d'imperfetto o d'impreciso nella sua definizione; in quanto una modifica qualunque nel sistema di conoscenze rispetto al quale la probabilità è definita ha come conseguenza una modifica della probabilità.

## Borel 1924, *A propos d'un traité de probabilités*

D'altronde, avendo un giudizio formulato da Pierre in un dato momento una probabilità determinata, lo stesso giudizio formulato da Pierre in un momento diverso non ha necessariamente la stessa probabilità, anche se tra i due momenti nessuna informazione esterna è stata data a Pierre; è sufficiente che Pierre abbia riflettuto, o al contrario abbia scordato un dettaglio importante, affinché il corpo di conoscenze contenuto nella sua mente e rispetto al quale la probabilità è definita non sia più lo stesso; la probabilità definita non è dunque più la stessa (...).

## Borel 1924, A propos d'un traité de probabilités

### Il metodo della scommessa

Ora, il metodo della scommessa sembra permettere, nella maggioranza dei casi, una valutazione numerica delle probabilità che ha precisamente lo stesso carattere della valutazione dei prezzi. Se si vuole conoscere il prezzo di una tonnellata di carbone, è sufficiente proporre successivamente delle somme sempre più elevate a chi possiede il carbone; a una certa cifra, egli si deciderà a vendere; inversamente, se il proprietario del carbone lo offre, finirà col trovare un compratore se egli abbassa sufficientemente le sue pretese.

## Borel 1924, A propos d'un traité de probabilités

### Il metodo della scommessa

Ci sarà naturalmente un piccolo scarto tra i prezzi così fissati (...); ciò che è certo è che in pratica, nei periodi di attività economica normale, questi prezzi sono ben definiti e molto stabili. (...)

Anche se i casi eccezionali fossero, ciò che non credo, più numerosi per le probabilità che per i valori delle merci, rimarrebbe possibile stabilire una teoria matematica che si applichi a tutte le probabilità valutabili numericamente e questa teoria avrebbe un campo d'applicazione molto vasto, come le teorie economiche hanno un'importanza che non è diminuita dal fatto che esistono dei valori, come la coscienza di un giudice, che non sono in vendita.

## Borel 1924, *A propos d'un traité de probabilités*

Lo studio approfondito di certi giochi condurrà forse a creare un nuovo capitolo della teoria delle probabilità, teoria le cui origini risalgono agli studi sui giochi casuali più semplici; sarà una scienza nuova, dove la psicologia non sarà meno utile della matematica; ma questo nuovo capitolo si aggiungerà alle teorie anteriori senza modificarle.

Borel 1939

**TRAITÉ du CALCUL des PROBABILITÉS et de ses APPLICATIONS**

Par **Émile BOREL**

AVEC LA COLLABORATION DE  
C.-V.-L. CHARLIER, R. DELTHEIL, P. DUBHEIL, M. FRECHET, H. GALBRUN,  
J. HAAG, R. LAGRANGE, F. PERRIN, R. RISSER, C.E. TRAYNARD, J. VILLE.

TOME IV

APPLICATIONS DIVERSES ET CONCLUSION

FASCICULE III

VALEUR PRATIQUE

ET

**PHILOSOPHIE DES PROBABILITÉS**

PAR

**Émile BOREL**

Membre de l'Institut  
Professeur à la Faculté des Sciences



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR  
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
55, Quai des Grands-Augustins, 55

1939

## Sul significato soggettivo della probabilità.

Memoria di

Bruno de Finetti (Roma).

### Sunto.

Si spiega come si possa con tutto rigore introdurre il concetto di probabilità e dimostrarne le proprietà fondamentali ben note attendendosi esclusivamente al punto di vista soggettivo. Dopo aver indicato un modo di procedere di natura quantitativa, che particolarmente si presta alla trattazione analitica, se ne analizzano criticamente i principi dimostrando che sono di natura puramente qualitativa e elementare.

1. Scopo del presente lavoro è di chiarire e approfondire il significato e il valore psicologico che hanno — prescindendo da ogni loro eventuale possibile interpretazione oggettiva — il concetto di probabilità e i fondamenti della teoria delle probabilità, e di provare come questa si possa dedurre e ricostruire con tutto rigore basandosi esclusivamente su tale interpretazione e impostazione psicologica. Cercheremo di vedere in quale senso delle valutazioni di probabilità possano essere incoerenti, ossia intrinsecamente contraddittorie, e della nozione di coerenza analizzeremo il significato, il valore, la portata. Ne dedurremo le regole della logica probabilistica che — come quelle della logica formale nel campo delle proposizioni — ci insegnano a ragionare nel campo delle valutazioni di probabilità mantenendo intatta la coerenza del pensiero con se stesso.

Tale ricerca assume un'importanza indubbiamente e incomparabilmente più grande per chi condivide la concezione soggettiva della probabilità: la concezione per cui ogni valutazione di probabilità non ha nè può avere che un valore essenzialmente e esclusivamente psicologico. Dimostrare, come faremo, che la teoria delle probabilità si può con tutto rigore costruire rimanendo nel più puro ambito di tale

punto di vista, significa allora infatti provare la validità di tutta una teoria basata fino ad oggi su presupposti inaccettabili e privi di senso.

Ma anche per chi volesse attribuire alla probabilità, in un qualche problema e in un qualche senso, un valore oggettivo, la questione di cui intendo occuparmi ha un significato preciso e un'importanza innegabile: il nostro modo di prospettare e impostare i fondamenti del calcolo delle probabilità consente infatti di separare ciò che in ogni problema vi è di logico e quanto ha natura e valore puramente empirici. E' appunto tale distinzione che occorre stabilire in una qualunque teoria matematica per poterne approfondire utilmente la critica dei principi, ed è questa distinzione che mancava finora nel calcolo delle probabilità, ancora perciò tanto lontano dal rigore formale ormai forse raggiunto in tutti gli altri campi delle matematiche. Chiarito questo punto, di ogni problema si potrà dire se è logicamente determinato o è indeterminato, togliendo così di mezzo tanti dubbi e incertezze che tuttora sussistono<sup>1)</sup>. Il nostro proposito è, in sostanza, quello di caratterizzare l'insieme delle opinioni formalmente ammissibili, senza curarci se esistano ragioni d'un qualche altro ordine che possano far ritenere più o meno giusta una qualunque di esse. Tali ragioni esulano infatti dall'aspetto puramente logico del problema, di cui solo la matematica può e deve interessarsi, e sembra quindi opportuna e necessaria una netta divisione delle due fasi: caratterizzazione delle opinioni non incoerenti, fase formale, da trattare matematicamente; scelta di una fra tali opinioni possibili, da lasciare alla pratica, al buon senso, al criterio d'ogni singolo individuo. Unica differenza fra chi segue il punto di vista soggettivo e quello oggettivo è che, mentre tale scelta è per il primo libera e arbitraria, per il secondo può in sol modo essere giusta. Per questo, la nostra impostazione consisterebbe nell'artificio di considerare, insieme all'unica valutazione di probabilità obbiettivamente giusta, anche quelle che, pur essendo errate, non sono per se stesse contraddittorie. Per le ragioni sopra brevemente accennate, appare chiaramente come la distinzione introdotta, anche a non volerne considerare che l'aspetto formale di utile accorgimento d'impostazione, giustifichi pienamente l'interesse della presente ricerca.

<sup>1)</sup> Cf. la mia nota *Problemi determinati e indeterminati nel calcolo delle probabilità*, „Rend. R. Acc. Naz. Lincei“, 1930, 2° sem.

# Bruno de Finetti

- Nasce a Innsbruck nel 1906
- 1927 laurea in Matematica applicata a Milano
- 1927-1931 lavora presso l'Istituto Centrale di Statistica
- 1931, trasferimento a Trieste presso le Assicurazioni Generali
- Vari incarichi all'Università di Padova e all'Università di Trieste
- 1946 cattedra di Matematica finanziaria all'Università di Trieste
- 1954 trasferimento all'Università di Roma
- 1961 cattedra di Calcolo delle probabilità
- Muore a Roma nel 1985

## de Finetti 1931, *Sul significato soggettivo della probabilità*

Scopo del presente lavoro è di chiarire e approfondire il significato e il valore psicologico che hanno – prescindendo da ogni loro eventuale possibile interpretazione oggettiva – il concetto di probabilità e i fondamenti della teoria delle probabilità, e di provare come questa si possa dedurre e ricostruire con tutto rigore basandosi esclusivamente su tale interpretazione e impostazione psicologica. (...)

Una delle maggiori difficoltà per accettare una concezione estremamente soggettivistica come questa sta certo infatti nell'impressione che se tutto è soggettivo tutto debba essere arbitrario e nessuna legge possa valere. Non v'è, a tale obiezione, risposta più convincente che quella dei fatti, che presto raggiungeremo: quella cioè consistente nel provare che tutto il calcolo delle probabilità si può costruire, seguendo tale punto di vista, con tutto rigore.

de Finetti 1931, *Sul significato soggettivo della probabilità*

Si tratta ora di misurare la probabilità soggettiva, ossia di tradurre nella determinazione di un numero il nostro grado di incertezza relativamente ad un dato giudizio; è questo il primo problema che ci si presenta volendo fondare il calcolo delle probabilità secondo la concezione soggettivistica. (...)

Per misurare numericamente il grado di fiducia che un dato soggetto  $O$  sente di avere nell'avverarsi di un evento  $E$  dobbiamo supporre (...) che egli potesse esser obbligato a tenere un banco di scommesse pro o contro un certo numero di eventi, fra cui l'evento  $E$ . Pensiamo, per dare un esempio, che si tratti di una gara cui partecipano  $n$  concorrenti, e gli eventi  $E_1, E_2, \dots, E_n$  su cui  $O$  è impegnato ad accettare le scommesse siano la vittoria del concorrente numero  $1, 2, \dots, n$ .

de Finetti 1931, *Sul significato soggettivo della probabilità*

Le regole della scommessa siano fissate nel modo seguente: è in facoltà del soggetto  $O$  che tiene il banco di stabilire il prezzo  $p$  di un buono, o obbligazione, che dà diritto a riscuotere una lira nel caso che un dato evento  $E$  si verifichi; ciò fatto, egli si impegna a vendere o comprare a tale prezzo quanti di tali buoni il pubblico vorrà. (...)

Il numero  $p$  è evidentemente tanto più grande quanto maggiore è la fiducia di  $O$  nell'avverarsi di  $E$ :

de Finetti 1931, *Sul significato soggettivo della probabilità*

per lo stesso guadagno di una lira si potrà accettare una condizione tanto più gravosa, e cioè un prezzo  $p$  tanto più elevato, quanto più se ne spera probabile la vincita, e cioè quanto più sembra probabile l'evento  $E$ . E diremo allora per definizione il numero  $p$ : "probabilità dell'evento  $E$  secondo il soggetto  $O$ ". Quando ci s'intenda riferire sempre a uno stesso determinato soggetto, o quando tutti gli individui che si vogliono considerare avessero la medesima opinione, l'indicazione del soggetto potrà essere sottintesa, e si potrà parlare semplicemente della "probabilità dell'evento  $E$ ".

de Finetti 1931, Sul significato soggettivo della probabilità

Può sembrare infatti che nell'atto di stabilire le condizioni di una scommessa influiscano su di noi piuttosto l'amore e il timore del rischio o simili circostanze del tutto estranee (...). Ciò sarebbe evidentemente vero se se si trattasse di fare una scommessa singola e ben determinata; non lo è più invece se ci mettiamo nelle condizioni supposte; di un individuo che debba tenere un banco di scommesse su dati eventi, accettando alle stesse condizioni qualunque scommessa nell'uno o nell'altro senso.

de Finetti 1931, *Sul significato soggettivo della probabilità*

Vedremo che egli è costretto allora a rispettare certe restrizioni, che sono i teoremi del calcolo delle probabilità. Altrimenti egli pecca di coerenza, e perde sicuramente, purché l'avversario sappia sfruttare il suo errore.

Un individuo che non commette un tale errore, che valuta cioè delle probabilità in modo da non mettere in grado i competitori di vincere a colpo sicuro, lo diremo coerente. E il calcolo delle probabilità non è allora se non la teoria matematica che insegna ad essere coerenti.

## de Finetti 1931, *Sul significato soggettivo della probabilità*

Precisiamo questi concetti matematicamente. Riferiamoci da prima, per fissare le idee, ad un esempio, e cioè all'esempio già sopra accennato di una gara. Fra i concorrenti ve ne siano due di italiani, e precisamente i concorrenti A e B. Quale è la probabilità di una vittoria italiana? Si tratta di dimostrare il teorema delle probabilità totali. L'evento "vittoria italiana" è la somma logica dei due eventi incompatibili "vittoria del concorrente A" e "vittoria del concorrente B"; si verifica, in altre parole, quando e sol quando si verifica l'una o l'altra di queste due ipotesi, che si escludono a vicenda. Il teorema delle probabilità totali dice allora che la probabilità  $p$  di una vittoria italiana è la somma delle probabilità  $p_A$  e  $p_B$  della vittoria di A e rispettivamente di B, ossia  $p=p_A+p_B$ . Si vede facilmente come tale conclusione scenda immediatamente dal concetto ora spiegato della coerenza.

de Finetti 1931, *Sul significato soggettivo della probabilità*

Nel caso precedente, ogni individuo che attribuisca alle probabilità  $p_A$ ,  $p_B$ ,  $p$  dei valori non negativi e non superiori ad 1 e tali che  $p_A + p_B = p$  è coerente; tutte le  $\infty^2$  opinioni diverse soddisfacenti queste restrizioni sono per se stesse ugualmente legittime. Di modo che il valore della probabilità è soggettivo (...), e tuttavia le leggi di calcolo sono pienamente determinate (qui: il teorema delle probabilità totali).

de Finetti 1931, *Sul significato soggettivo della probabilità*

Un evento  $E$  è una proposizione, un'affermazione, che non sappiamo ancora se sia vera o falsa; come casi limite si possono considerare l'evento certo e l'evento impossibile. (...) Formalmente, il problema che ci siamo posti è il seguente. L'opinione di un individuo, lo stato d'animo in cui si trova nell'attesa di certi eventi futuri, è caratterizzato dalle probabilità che egli loro attribuisce, e cioè, detta  $P(E)$  la probabilità con cui egli attende il verificarsi dell'evento  $E$ , da una funzione numerica  $P(E)$  degli eventi  $E$  dell'insieme che egli considera. Si debbono caratterizzare analiticamente quelle funzioni  $P(E)$  che corrispondono a stati d'animo coerenti e cioè a valutazioni di probabilità non intrinsecamente contraddittorie.

de Finetti 1931, *Sul significato soggettivo della probabilità*

Valutare la probabilità dell'evento E uguale a p significa, per chi tiene il supposto banco di scommesse, dichiararsi disposto ad accettare ogni scommessa con un competitore qualunque che è libero di fissare a suo piacimento la puntata S (positiva o negativa) in modo che il guadagno G (positivo o negativo) del competitore risulti

$$G(E) = (1-p) S$$

$$G(-E) = -p S$$

nei due casi E e - E, e cioè nell'ipotesi che l'evento E si verifichi o rispettivamente non si verifichi.

de Finetti 1931, *Sul significato soggettivo della probabilità*

Un individuo è coerente nel valutare la probabilità di certi eventi se, qualunque gruppo di puntate  $S_1, S_2, \dots, S_n$  un competitore faccia su un insieme qualunque di eventi  $E_1, E_2, \dots, E_n$  fra quelli che egli ha considerato, non è possibile che il guadagno  $G$  del competitore risulti in ogni caso positivo.

Quando si tratti di scommesse su un unico evento  $E$ , si vede subito che condizione necessaria e sufficiente per la coerenza è di attribuire a  $P(E)$  un unico valore non negativo e non maggiore di 1. Se in particolare l'evento  $E$  è certo o impossibile, allora è necessario, per la coerenza, valutarne la probabilità uguale rispettivamente a 1 o a 0. (...)

Passiamo a dimostrare il teorema delle probabilità totali.

de Finetti 1931, *Sul significato soggettivo della probabilità*

C'è però anche un altro metodo: quello di studiare il problema indipendentemente da ogni sistema di coordinate, per via assiomatica e intrinseca. E' questo anzi il metodo più conclusivo, ed esso seguiremo qui per mettere più chiaramente in luce qual è la proprietà qualitativa fondamentale su cui tutto il calcolo delle probabilità si basa. (...) Supponiamo acquisita la nozione della relazione "è non meno probabile di" tra eventi; e indichiamo colla notazione  $E' \geq E$  la frase (proposizione) "E' è non meno probabile di E".

de Finetti 1931, Sul significato soggettivo della probabilità

La relazione “ $\geq$ ” soddisfa i postulati seguenti:

- 1) Dati due eventi  $E'$ ,  $E''$  è sempre  $E' \geq E''$  oppure  $E'' \geq E'$ ; se è insieme  $E' \geq E''$  e  $E'' \geq E'$  si scrive  $E' \cong E''$ , e si dice che  $E'$  e  $E''$  sono identicamente probabili (...); se è  $E' \geq E''$  ma non  $E'' \geq E'$  si scrive  $E' > E''$ ;
- 2) se  $A$  è un evento certo e  $B$  un evento impossibile, per ogni evento  $E$  possibile (né certo né impossibile) si ha  $A > E > B$ ;
- 3) Se si ha  $E' \geq E$ ,  $E \geq E''$ , è anche  $E' \geq E''$  (proprietà transitiva); ne scende in modo ovvio che  $E' \cong E$ ,  $E \cong E''$  implica  $E' \cong E''$ ;
- 4) Se  $E_1$  e  $E_2$  sono due eventi incompatibili con un evento  $E$ , ed è  $E_1 \geq E_2$  è anche  $E + E_1 \geq E + E_2$  e inversamente.

## de Finetti 1931, *Sul significato soggettivo della probabilità*

Perché le considerazioni ora svolte possano effettivamente costituire un metodo su cui fondare il calcolo delle probabilità, non rimane a questo punto che chiarirne il valore e il significato psicologico, e mostrare che, per questo stesso significato, quelli che abbiamo assunti ora come postulati sono delle asserzioni che dobbiamo effettivamente ritenere soddisfatte da un individuo coerente. (...)

Possiamo ora ritornare alla definizione primitiva, basata sulla speranza matematica. Le ricerche degli ultimi numeri hanno rimosso i dubbi che essa poteva sollevare: abbiamo visto infatti che delle condizioni qualitative di significato immediato e manifestamente rispondenti al concetto intuitivo della probabilità conducono a una definizione perfettamente equivalente.

## de Finetti 1938, *Probabilisti di Cambridge*

Caratteristica delle correnti di cui voglio parlare e cui aderisco è dunque, ripetendo e precisando, la concezione della teoria della probabilità come un ramo della logica, non in uno dei significati in certo senso limitati o manchevoli finora citati, ma nel senso intuitivo e totalitario di “logica del modo di ragionare sui giudizi di probabilità, di plausibilità, di verosimiglianza”. Logica quindi veramente nuova, in quanto si occupa di un campo del quale la logica ordinaria non conosce neppure l’esistenza, (...) si occupa sempre delle usuali proposizioni, solo determinando il grado di incertezza di cui sono affette in un dato momento in cui non disponiamo dei dati sufficienti per decidere se sono vere o false.

## de Finetti 1938, *Probabilisti di Cambridge*

Uno dei punti su cui Keynes insiste è il fatto che la probabilità di un evento non ha senso se non relativamente a un certo stato di conoscenze, che egli usa perciò sempre indicare esplicitamente. (...)

Per meglio insistere su tale punto il Keynes preferisce addirittura parlare non della probabilità di un evento ma dell'affermazione che esso abbia a verificarsi (...), e certo l'idea che la probabilità non esiste nel mondo dei fatti concreti ma nel regno dell'astratto pensiero umano, fondamentale anche a mio modo di vedere, risulta in tal modo consacrata anche esteriormente. Però, una volta specificato tale significato nella definizione di probabilità, mi sembra una complicazione superflua usare sempre una circonlocuzione che complica la frase, al solo scopo di ricordarlo.

## de Finetti 1938, *Probabilisti di Cambridge*

Ora, dicendo che la prob. è soggettiva io intendo appunto significare che la sua valutazione può differire a seconda di chi la giudica, dipendendo da differenze mentali fra diversi individui, e inversamente non vedo come, ammettendo tale dipendenza, la prob. si possa dire oggettiva. Per lo meno occorrerebbe caratterizzare univocamente qual è l'individuo "infallibile", e ciò non è detto. L'analogia col campo della logica e della matematica è un'immagine priva di contenuto finché si afferma che una sola delle opinioni è giusta, ma non si dà un criterio per decidere quale sia; nel campo della logica questo criterio c'è; ivi infatti si pongono da principio delle convenzioni, ed è poi nel giusto chi le segue.

de Finetti 1939, *Punti di vista: Emile Borel*

Volendo scegliere in modo alquanto tendenzioso dei passi del Borel potrei forse anche far apparire come completo l'accordo fra i rispettivi punti di vista, ma esistono altri passi ispirati a visuali contrastanti, e non mi è ben chiaro se essi rivelino nel Borel un punto di vista univocamente precisato e in parte in opposizione con quello soggettivo, o piuttosto un certo eclettismo, forse inconscio, forse anzi ritenuto necessario pensando che nel campo delle probabilità la rigida coerenza in una concezione ben definita significhi piuttosto unilateralità e risulti di ostacolo al buon senso.

## de Finetti 1939, *Punti di vista: Emile Borel*

Stabilita dunque la probabilità di un caso singolo che è “définie pour un individu déterminé” (p.105), il Borel si comincia a scostare dalla concezione soggettiva colle due osservazioni che aggiunge subito dopo: l’introduzione delle probabilità oggettive, definite “comme celles dont la valeur est la même pour un certain nombre d’individus également bien informés sur les conditions de l’événement aléatoire”, e l’ammissione della possibilità di una verifica mediante l’osservazione (quando l’evento si può ripetere nelle stesse condizioni) della frequenza su un gran numero di prove.

## de Finetti 1939, *Punti di vista: Emile Borel*

Sul primo punto non so se vi siano da fare obiezioni sostanziali o se si tratti di questioni di parole. Se, dicendo “oggettiva”, si vuol proprio dire “valutata nello stesso modo da un certo numero d’individui”, e null’altro, non si potrebbe che discutere l’opportunità della denominazione. (...)

A un certo punto poi (p.98) il Borel sembra ammettere, oltre quelle di probabilità soggettiva e oggettiva, ancora una terza nozione: la “probabilità reale”; non ne trovo la definizione, e non riesco a immaginare di che cosa potrebbe trattarsi.

## de Finetti 1939, *Punti di vista: Emile Borel*

### **La probabilità di un caso singolo**

Quanto al secondo punto, mi sembra invece chiaro che, sia pure in forma attenuata in confronto a molti altri Autori, anche il Borel finisce per cader vittima dell'equivoco accostamento di probabilità e frequenza (...).

Cercando però, anzitutto, di individuare la breccia attraverso cui nella concezione finora coerentemente soggettivistica poté insinuarsi il germe di un punto di vista che non mi sembra conciliabile, dobbiamo risalire alla spiegazione di ciò che intende il Borel per "caso singolo". Troviamo a p.101 la distinzione fra esperienze che si possono o non si possono ripetere seguita da questo commento:

## de Finetti 1939, *Punti di vista: Emile Borel*

### **La probabilità di un caso singolo**

“Nous négligeons l’argument métaphysique d’après lequel deux expériences ne sauraient jamais être la même, sinon elles se confondraient en une seule; du point de vue pratique, nous devons admettre que deux coups de dés lancés dans des conditions analogues constituent la même expérience”. Qui l’opposizione col mio modo di vedere è netta: io direi che ogni evento è un caso singolo, e ciò non tanto perché in pratica esistono sempre delle circostanze differenziatrici per riguardo alla probabilità con cui può verificarsi (...), quanto specialmente per il motivo che è impossibile dare un senso alla distinzione tra circostanze differenziatrici che hanno o non hanno importanza per la valutazione della probabilità (...).

## de Finetti 1939, *Punti di vista: Emile Borel*

### **La probabilità di un caso singolo**

Due colpi di dadi lanciati in condizioni analoghe differiranno pur sempre per molte circostanze (come l'ora, il luogo, la temperatura, la persona che ha effettuato il lancio e quelle che assistevano, le loro posizioni e i loro stati d'animo, ecc.), oltre che, ad ogni modo, per il fatto stesso che delle due prove una è la prima e l'altra la seconda. Che queste particolarità non abbiano importanza per la valutazione della probabilità può significare soltanto che, nel fatto, l'individuo o il gruppo d'individui delle cui opinioni ci occupiamo non modifica al variare di esse la probabilità attribuita a tali eventi (in quanto casi singoli);

## de Finetti 1939, *Punti di vista: Emile Borel*

### **La probabilità di un caso singolo**

per quanto spontaneo, evidente, naturale, un tale atteggiamento ci appaia, non potremo però mai rovesciare il ragionamento e dire che un individuo deve considerare ugualmente probabili questi casi singoli perché essi sono “identici” (...).

Al contrario di quanto pensa il Borel, direi pertanto che è l’affermazione dell’identità di certi eventi che costituisce un “argument metaphysique”, e che infirma di conseguenza le concezioni che ne dipendono;

## de Finetti 1939, *Punti di vista: Emile Borel*

la constatazione opposta della diversità (o almeno “distinguibilità”) di tutti gli eventi, non solo non mi sembra tacciabile di “metafisica”, ma neppure costituisce un “argomento” di cui la concezione soggettiva abbia bisogno per trarre certe conclusioni: è solo il rifiuto di elevare ad argomento a priori (e di trarne conclusioni giudicate erronee) certe ragioni di analogia che vanno invece analizzate e discusse caso per caso nel loro nesso colle opinioni dei diversi individui.

In tal modo cade addirittura il presupposto logico per la possibilità di impostare il confronto tra probabilità e frequenza nel modo usuale, che è anche quello prospettato dal Borel; (...).