XXIX Convegno UMI-CIIM
Cetraro 21-22 ottobre 2010

Il *Liber abaci*

Schede di lavoro a cura di R. Petti

Il Giardino di Archimede.
Un Museo per la Matematica

Il *Liber abaci*: schede di lavoro

Introduzione

Per una introduzione agli argomenti trattati e per una descrizione e approfondimento degli aspetti matematici si rimanda a E. Giusti, *Matematica e commercio nel Liber Abaci*, in *Un ponte sul Mediterraneo. Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente* ed. Polistampa, Firenze, 2002. *Disponibile anche in versione online, consultabile sul sito del Museo Il Giardino di Archimede (www.archimede.ms). L'indirizzo del saggio è attualmente: http://php.math.unifi.it/archimede/archimede/fibonacci/catalogo/catalogo.php*

Queste schede di lavoro si dividono in due parti. Nella prima parte si presentano gli algoritmi per l'esecuzione delle operazioni aritmetiche nella notazione posizionale indo-arabica che si trovano nei primi sette capitoli del Liber abaci, *integrandoli con altri algoritmi.*

Nella seconda parte raccogliamo invece una scelta di problemi tratti dai capitoli 8-13 e 15. Di ciascun problema riportiamo il testo tratto dall'edizione del Liber abaci *curata da Boncompagni, una libera traduzione e una soluzione che segue quella proposta da Leonardo Pisano.*

Notazione. Per evitare ambiguità abbiamo utilizzato sempre la notazione attuale per le frazioni. Così quello che nel *Liber abaci* compare come $\frac{1}{6}20$ diventa per noi $20+\frac{1}{6}$. Nei rotti infilzati, quel che nel *Liber abaci* si scrive $\frac{6}{11}\frac{6}{12}\frac{14}{20}47$ si trascrive per noi come $47+\frac{14}{20}+\frac{6}{20\cdot 12}+\frac{6}{11\cdot 12\cdot 20}$.

Indice

1 L'aritmetica nel *Liber abaci*

1.1 Addizione

I procedimenti di addizione fra numeri scritti nel nostro sistema di rappresentazione sono tutti molto simili tra loro. Si tratta di sommare le cifre corrisponenti agli stessi ordini decimali e riportare eventuali decine all'ordine superiore. Nei trattati arabi e nei primi trattati d'abaco medievali, la somma veniva scritta generalmente al di sopra degli addendi, invece che al di sotto come oggi usuale. Proprio dal fatto che il risultato si trovava al livello più alto (summus in latino) deriva la parola “somma”.

Ecco un esempio dal Liber Abaci. Per trovare la somma tra 25 e 49 si scrivono i due numeri in colonna, unità sotto unità e decine sotto decine. Si somma il 9 con il 5, che fa 14: il 4 si scrive sopra la colonna delle unità e l'1 si “tiene in mano” e si somma con il 4 e il 2 delle decine; si ottiene 7 che si scrive sopra la colonna delle decine. Si legge il risultato: 74.

74
25
49

Se si sommano quantità non decimali il procedimento è lo stesso, ma il riporto va effettuato in maniera opportuna. Ad esempio, fra le unità monetarie, abbiamo lire, soldi e denari; una lira vale 20 soldi e 1 soldo 12 denari. Per sommare 4 lire 8 soldi e 6 denari con 3 lire 13 soldi e 7 denari, procedo così. Sommo i denari: 6 e 7 fa 13 denari, cioè 1 soldo e 1 denaro; scrivo 1 denaro e riporto 1 soldo. Sommo i soldi: 13 + 8 + 1 fa 22 soldi, cioè 1 lira e due soldi; scrivo 2 soldi e riporto 1 lira. Sommo le lire: 3 + 4 + 1 fa 8.

8 lire	2 soldi	1 denari
4 lire	8 soldi	6 denari
3 lire	13 soldi	7 denari

1.2 Sottrazione

Il procedimento della sottrazione prevede l'incolonnamento dei due numeri e la sottrazione cifra per cifra in ciascuna colonna. Alcuni metodi presentano delle differenze rispetto al nostro usuale, soprattutto quando la cifra da sottrarre è maggiore dell'altra.

Un esempio dal Liber abaci, che differisce dal nostro nel tener conto del prestito: $85 - 39$. Si scrivono i due numeri in colonna. Si deve togliere 9 da 5, che è impossibile. Si aggiunge allora 10 a 5, fa 15, da qui si toglie 9: rimane 6 che si scrive in alto (come nella somma). Per il 10 che si è aggiunto si tiene 1 in mano e si aggiunge a 3; fa 4, il 4 si toglie da 8, fa 4 che si scrive in alto.

46

85

39

Un diverso procedimento prevede di calcolare il complemento a 10 della cifra da sottrarre. Ecco un esempio dalla Summa di Pacioli. Per calcolare $8621 - 6432$ si scrivono i due numeri in colonna. Si dovrebbe sottrarre 2 da 1, che non si può fare. Si calcola allora "quel che manca a andare in 10" da 2, cioè 8; l'8 si somma con l'1, fa 9 che si scrive sotto e si tiene a mente che si è già "fornito una decina, le quali sempre in queste pratiche si tengono a mente" e questa decina si aggiunge alle 3 che seguono, e fa 4. Ora si deve togliere 4 da 2, e non si può fare. Si calcola allora quel che manca al 10, 6, e si aggiunge al 2: 8, che si scrive. Il 4 diventa 5; si calcola $6 - 5$ e si scrive 1. Si calcola infine $8 - 6$ e si scrive 2.

8621

6432

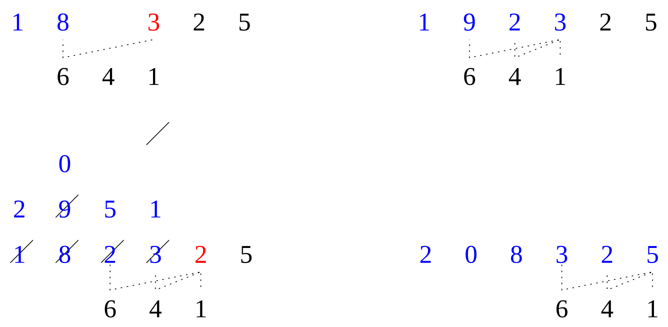
2189

1.3 Moltiplicazione

Fra le operazioni aritmetiche, la moltiplicazione è quella che presenta una maggior varietà di algoritmi. Nel *Liber abaci* se ne trovano due, qui indicati come "per crecetta" e "per quadrilatero". Accanto a questi ne presentiamo vari altri, alcuni risalgono all'introduzione del sistema di numerazione indo-arabico e ai libri d'abaco e di aritmetica pratica, prima e dopo il *Liber abaci*, altri invece hanno origine varia.

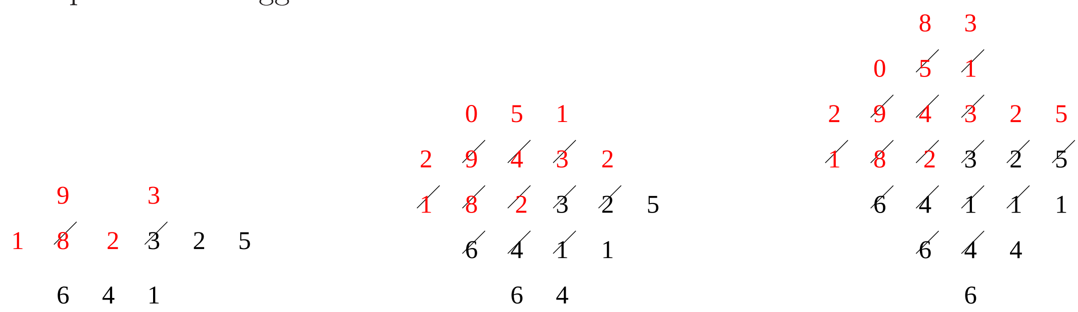
1.3.1 Moltiplicazione con sostituzione

Presso gli indiani i calcoli venivano eseguiti su tavolette ricoperte di sabbia, dove cifre e segni potevano essere facilmente cancellati e riscritti. Molti algoritmi, anche presso gli arabi, utilizzano questa caratteristica che il supporto cartaceo non ha. Esempio: 325x641. Si dispongono i fattori uno sopra l'altro come in figura. Fase 1: si inizia moltiplicando il 3 rispettivamente per 6, 4, 1, e scrivendo in alto, in corrispondenza dei secondi fattori, i risultati, eventualmente correggendo i risultati parziali se intervengono i riporti; conclusi questi prodotti si cancella il 3. Fase 2: si trasla il 641 di un posto verso destra e si procede con i prodotti del 2 per 6, 4, 1, sommando con i risultati già presenti dal passo precedente; conclusi questi prodotti si cancella il 2. Fase 3: si trasla il 641 di un posto verso destra e si procede con i prodotti del 5 per 6, 4, 1. Nella riga superiore si legge il risultato: 208325. Queste alcune delle successive fasi sulla tavoletta:



1.3.2 Moltiplicazione senza sostituzione

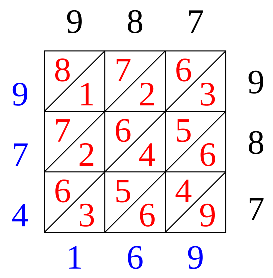
Introdotto già nei primi testi arabi (es. al-Uqlidisi ca. 950): il modo di procedere è essenzialmente lo stesso della moltiplicazione con sostituzione, ma invece di sostituire un determinato valore sovrascrivendoci, questo viene barrato e il nuovo valore si scrive vicino. Si tratta di un procedimento più adatto al supporto cartaceo, in cui rimane traccia dei vari passaggi.
Esempio: 325x641. Si dispongono i fattori uno sull'altro come in figura. Fase 1: si inizia moltiplicando il 3 rispettivamente per 6, 4, 1, (barrando queste cifre via via che si sono moltiplicate) e scrivendo in alto i risultati, eventualmente correggendo i risultati parziali se intervengono i riporti; conclusi questi prodotti si barra il 3. Fase 2: si trasla il 641 di un posto verso destra e si procede con i prodotti del 2 per 6, 4, 1, sommando con i risultati già presenti dal passo precedente e scrivendo i nuovi parziali al di sopra dei vecchi; conclusi questi prodotti si barra il 2. Fase 3: si trasla il 641 di un posto verso destra e si procede con i prodotti del 5 per 6, 4, 1. Si legge il risultato: 208325. Ecco la riproduzione dei vari passi: all'inzio compariranno solamente le cifre della prima riga, a conclusione del procedimento tutte quelle che si leggono nell'ultima.



1.3.3 Moltiplicazione per gelosia

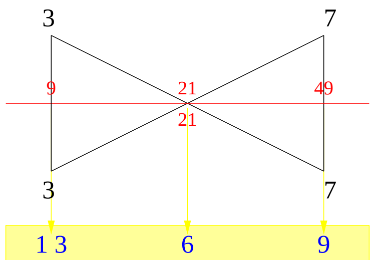
È usato dagli arabi a partire dal XIII secolo. Molto diffuso in trattati d'abaco.

Procedimento: si disegna una griglia di m quadretti per n quadretti, dove m e n sono il numero di cifre del primo e del secondo fattore. Ogni quadretto è diviso in due triangoli tracciando una diagonale. Si dispongono i due fattori attorno alla griglia (vedi figura). In ogni quadretto si inserisce il risultato del prodotto delle cifre dei fattori che identificano la riga e la colonna del quadretto stesso, ponendo le unità nel triangolo basso, le decine in quello alto. Per ottenere il risultato si somma lungo le diagonali a iniziare da destra, con eventuali riporti nella diagonale successiva. Esempio (dalla Summa di Luca Pacioli): 987x987.

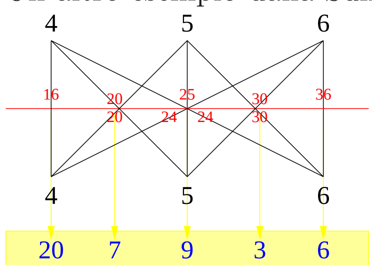


1.3.4 Moltiplicazione per crocetta o casella

Si scrivono i due fattori incolonnati spaziando un po' le cifre; si uniscono a due a due le cifre in alto con quelle in basso: questo creerà una serie di "incroci"; si considerano le intersezioni con la linea mediana (in rosso); moltiplicando n cifre per m cifre gli incroci intersecano la linea mediana in n+m-1 punti; in corrispondenza di ciascuno di questi punti si considerano i prodotti delle cifre agli estremi dei segmenti che convergono in quel punto (in rosso nell'esempio) e si scrive sotto ogni incrocio la cifra delle unità del numero che si ottiene sommando i prodotti di quell'incrocio (in blu nell'esempio); le decine si riportano al punto successivo. Ecco un esempio (dalla Summa di Luca Pacioli): 37 per 37.

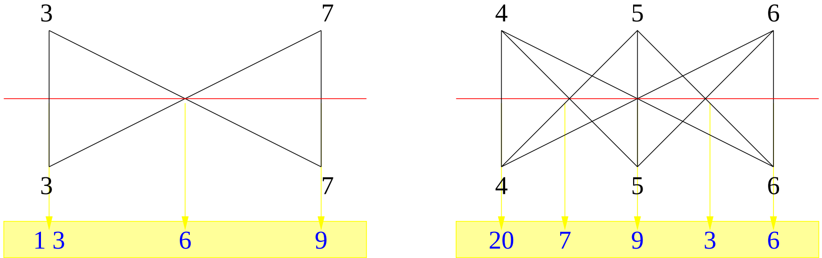


Un altro esempio dalla Summa: 456 per 456.



Si noti che nel procedimento descritto nei libri d'abaco i prodotti parziali non si scrivono:

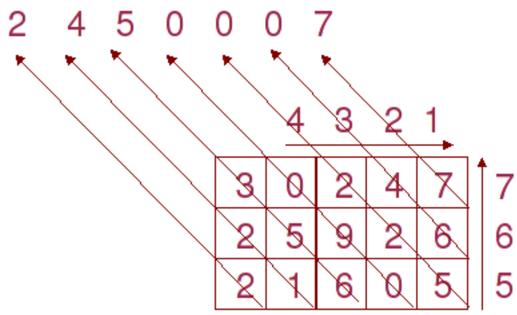
tutti i calcoli si eseguono mentalmente e si scrive direttamente il risultato. Per questo è detta anche "fulminea".



1.3.5 Moltiplicazione per quadrilatero

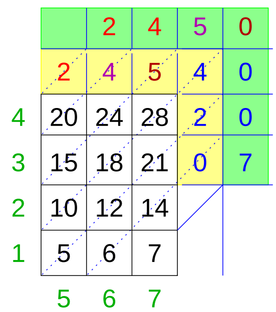
Nel Liber abaci viene presentata come alternativa più semplice ad un procedimento di tipo crocetta: "Est enim alius modus valde laudabilis, maxime in multiplicandis magnis numeris"

Procedimento: si disegna una scacchiera di m+1 quadretti per n quadretti, dove m e n sono il numero di cifre del primo e del secondo fattore. Si dispongono i due fattori attorno alla griglia (vedi figura). In corrispondenza di ogni quadretto si inserisce il risultato del prodotto delle cifre dei fattori che identificano la riga e la colonna del quadretto stesso, ponendo le unità nel quadrato e riportando le decine in quello alla sua sinistra. Per ottenere il risultato si sommano i quadretti lungo le diagonali (con eventuali riporti) iniziando da destra in alto, come in figura. Esempio di Fibonacci: 4321x567:



1.3.6 Variante della moltiplicazione per quadrilatero

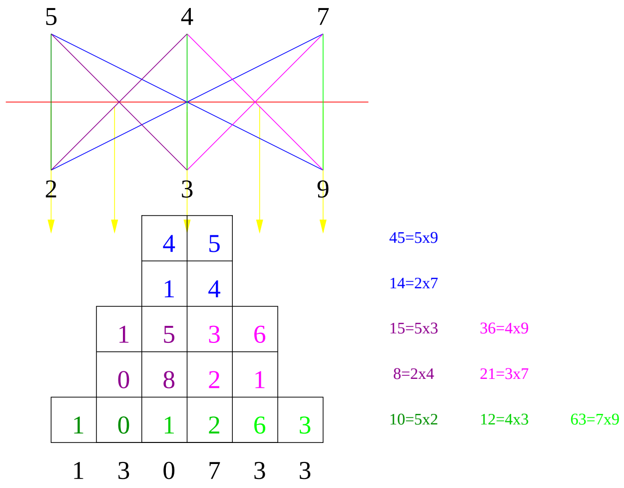
Come nella moltiplicazione per quadrilatero si costruisce una scacchiera e si dispongono i due fattori intorno alla griglia (in verde). In corrispondenza di ogni quadretto si inserisce il risultato del prodotto delle cifre dei fattori che identificano la riga e la colonna del quadretto stesso, unità ed evenutali decine (in nero). I riporti si eseguono nelle somme finali che si calcolano in diagonale e si scrivono nelle fasce attorno al quadrilatero: la gialla per le decine, la verde per le unità. Nell'esempio 4321 $\times$ 567, iniziando da destra in basso, si riporta il numero 7 come 0 nella fascia gialla e 7 in quella verde. Poi si sommano 6 e 14 e il risultato, 20 si scrive ancora nelle due fasce. Nella somma successiva a $5+12+21$ si deve aggiungere anche il 2 della fascia gialla. Si scrive il 40 (in blu, come le somme precedenti). $10+18+28+4$ dà 50 che inserisco ancora (in marrone) nelle fasce colorate occupando le caselle a disposizione. Proseguo con $15+24+15$ scrivendo 45 (in viola) e con $20+4$ che dà 24 (in rosso). Come ultimo passaggio riporto il 2 del 24 nella fascia verde. Qui leggo ora il risultato: 2450007.



1.3.7 Moltiplicazione a piramide

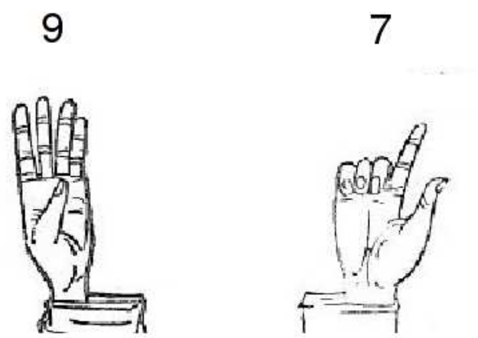
Il nome di questo algoritmo deriva dalla forma assunta dall'incolonnamento dei risultati parziali; ad ogni passo infatti si ottengono risultati parziali la cui lunghezza aumenta di due cifre e tali risultati vanno incolonnati centrati, così da ottenere una forma triangolare, ossia una “piramide”. Come si vedrà è essenzialmente un procedimento a crocetta in cui però i prodotti incrociati vengono eseguiti e scritti in un ordine tale da non dover eseguire riporti, ma solo una somma finale.

Per comodità è bene pensare i due fattori con lo stesso numero di cifre (eventualmente completando con degli zeri) e scriverli uno sotto l'altro. I parziali si ottengono moltiplicando in croce cifre del primo con cifre del secondo fattore. Al primo passo ottengo due parziali di due cifre moltiplicando in croce le cifre estreme dei due fattori (la prima cifra del primo fattore con l'ultima del secondo e la prima del secondo con l'ultima del primo). Al secondo passo si ottengono due parziali di quattro cifre, il primo moltiplicando la prima e la seconda cifra del primo fattore rispettivamente (e separatamente) con la penultima e l'ultima del secondo fattore, e il secondo parziale simmetricamente moltiplicando la prima e la seconda cifra del secondo fattore rispettivamente (e separatamente) con la penultima e l'ultima del primo fattore. Al terzo passo si moltiplicaranno in croce le prime tre cifre di un fattore con le ultime cifre dell'altro e viceversa, e così si andrà avanti fino a prendere tutte le cifre del primo e del secondo, ottenendo l'ultimo parziale. Dopo aver disposto i parziali a formare in triangolo, il risultato si ottiene sommando in colonna. Nell'esempio si vede il prodotto di 547 per 239 e a destra i passi per ottenenere i parziali.



1.3.8 Moltiplicazione con le dita

Fin dal mondo greco-romano le mani venivano utilizzate per rappresentare numeri e aiutarsi nei conteggi. Quello che segue è un piccolo trucco che consente di ridurre la conoscenza delle tabelline al 5x5. Vediamo un esempio. Per moltiplicare 7 per 9, indichiamo su una mano le unità in eccesso del 7 rispetto al 5 e sull'altra quelle del 9 rispetto a 5. Sommiamo poi le dita alzate sulle due mani, 2 e 4, e otteniamo la cifra delle decine, cioè 6. Moltiplichiamo fra loro i due numeri che rappresentano le dita che non abbiamo alzato, cioè 3 e 1, e otteniamo la cifra delle unità del nostro prodotto, cioè 3. Questo metodo funziona per tutti i numeri compresi fra 5 e 9 (in alcuni casi dal prodotto otteremo un numero di due cifre: le decine vanno allora sommate alle decine già ottenute).



Come mai funziona? Siano a e b i due numeri da moltiplicare fra loro, entrambi compresi fra 5 e 9. Le dita alzate sono $(a-5)$ e $(b-5)$, e le dita piegate sono

$$5-(a-5)=10-a$$

$$5-(b-5)=10-b$$

Se sommiamo ora le dita alzate otteniamo le decine del prodotto:

$$(a-5)+(b-5)=a+b-10$$

Le cifre delle unità sono invece

$$(10-a)\times(10-b)=100+a\times b-(10\times(a+b)).$$

Il prodotto richiesto si può quindi scrivere

$$(a+b-10)\times 10+100+a\times b-(10\times(a+b))$$

Semplificando

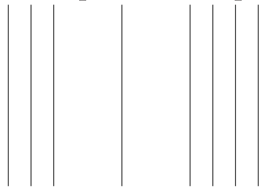
$$(a+b-10)\times 10+100+a\times b-(10\times(a+b))=$$
$$10a+10b-100+100+a\times b-10a-10b=a\times b.$$

Il procedimento si può estendere ad esempio ai numeri compresi tra 10 e 14, trovando le unità in eccesso rispetto al 10: si alzano $(a-10)$ dita su una mano e $(b-10)$ sull'altra, si sommano le dita alzate per avere la cifra delle decine e si moltiplicano fra loro le stesse dita per avere la cifra delle unità. Otteniamo in questo modo il prodotto meno 100.

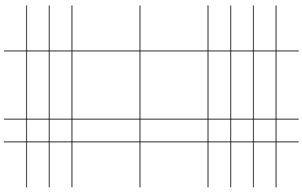
1.3.9 Moltiplicazione con il metodo grafico degli incroci

Il prodotto di 3×4 si può rappresentare graficamente facendo incrociare tre rette parallele tra loro con altre quattro parallele ad una seconda direzione. Il numero degli "incroci", ossia delle intersezioni, rappresenta il prodotto.

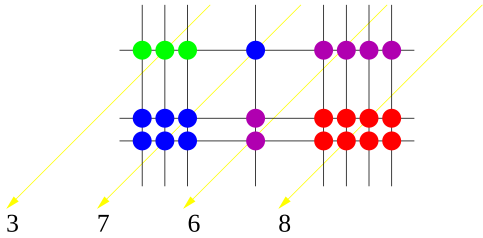
Questo metodo si può estendere ai prodotti fra numeri di più cifre. Se vogliamo ad esempio moltiplicare 314 per 12 rappresenteremo il 314 con gruppi di 3, 1, e 4 rette parallele tra loro.



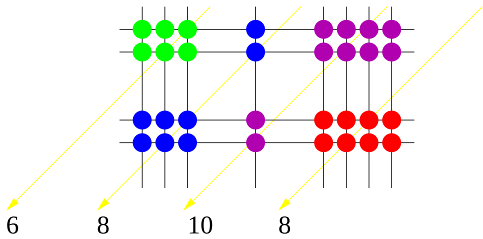
Analogamente, scelta una seconda direzione, il 12 si rappresenterà con gruppi di 1 e 2 rette parallele.



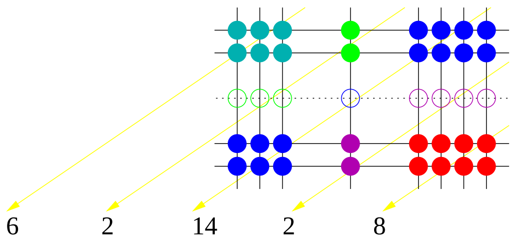
Contiamo le intersezioni. Iniziamo da quelle in basso a destra (in rosso, tra i gruppi di 4 e 2, corrispondenti alle unità): sono 8. Proseguiamo muovendoci a sinistra e in alto prendendo tutti gli adiacenti (in viola): 2 e 4 per un totale di 6. Poi 6 e 1 (in blu), totale 7. Infine 3 (in verde). Risultato: 3768.



Se gli incroci superano la decina, si deve eseguire un riporto. Se ad esempio si moltiplica 314 per 22, l'1 dei 10 incroci viola si riporta a quelli blu. Risultato: 6908.



Se uno dei due numeri contiene uno zero si deve tenerne conto per attribuire al giusto ordine decimale i vari incroci. Se ad esempio si moltiplica 314 per 201, possiamo rappresentare lo zero con una linea tratteggiata: le sue interserzioni con le altre non verranno contate, ma serviranno a assegnare i colori.



1.3.10 Moltiplicazione egizia

Si esegue per mezzo di raddoppi successivi. Esempio: 26×54. Si raddoppia ripetutamente l'1 fermandosi prima di superare il 26; a fianco si raddoppia il 54; a sinistra si considerano le righe con i valori che, sommati, danno 26. Il risultato si ottiene sommando nella colonna del 54 i valori corrispondenti. Totale: 1404.

1	54
2	108
4	216
8	432
16	864
	1404

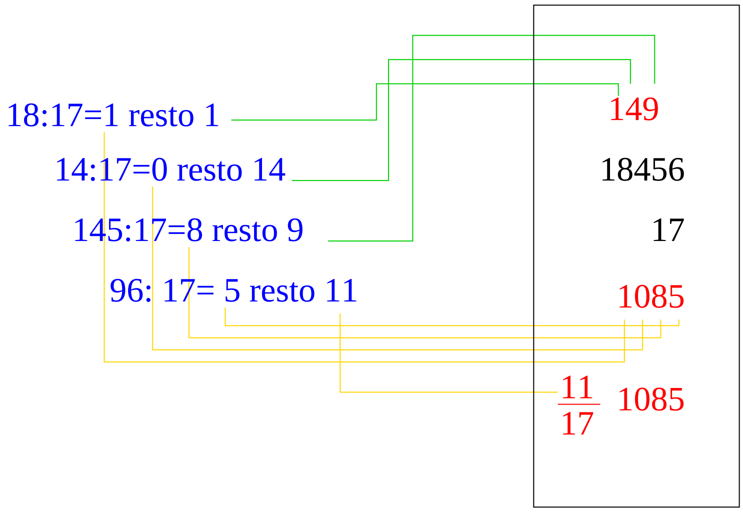
1.3.11 Moltiplicazione alla russa

Si esegue per mezzo di raddoppi e dimezzamenti successivi. Esempio: 83x154. Si dimezza l'83 (considerando i valori interi) e si raddoppia il 154. Si sommano le righe della colonna del 154 corrispondenti a righe dispari nella colonna dell'83. Totale: 12782

83	154
41	308
20	616
10	1232
5	2464
2	4928
1	9856
	12782

1.4 Divisione

Nel Liber abaci la parte dedicata alla divisione spiega come primo passo come dividere per numeri a una cifra. Si passa poi a divisioni per numeri a due cifre. Ecco uno degli esempi proposti: 18456:17. Come nel nostro procedimento si prendono le prime due cifre e si divide 18 per 17. Risultati e resti si scrivono come nello schema; si procede con i numeri che via via si formano con i resti e le successive cifre del dividendo. Per calcolare ad esempio 145:17, che compare in uno dei passaggi, Fibonacci prescrive di portare il 17 a 20 (cioè alla decina più vicina), di calcolare 145:20 facendo 14:2; il 7 che viene, oppure il 7 aumentato di 1 (poiché 17 è più piccolo di 20 e dunque $\frac{1}{17}$ di 145 è più grande di $\frac{1}{20}$ di 145) è la cifra da scrivere; in questo caso 8. Il resto dell'ultimo passaggio si aggiunge al risultato come $\frac{11}{17}$.



2 Problemi dal *Liber abaci*

2.1 Problemi risolti con la regola del tre

Il capitolo 8 tratta dell'acquisto e la vendita delle merci e simili (*De emptione et venditione rerum venalium et similium.*). Contiene numerosi problemi relativi alla trasformazione tra unità di misura diverse che vengono risolti con la regola del tre, per la quale rimandiamo a Giusti, op. cit., p. 83.

2.1.1 Esempi con misure di peso

Ricordiamo che un cantare pisano si compone di cento parti, ciascuna delle quali è detta rotolo; i rotoli sono composti di 12 once.

- *Quod cantare si vendatur pro libris XL, et queratur quantum valeant rotuli 5.*

∘ Se un cantare si vende per 40 lire, quanto valgono 5 rotoli?

Soluzione.
Secondo la regola del tre, scrivi su una stessa riga i 100 rotoli (cioè 1 cantare) e a sinistra il loro prezzo, cioè 40 lire; poi scrivi 5 rotoli sotto i 100 rotoli, poiché numeri dello stesso genere vanno uno sotto l'altro: rotoli sotto rotoli e lire sotto lire. Moltiplica ora in diagonale i numeri che si trovano agli estremi, cioè 40 e 5, che fa 200. Dividi poi per 100. Viene 2 lire come prezzo di 5 rotoli.

l.		R.
40		100
	$\nwarrow$	
2		5

- *Item rotuli 100 per libras 40; quot rotulos habuero per libras 2.*

○ Se un cantare, cioè 100 rotoli, si vende per 40 lire, quanti rotoli avrò per 2 lire?

Soluzione.
Tra i tre numeri dati due sono dello stesso genere (le 40 lire e le 2 lire) e l'altro è un peso. Scrivi su una stessa riga i 100 rotoli e a sinistra il loro prezzo, cioè 40 lire; poi scrivi 2 lire sotto le 40 lire, poiché numeri dello stesso genere vanno uno sotto l'altro. Moltiplica ora in diagonale i numeri che si trovano agli estremi, cioè 100 e 2, che fa 200. Dividi poi per 40. Viene 5 rotuli.

l.		R.
40		100
	$\nearrow$	
2		5

- *Item cantare venditur pro libris 13; quantum valent rotuli 27.*

○ Se un cantare, cioè 100 rotuli, si vende per 13 lire, quanto valgono 27 rotoli?

Da ricordare: 1 lira vale 20 soldi e 1 soldo vale 12 denari.

Soluzione.
Scrivi i 100 rotoli e le 13 lire sulla stessa riga e i 27 rotoli sotto i 100. Moltiplica 13 per 27, che fa 351, e dividi per 100. Viene 3 e $\frac{51}{100}$. Se vuoi sapere che parte di una lira siamo moltiplica 51 per 20 e dividi per 100. Viene 10 che sono i soldi e resta $\frac{1}{5}$. Moltiplica $\frac{1}{5}$ per 12. Viene 2 e $\frac{2}{5}$ che sono i denari. Dunque 3 lire 10 soldi e 2 e $\frac{2}{5}$ di denari.

l.		R.
13		100
	$\nwarrow$	
		27

2.1.2 Esempi con cambi di monete

Nella seconda parte dell'ottavo capitolo si trovano i cambi di monete, sempre risolti con la regola del tre.

- *Si soldus imperialium, scilicet denarii 12, aut cuiuslibet aliae monetae, vendatur pro denariis 31 pisaninis, vel pro aliis quibulibet; et queratur quot denarios pisaninos quis pro imperialibubs 11 habuerit: describer questionem ...*

○ Se un soldo, cioè 12 denari, di monete imperiali o di qualunque altra moneta, si cambia con 31 denari pisani, quanti denari pisani si hanno per 11 denari imperiali?

d. pis.		d. imp.
31		12
	$\nwarrow$	
$28 + \frac{5}{12}$		11

Soluzione.
Scrivi il primo termine, 12 denari imperiali, e sulla stessa riga scrivi quanto valgono, cioè 31 denari pisani; sotto i 12 denari imperiali metti 11, come si vede nello schema; moltiplicherai i numeri opposti, cioè 11 per 31, che farà 341, e questi dividili per 12; verrà $28 + \frac{5}{12}$ denari.

• *Rursum soldus imperialium valet 31 pisaninis, ut prediximus; et queratur quot imperiales quis pro pisaninis 11 habuerit.*

○ Se un soldo, cioè 12 denari, di monete imperiali vale 31 denari pisani, quanti imperiali si hanno per 11 pisani?

Soluzione.
Scrivi l'11 sotto il 31. Moltiplica 11 per 12, che fa 132, e dividi per 31. Verrà $4 + \frac{8}{31}$ di imperiali.

d. pis.		d. imp.
31		12
	$\nwarrow$	
11		$4 + \frac{8}{31}$

I valori delle monete possono essere riferiti anche alla quantità di metallo prezioso che contengono. Su questo si basano altri problemi dello stesso capitolo. Ricordiamo che la libbra o lira era anche un'unità di peso. Una libbra era divisa in 12 once.

• *Si libra argenti, hoc est unciae 12, vendatur pro libris 7; et queratur quantum valent unciae 2.*

○ Una libbra d'argento, cioè 12 once, si vende a 7 lire e si chiede quanto valgono 2 once.

Soluzione.
Scrivi le once sotto le once cioè 2 sotto 12, moltiplica 2 per 7, che si trovano agli opposti, dividi per 12 e verrà $1 + \frac{1}{6}$, cioè 20 soldi + $20 + \frac{1}{6}$ soldi, cioè 20+3 soldi + $2 + \frac{1}{6}$ soldi, cioè 23 soldi + $2 \cdot 12 + \frac{1}{6}$ denari, cioè 23 soldi e 4 denari.

$$\begin{array}{ccc} \text{l.} & & \text{unc.} \\ 31 & & 12 \\ & \nwarrow & \\ 1+\frac{1}{6} & & 2 \end{array}$$

• *Rursus si proponatur quod libra argenti, hoc est unciae 12, valent libras 8; et queratur quantum argentum quis habuerit pro libris 5 denariorum.*

◦ Se una libbra d'argento, cioè 12 once, si vende a 8 lire, quanto argento si avrà per 5 lire?

Soluzione.
Scrivi 5 sotto 8, moltiplica 5 per 12 e dividi per 8. Viene 7 once e $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{ccc} \text{l.} & & \text{unc.} \\ 8 & & 12 \\ & \nearrow & \\ 5 & & 7+\frac{1}{2} \end{array}$$

2.1.3 Esempi con misure di lunghezza

Ricordiamo che 1 canna pisana vale 4 braccia.

• *Si canna pisana, que est brachia 4 cuiuslibet panni vendatur pro soldis 7 et queratur quantum valet brachium 1.*

◦ Se una canna pisana, cioè 4 braccia, di una certa stoffa si vende per 7 soldi quanto costa 1 braccio?

Soluzione.
Moltiplicando in croce e dividendo per 4 si ottiene 1 soldo e $\frac{3}{4}$, ossia 1 soldo e 9 denari.

$$\begin{array}{ccc} \text{s.} & & \text{br.} \\ 7 & & 4 \\ & \nwarrow & \\ 1+\frac{3}{4} & & 1 \end{array}$$

• *Item canna venditur pro soldis 46 et denari 5, hoc est soldis* $46+\frac{5}{12}$*, quantum valent ergo brachia 3.*

◦ Se una canna pisana, cioè 4 braccia, si vende per 46 soldi e 5 denari, cioè a $46+\frac{5}{12}$ soldi, quanto valgono 3 braccia?

Soluzione.
Moltiplicando 46 per 12 e aggiungendo 5 si ottengono 557 denari. Moltiplicali per 3

e dividi per 4 e poi per 12 per ottenere i soldi. Viene $417+\frac{3}{4}$ denari, cioè $34+\frac{9}{12}+\frac{3}{4\cdot 12}$ soldi.

s.		br.
557		4
	$\nwarrow$	
$417+\frac{3}{4}$		3

2.2 Problemi risolti con la regola del tre composto

Nel capitolo 9 si tratta di baratti (*De baractis mercium atque alium similium*), cioè di scambi fra merci di valore diverso. Si applica ora la regola del tre composto, con uno schema un po' più complesso del caso precedente. Anche qui rimandiamo a Giusti, op. cit., p. 84.

2.2.1 Baratti tra due tipi di merci

- *Verbi gratia brachia 20 panni valeant libras 3 pisaninorum, et rotuli 42 cotonis valeant 5 similiter pisaninorum; queritur pro brachiis 50 panni quot rotuli cotonis habebuntur.*

◦ Ad esempio, 20 braccia di panno valgano 3 lire di pisani, e 42 rotuli di cotone valgano 5 lire di pisani. Si chiede quanti rotuli di cotone si avranno per 50 braccia di panno.

Soluzione.
Scrivi dunque sulla tavola 20 braccia, e accanto scrivi 3 lire, cioè il loro prezzo, sotto le quali scrivi 5 lire, e a fianco di queste scrivi 42 rotuli. Scrivi poi 50 braccia sotto 20 braccia, e moltiplica 50 per 3, che stanno diagonalmente, fa 150 che moltiplica per 42 posto diagonalmente, e quello che viene dividilo per gli altri numeri, cioè per 20 e per 5, cioè per 100. Il risultato è 63, e tanti rotuli di cotone si avranno per 50 braccia di panno.

R.		l.		br.
63		3		20
	$\swarrow$		$\nwarrow$	
42		5		50

- *Item si proponatur quod rotuli 7 piperis valeant 4 berzi et libre 9 zaffarani valent berzi 11; et queratur quantum zaffranum quis de rotulis 23 piperis habuerit.*

◦ Se 7 rotuli di pepe valgono 4 berzi e 9 libbre di zafferano valgono 11 berzi, si chiede quanto zafferano si avrà per 23 rotuli di pepe.

Soluzione.
Moltiplica 23 per 4 per 9 e dividi per 7 e per 11. Viene 828 da dividere per 77,

cioè 10 con resto 58. Osservando che $58 = 8 \cdot 7 + 2$ il risultato si può scrivere come $10 + \frac{8}{11} + \frac{2}{11 \cdot 7}$.

$$\begin{array}{lccc}
\text{zafr. lib.} & & \text{b.} & & \text{pip. R.} \\
 & & 4 & & 7 \\
 & \swarrow & & \nwarrow & \\
9 & & 11 & & 23
\end{array}$$

• *Nam si eadem ratione de libris 23 zaffarani piper habere volueris, describes questione ut docet, hoc est similem mercem sub simili merce.*

○ Se, come prima, 7 rotuli di pepe valgono 4 berzi e 9 libbre di zafferano valgono 11 berzi, quanto pepe si avrà per 23 libbre di zafferano?

Soluzione.
Moltiplica 23 per 7 per 11 e dividi per 4 e per 9. Verrà 1771 da dividere per 36. Viene 49 e resta 7. Osservando che $7 = 2 \cdot 3 + 1$ e $36 = 3 \cdot 12$ si ha $49 + \frac{2}{12} + \frac{1}{3}\frac{1}{12}$, cioè 49 rotuli e 2 once e 1/3 di pepe.

$$\begin{array}{lcccc}
\text{zafr. lib.} & & \text{b.} & & \text{pip. R.} \\
23 & & 4 & & 7 \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
9 & & 11 & &
\end{array}$$

2.2.2 Baratti tra due o più tipi di monete

• *Item si proponitur quod soldus imperialium valeat pisaninos 31 et soldus ianuinorum valeat pisaninos 22 et queratur quot ianuinos valeant imperiales 7; describe questionem et ...*

○ Se un soldo di imperiali vale 31 (denari) di pisanini e un soldo di genovini vale 22 (denari) pisanini, quanti (denari) genovini valgono 7 imperiali?

Soluzione.
Dovresti moltiplicare 7 per 31 e per 12 genovini; dividere per 12 e per 22. Tralascia invece di moltiplicare per 12 genovini e non dividere per 12 imperiali: dunque moltiplica 7 per 31 e dividi per 22. Verranno $9 + \frac{9}{11} + \frac{1}{2}\frac{1}{11}$ genovini. Infatti 7 per 31 fa 217 che diviso 22 fa 9 e resto 19; $\frac{19}{22} = \frac{9 \cdot 2 + 1}{11 \cdot 2} = \frac{9}{11} + \frac{1}{2}\frac{1}{11}$.

$$\begin{array}{lcccc}
\text{d. gen.} & & \text{d. pis.} & & \text{d. imp.} \\
 & & 31 & & 12 \\
 & \swarrow & & \nwarrow & \\
12 & & 22 & & 7
\end{array}$$

• *Imperiales 12 valent pisaninos 31 et soldus ianuinorum valet pisaninos 23 et soldus turnensium valet ianuinos 13 et soldus barcellonensium valet turnenses 11; queritur de imperialibus 15 quot barcellonense valeant.*

◦ 12 imperiali valgono 31 pisanini, un soldo di genovini (cioè 12 genovini) vale 23 pisanini, un soldo di tornesi vale 13 genovini e un soldo di barcellonesi vale 11 tornesi. Quanti barcellonesi valgono 15 imperiali?

Soluzione.
Procedendo nel modo comune si trova quanti pisani valgono 15 imperiali, poi qunati genovini valgono questi pisani, poi quanti tornesi valgono questi genovini e infine quanti barcellonesi valgono questi tornesi.

Ad arte metti le monete prescritte in due linee in ordine, cioè sopra 12 imperiali, 31 pisanini e sotto 12 genovini e 23 pisanini in modo che i pisanini siano sotto i pisanini; [..] così da avere sulla riga superiore 12 imperiali, 31 pisanini, 13 genovini e 12 tornesi; nella inferiore 23 pisanini, 12 genovini, 11 tornesi e 12 barcellonesi. Moltiplica i 15 imperiali da cambiare, scritti sotto i 12, per 13 pisanini poi per 12 genovini poi per 12 tornesi poi per 12 barcellonesi; dividi il tutto per 12 imperiali, per 23 pisanini, per 13 genovini e per 11 tornesi. Verrà $20+\frac{8}{23}+\frac{2}{13}\frac{1}{23}+\frac{10}{11}\frac{1}{13}\frac{1}{23}$, infatti $\frac{15\cdot31\cdot12\cdot12\cdot\cancel{12}}{\cancel{12}\cdot23\cdot13\cdot11}=\frac{66960}{3289}=\frac{20\cdot3289+1180}{23\cdot13\cdot11}$ e $\frac{1180}{23\cdot13\cdot11}=\frac{8\cdot13\cdot11+2\cdot13+10}{23\cdot13\cdot11}$, cioè, come dice Leonardo, poco più di $20+\frac{1}{3}$.

barc.		tor.		gen.		pis.		imp.
		12		13		31		12
	/		\		/		\	
12		11		12		23		15

2.2.3 Cavalieri che mangiano orzo e simili

• *Quinque equi comedunt sextaria 6 ordei in diebus 9; queritur in quot dies eadem ratione decem equi comedent sextaria 16.*

◦ Cinque cavalieri consumano 6 sestari di orzo in 9 giorni; si domanda in quanti giorni 10 cavalieri consumano 16 sestari di orzo.

Soluzione.
Scrivi su una riga 5 cavalieri, 6 sestari, 9 giorni (iniziando da destra); poi sotto 5 scrivi 10 cavalieri e sotto 6 scrivi 16 sestari. Moltiplica 5 per 16 per 9, che fa 720; dividi per 10 e per 6, viene 12.

dies		ordeum.		equit.
9		6		5
	/		\	
12		16		10

Altro modo: se 5 cavalieri consumano 6 sestari in 9 giorni, 10 cavalieri, che è il doppio, comsumano 12 sestari in 9 giorni. Dunque, secondo la proporzione, 10 cavalieri consumano 16 sestari in $\frac{16\times 9}{12} = 12$.

• *In quadam planitie quidam rex misit homines 30 ut plantarent arbores in ea, qui plantaverunt ibi arbores 1000 in diebus 9; et queratur de hominibus 36 in quot diebus plantaverunt arbores 4400.*

◦ In una valle un re mise 30 uomini a piantare alberi; questi piantarono 1000 alberi in 9 giorni. In quanti giorni 36 uomini pianteranno 4400 alberi?

Soluzione.
Scrivi 36 uomini sotto 30 uomini, 4400 alberi sotto 1000. Moltiplica 30 per 4400 per 9 e dividi per 36 e per 1000. Verrà 33.

dies		arbores		homines
9		1000		30
	\		/	
33		4400		36

• *Si econtra queratur de hominibus 36 quot arbores suprascripta ratione plantaverunt in diebus 33 [...] exibunt arbores 4400.*

Item si queratur quot homines plantaverunt suprascripta ratione arbores 4400 in diebus 33 [...] exibunt homines 36, ut oportet.

◦ Se al contrario si chiede quanti alberi pianteranno 36 uomini in 33 giorni [...] verrà 4400.

E se si chiede quanti uomini pianteranno 4400 alberi in 33 giorni [...] verrà 36.

dies	arbores	homines
9	1000	30
33	4400	36

2.3 Problemi sulla divisione degli utili

Il decimo capitolo tratta delle società: come devono essere divisi gli utili se ogni socio partecipa con un capitale diverso? La risposta di Fibonacci è che ad ogni socio tocca tanta parte dell'utile totale quanto il suo capitale è parte del capitale totale. Si rimanda anche qui a Giusti, op. cit., p. 87.

Qualora si trattasse di soci che hanno fatto società insieme, dei quali ciascuno ha messo una parte diversa nella società, e con questa società si fosse guadagnata una certa quantità, e questa quantità volessero dividere secondo le parti; se si vuole sapere quanto del profitto tocchi a ciascuno, scrivi la parte del primo socio all'estremità destra della tavola, poi sulla stessa linea scrivi ordinatamente verso sinistra le parti degli altri soci, e all'altra estremità poni il profitto; poi somma tutti i capitali in uno, e metti da parte la somma, per la quale dividerai il prodotto del capitale di ogni socio per il profitto. In questo modo avrai quanto dell'utile totale tocca a ciascuno.

2.3.1 Società tra due uomini

• *Si proponatur de duobus hominibus, qui societatem insimul fecerunt, quorum unus misit in prescripta societate libras 18 alicuius monete, et alter misit in eadem libras 25, et lucrati fuerunt inde libras 7; et queratur quot unicuique de ispis libris 7 contingerit, sic facies.*

○ Se due uomini fanno insieme una società, e uno mette 18 lire di una certa moneta, l'altro 25, e si guadagnano 7 lire; se si vuole sapere quanto di queste 7 lire tocchi a ognuno, fai così:

Soluzione.
Scrivi a partire da destra la parte del primo socio, del secondo e il guadagno: 18, 25, 7. Somma 18 con 25: viene 43 che metterai a denominatore a 18 e a 25. Ora moltiplica il 7 del guadagno per $\frac{18}{43}$ e troverai quanto del guadagno tocca al primo socio. Viene $2+\frac{40}{43}$, cioè 2 lire, 18 soldi e $7+\frac{11}{43}$ di denari. Il resto tocca all'altro. Puoi anche trovarlo moltiplicando 7 per $\frac{25}{43}$.

$$\begin{array}{ccc} 7 & \frac{25}{43} & \frac{18}{43} \\ & 4+\frac{3}{43} & 2+\frac{40}{43} \end{array}$$

Nel seguente esempio si procede in modo analogo. Si ricorda che 1 lira vale 20 soldi e 1 soldo 12 denari.

• *Item duo homines societatem fecerunt quorum unus misit libras 15 et soldos 7, hoc est libra* $15+\frac{7}{20}$ *et alter misit libras 19; et lucreati fuerunt insimul libras 14 et soldos 14 et denarios 5, hoc est libras* $14+\frac{14}{20}+\frac{5}{12}\frac{1}{20}$. *Queritur quantum unicuique de prescripto lucro contingit.*

○ Due uomini si missero in società; uno mise 15 lire e 7 soldi, cioè $15+\frac{7}{20}$ lire, l'altro 19 lire. Si guadagnarono insieme 14 lire 14 soldi e 5 denari, cioè $14+\frac{14}{20}+\frac{5}{12}\frac{1}{20}$ lire. Quanto di questo guadagno tocca a ciascuno?

Soluzione.
Moltiplica 15 per 20 e somma 7 e troverai 307, i soldi messi dal primo. Moltiplica 19 per 20 e avrai i soldi messi dal secondo: 380. Somma 307 con 380: fa 687. Il

guadagno sono $14 \cdot 20 \cdot 12 + 14 \cdot 12 + 5 = 3533$ denari. Moltiplica ora 307 per 3533 e dividi per 687.

Si ottiene 6 lire 11 soldi 6 denari e $\frac{545}{687}$.

Infatti $307 \cdot 3533 = 1084631 = 1578 \cdot 687 + 545$; 1578 denari sono $6 \cdot 240 + 138$ e dunque 6 lire; 138 denari sono $11 \cdot 12 + 6$ e dunque 11 soldi e 6 denari. Poiché $\frac{545}{687} = \frac{181 \cdot 3 + 2}{3 \cdot 229} = \frac{181}{229} + \frac{2}{3 \cdot 229}$ il risultato si può scrivere come $6 + \frac{11}{20} + \frac{6}{12 \cdot 20} + \frac{181}{229 \cdot 12 \cdot 20} + \frac{2}{3 \cdot 229 \cdot 12 \cdot 20}$ lire.
Al secondo toccheranno invece $8 + \frac{2}{20} + \frac{10}{12 \cdot 20} + \frac{47}{229 \cdot 12 \cdot 20} + \frac{1}{3 \cdot 229 \cdot 12 \cdot 20}$ lire.

2.3.2 Società tra più di due uomini

• *Tres homines societatem fecerunt quorum primus misit libras 17, secundus libras 29 tertius libras 42; et lucrati fuerunt libras 100.*

◦ Tre uomini si misero in società. Il primo mise 17 lire, il secondo 29 e il terzo 42. Furono guadagnate 100 lire. Quanto spetta a ciascuno?

Soluzione.
Somma le tre parti: 17, 29 e 42; viene 88. Moltiplica il guadagno per ciascuna parte e dividi per 88. Verrà 19 lire 6 soldi e $4 + \frac{4}{11}$ di denari per il primo; 32 lire 19 soldi e $1 + \frac{1}{11}$ di denari per il secondo; 47 lire 14 soldi e $6 + \frac{6}{11}$ di denari per il terzo.

100	$\frac{42}{88}$	$\frac{29}{88}$	$\frac{17}{88}$
	$47 + \frac{14}{20} + \frac{6}{20 \cdot 12} + \frac{6}{11 \cdot 12 \cdot 20}$	$32 + \frac{19}{20} + \frac{1}{20 \cdot 12} + \frac{1}{11 \cdot 12 \cdot 20}$	$19 + \frac{6}{20} + \frac{4}{20 \cdot 12} + \frac{4}{11 \cdot 12 \cdot 20}$

2.4 Problemi sulla fusione delle monete

Il capitolo undicesimo tratta dei titoli delle monete. Rimandiamo anche qui a Giusti, op. cit., p. 88: "Il titolo di una moneta è un numero compreso tra 0 e 12, che esprime le once d'argento in una libbra di moneta. Il problema che si pone è quello della fusione (consolamen) delle monete, cioè di come ottenere monete di un certo titolo, a partire da argento, rame e da varie monete di titolo dato." Ricordiamo che 1 libbra sono 12 once.

2.4.1 Fusione di monete a partire da argento dato

• *Quidam habet libras 7 argenti, ex quibus vult facere monetam ad uncias 2 argenti in libra; et vult scire quantitatem totius consolaminis, nec non et eris iunctionem.*

◦ Un tale ha 7 libbre di argento, dalle quali vuol fare monete a 2 once per libbra; si vuole sapere la quantità da fondere e il bronzo da aggiungere.

Soluzione.
Di queste 7 libbre d'argento fanne once, e saranno 84. Dato che in ogni libbra di moneta ci sono 2 once d'argento, quante volte 2 once entrano in 84, tante volte si pu fondere una libbra di monete da queste once d'argento. Ma in 84 once due once entrano 42 volte; dunque da 84 once d'argento si possono fondere 42 libbre di monete. Dalle quali, tolte le 7 libbre d'argento, rimangono 35 libbre di bronzo da aggiungere.

Altra soluzione. Poiché in ogni libbra devono esserci 2 once d'argento il resto delle once, cioè 10, per ogni libbra sarà di rame. Dunque per ogni 2 once di argento che si hanno bisogna prenderne 10 di rame. Scrivi allora 2 libbre di argento e 10 di rame su una riga e 7 libbre di argento sotto l'argento, come nello schema. Moltiplica 7 per 10 e dividi per 2: vengono 35 libbre di rame.

$$\begin{array}{ccc} \text{rame} & & \text{arg.} \\ 10 & & 2 \\ & \nwarrow & \\ 35 & & 7 \end{array}$$

• *Item proponatur quod quidam habeat libras 8 et uncias* $7 + \frac{1}{4}$ *argenti ex quibus vult facere monetam ad uncias* $2 + \frac{1}{3}$ *in libra; et queritur summa consolaminis nec non eris adiuncto.*

○ Se si hanno 8 libbre e $7+\frac{1}{4}$ once d'argento e si vogliono fare delle monete con $2+\frac{1}{3}$ once d'argento per libbra, quanto rame si deve aggiungere e quante libbre in totale si ottengono?

Soluzione.
Togli $2+\frac{1}{3}$ da 12: si ottiene $9+\frac{2}{3}$, cioè quanto rame occorre per ogni libbra. Moltiplica $9 + \frac{2}{3}$ per $103 + \frac{1}{4}$ once, cioè 8 libbre e $7 + \frac{1}{4}$ once, e dividi per $2 + \frac{1}{3}$. Verrà $427 + \frac{3}{4}$ di once di rame, cioè 35 libbre e $7 + \frac{3}{4}$ once di rame da aggiungere. Aggiunte alle 8 libbre e $7 + \frac{1}{4}$ once di argento danno la somma di tutte le monete, cioè 44 libbre e 3 once.

$$\begin{array}{ccc} \text{rame} & & \text{arg.} \\ 9+\frac{2}{3} & & 2+\frac{1}{3} \\ & \nwarrow & \\ & & 103+\frac{1}{4} \end{array}$$

2.4.2 Fusione di monete a partire da monete con aggiunta di metalli

• *Item si habueris libras 7 ad uncias 5 unius monete et libras 9 ad uncias 4 alterius et volueris ex eis monetam ad uncias 3 cuprum addendo conformare; et quesieris iunctionem cupri nec non et totius consolaminis quantitatem sic facies.*

◦ Si hanno 7 libbre di alcune monete a 5 once d'argento ciascuna e 9 libbre di altre monete a 4 once e se ne vuole fare una moneta a 3 once aggiungendo del rame. Quanto rame si deve aggiugnere e qual è il totale delle monete fuse?

Soluzione.
Moltiplica 7 per 5, viene 35, e 9 per 4, viene 36, somma: viene 71, che è il totale dell'argento contenuto nelle monete. Dividi per 3, viene $23 + \frac{2}{3}$, che sono le libbre totali di monete che verranno. Togli le libbre di rame delle monete iniziali e troverai la quantità di rame da aggiungere, cioè $7 + \frac{2}{3}$ libbre.

2.4.3 Fusione di monete a partire da monete con titoli diversi senza aggiunta di metalli

Si tratta di coniare delle monete con un dato titolo fondendo due tipi di monete con titoli diversi, senza aggiungere argento o rame. Problemi simili verranno riproposti anche nel capitolo 13, risolvendoli con il metodo della doppia falsa posizione. Qui ci si riconduce alla proporzione che le due monete di partenza devono avere per ottenere il titolo voluto.

Se si hanno due tipi di monete, una con titolo maggiore e l'altra con titolo minore della moneta che si vuole ottenere si può fare la fusione senza aggiungere bronzo o argento se dei due tipi di moneta si prendono quantità in proporzione scambiata alla differenza fra le once di argento della moneta da ottenere e quelle delle monete stesse.

Se per esempio si hanno delle monete a 2 once d'argento per libbra e della monete a 9 once d'argento per libbra e si vogliono fare monete a 5 once d'argento per libbra, scrivi 2 e 9 sulla stessa riga e sotto, fra loro, il 5, come nello schema. La differenza fra 9 e 5, 4, scrivila sopra il 2, e la differenza fra 2 e 5, 3, scrivila sopra il 9. Si avrà allora che per 4 parti della moneta di titolo minore occorrono 3 parti della moneta di titolo maggiore.

3		4
9		2
	5	

• *Unde si ex ipso consolamine tantum uncias 12 consolare volueris [...] exibunt de maiori moneta uncie* $6 + \frac{6}{7}$ *et de minori uncie* $5 + \frac{1}{7}$.

◦ Si hanno delle monete a 2 once d'argento per libbra e della monete a 9 once d'argento per libbra e si vogliono fare monete a 5 once d'argento per libbra fondendo in tutto 12 libbre di monete. Quanto della prima moneta e quanto della seconda si deve fondere?

Soluzione.
Secondo quanto detto prima per 4 parti della moneta di titolo minore occorrono 3

parti della moneta di titolo maggiore, cioè $\frac{4}{7}$ e $\frac{3}{7}$ del totale. Dunque occorrono $\frac{3}{7}$ di 12, cioè $5 + \frac{1}{7}$ libbre della moneta a 9 once, e occorrono $\frac{4}{7}$ di 12, cioè $6 + \frac{6}{7}$ libbre della moneta a 2 once.

• *Rursus si de minori moneta habueris libras 10 multiplica eas per 3 que sunt supra 9 et divide per 4 que sunt super 2, exhibunt libre* $7 + \frac{1}{2}$ *de maiori moneta.*

◦ E se invece si hanno 10 libbre di moneta a 2 once d'argento per libbra, quante delle monete a 9 once bisogna aggiungere per ottenere monete a 5 once?

Soluzione.
Secondo quanto detto prima per 4 parti della moneta di titolo minore occorrono 3 parti della moneta di titolo maggiore. Dunque dividi 10 per 4 e moltiplica per 3. Verranno $7 + \frac{1}{2}$ libbre che è la quantità necessaria della seconda moneta.

2.5 Problemi risolti con la falsa posizione

Il capitolo dodicesimo, il più ampio del *Liber abaci*, tratta di questioni diverse. La terza parte si intitola "Problemi di alberi, e altri simili". Per risolvere questo tipo di problemi ci si riconduce a una proporzione (che sarà poi risolta con la regola delle tre cose) introducendo un valore arbitrario, opportunamente scelto per rendere semplici i calcoli. Tale ipotesi iniziale, generalmente falsa, dà al metodo il nome di "falsa posizione". Si rimanda a Giusti, op. cit., p. 90, per ulteriori informazioni.

• *Est arbor cuius* $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ *latet sub terra; et sunt palmi 21; queritur quanta sit arboris illius longitudo.*

◦ C'è un albero, di cui $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ stanno sotto terra e sono 21 palmi. Si chiede quale sia la lunghezza dell'albero.

Soluzione.
Supponiamo che la lunghezza dell'albero sia 12 (scelto perché è divisibile sia per 3 che per 4). Prendiamo $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ del 12 che abbiamo supposto come lunghezza. Si ottiene 7. Se avessimo ottenuto 21 avremmo a caso trovato che l'albero era 12 palmi. Ma poiché 7 non è 21 avremo che 7 sta a 21 come la lunghezza ipotizzata dell'albero, cioè 12, sta a quella da trovare. In altre parole: se per 12 che suppongo trovo 7, cosa devo prendere per ottere 21? Secondo la regola delle tre cose moltiplica gli estremi, cioè 12 e 21, e dividi per l'altro numero, cioè 7. Si ottiene 36.

$$\begin{array}{ccc} 12 & & 36 \\ & \nwarrow & \\ 7 & & 21 \end{array}$$

• *Item est arbor cuius* $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ *latet sub terra. Residuum vero quod est super terram est palmi 21.*

◦ C'è un albero, di cui $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ stanno sotto terra. Il rimanente, che sta sopra la terra, è 21 palmi. Si chiede quale sia la lunghezza dell'albero.

Soluzione.
Poniamo che l'albero sia 12 palmi, da cui, tolti $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, cioè 7, restano sopra la terra 5 palmi. Dunque dirai: per 12 che ho posto, viene 5; cosa devo porre perché venga 21? Moltiplica allora gli estremi, cioè 12 per 21, e dividi per il medio 5; verrà 50 e 2/5 .

$$\begin{array}{ccc} 12 & & 50+\frac{2}{5} \\ & \nwarrow & \\ 5 & & 21 \end{array}$$

• *Item si dixerit quod addita $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ ipsius arboris super arborem erunt 38.*

◦ Se a un albero si aggiungono i suoi $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ l'albero diviene alto 38 palmi. Si chiede quale sia la lunghezza dell'albero.

Soluzione.
Poniamo che l'albero sia 12 palmi, a cui aggiunti $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, cioè 7, verrebbe 19 palmi. Poiché si vorrebbe fossero 38, si dice: per 12 che ho preso trovo 19, che devo prendere per trovare 38? Moltiplica 12 per 38 e dividi per 19: si trova 24.

$$\begin{array}{ccc} 12 & & 24 \\ & \nwarrow & \\ 19 & & 38 \end{array}$$

• *Iterum est arbor de quo acceptis $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{4}$ et de collecta quantitate si extraxeris quantitatem illius arboris remanent 33; queritur rursum quanta sit illius arboris longitudo.*

◦ C'è un albero del quale, se prendo i $\frac{4}{5}$ e $\frac{3}{4}$ e tolta da questi la lunghezza di tutto l'albero, rimangono 33 palmi. Si chiede quale sia la lunghezza dell'albero.

Soluzione.
Poniamo che l'albero sia 20 palmi. I $\frac{4}{5}$ e $\frac{3}{4}$ sono 31 palmi, da cui tolgo la lunghezza 20 e resta 11 palmi. Si dice allora: per 20 che ho preso ho trovato 11. Quanto devo prendere per ottenere 33? Moltiplica 20 per 33 e dividi per 11: si trova 60.

$$\begin{array}{ccc} 20 & & 60 \\ & \nwarrow & \\ 11 & & 33 \end{array}$$

2.6 Problemi risolti con la doppia falsa posizione

Un'estensione della regola della falsa posizione si trova nel capitolo 13, intitolato "La regola della doppia falsa posizione, e come con essa si risolvano pressoché tutte le questioni miscellanee". Si tratta di utilizzare ora due ipotesi arbitrarie per trovare la quantità desiderata. Leonardo riprende alcuni esempi già trattati precedentemente per introdurre questo nuovo procedimento, per poi affrontare questioni più complesse. Rimandiamo a Giusti, op. cit., p.95, per tutte le informazioni.

• *Valeat enim cantare, scilicet rotuli 100, libras 13; et queratur quantum valeat rotulus 1.*

◦ Se un cantare, cioè 100 rotoli, vale 13 lire, quanto vale 1 rotolo?

Soluzione.
Supponiamo che 1 rotolo valga 1 soldo, allora 100 rotoli valgono 100 soldi, cioè 5 lire; l'errore della prima supposizione è dunque 8 lire. Supponiamo ora che 1 rotolo valga 2 soldi, allora 100 rotoli valgono 200 soldi, cioè 10 lire; l'errore della seconda supposizione è dunque 3 lire. Un aumento di uno (da 1 soldo a 2 soldi) nella supposizione iniziale ha portato dunque a una diminuzione di 5 (da 8 a 3 lire) nell'errore del risultato finale. Si dirà allora: per 1 che ho aumentato, mi sono avvicinato di 5; quanto dovrò ancora aumentare per avvicinarmi di altri 3? Si moltiplica 1 per 3 e si divide per 5. Poiché 1 soldo sono 12 denari verrà $\frac{12 \cdot 3}{5}$ cioè $7+\frac{1}{5}$ denari, che aggiunti ai 2 soldi della seconda ipotesi danno 2 soldi e $7+\frac{1}{5}$ denari.

soldi	1	2	diff. ip.	12	$7+\frac{1}{5}$
err.	8	3	diff. err.	5	3

• *Quidam habuit monetam que erat ad uncias 3 et aliam monetam que erat ad uncias 6; et voluit ex eis facere libram 15 monete que essent ad uncias 5; et queritur quantum de una quaque moneta in predicto consolamine mittere debuit.*

◦ Un tale ha delle monete a 3 once d'argento e altre a 6 once d'argento per libbra. Vuole con queste fare 15 libbre di monete a 5 once d'argento. Quante monete di ciascun tipo deve fondere?

Soluzione.
Per 15 libbre a 5 once d'argento occorrono in tutto 75 once d'argento.
Supponiamo di prendere 3 libbre della prima moneta. Abbiamo allora $3 \times 3 = 9$ once d'argento dalla prima moneta e dalle 12 libbre che mancano e che devo prendere della seconda moneta ottengo altre $12 \times 6 = 72$ once d'argento. In totale 81 once; dunque in questa prima ipotesi ho un errore di 6 once.
Supponiamo ora di prendere 4 libbre della prima moneta. Abbiamo allora $4 \times 3 = 12$ once d'argento dalla prima moneta e dalle 11 libbre che mancano e che devo prendere della seconda moneta ottengo altre $11 \times 6 = 66$ once d'argento. In totale 78 once; dunque in questa seconda ipotesi ho un errore di 3 once.

Dunque aumentando di una libbra la prima moneta ho diminuito di 3 l'errore. Quanto allora devo aumentare ancora la prima moneta per diminuire ancora di 3 once? Moltiplica 1 per 3 e dividi per 3. Viene 1, e dunque dovrò usare 5 libbre della prima moneta e 10 della seconda.

libbre primo tipo	3	4	diff. ip.	1	1
err.	6	3	diff. err.	3	3

• *Quidam ivit negotiando Lucam, deinde Florentia et reversus est Pisas; et fecit in unaquaque civitate duplum et in unaquaque expendidit denarios 12 et in fine nil remansit ei. Queritur quot in principio habuit.*

◦ Un tale andò per affari a Lucca poi a Firenze e tornò a Pisa e in ciscuna città raddoppiò il suo denaro e spese ogni volta 12 denari e alla fine niente gli rimase. Si chiede con quanto era partito.

Soluzione.
Supponiamo dapprima che fosse partito con 12 denari; in questo caso gli resterebbero 12 denari. Se invece fosse partito con 11 denari, rimarrebbe a Lucca con 22-12=10, a Firenze con 20-12=8 e infine a Pisa con 16-12=4 denari. Una diminuzione di uno (da 12 a 11) nella supposizione iniziale ha portato dunque a una diminuzione di 8 (da 12 a 4) nel risultato finale. Si dirà allora: per 1 che ho diminuito del capitale, mi sono avvicinato di 8; quanto dovrò ancora diminuire per avvicinarmi di altri 4? Si moltiplica 4 per 1, e si divide per 8; verrà $\frac{1}{2}$ denaro, che tolto da 11 denari darà per il capitale iniziale 10 denari e $\frac{1}{2}$.

denari iniziali	3	4	diff. ip.	1	$10 + \frac{1}{2}$
err.	12	4	diff. err.	8	4

2.7 Problemi del dodicesimo capitolo

Il dodicesimo capitolo ("La soluzione di questioni diverse, dette miscellanee") contiene numerosi problemi di matematica ricreativa. Ci limiteremo qui a riportarne due dei più significativi. Rimandiamo a Giusti, op. cit., p. 89, per altre informazioni e a N. Geronimi, Giochi matematici del Medioevo: i "conigli di Fibonacci" e altri rompicapi liberamente tratti dal Liber Abaci, Milano, 2006, per una più ampia scelta di problemi.

2.7.1 Il problema dei conigli

• Quidam posuit unum par cuniculorum in quodam loco, qui erat undique pariete circundatus, ut sciret quot ex eo paria germinarentur in uno anno, cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare et in secundo mense ab eorum nativitate germinant.

◦ Un tale mise una coppia di conigli in un luogo chiuso per sapere quante coppie sarebbero nate in un anno da quella coppia sapendo che in ogni mese da una coppia nasce un'altra coppia e che ogni coppia inizia a riprodursi nel secondo mese di vita.

Soluzione.
Nel primo mese la coppia si riproduce e dunque nel primo mese ci sono 2 coppie. Nel secondo mese la prima coppia si riproduce ancora e dunque vi sono 3 coppie. Di queste 2 rimangono gravide. Nel terzo mese nascono 2 nuove coppie e dunque vi sono 5 coppie, di cui 3 rimangono gravide. Nel quarto mese vi sono 8 coppie di cui 5 rimangono gravide. Nel quinto vi sono 13 coppie di cui 8 rimangono gravide. Nel sesto 21 coppie di cui 13 gravide. Nel settimo 34 coppie di cui 21 gravide. nell'ottavo 55 di cui 34 gravide. Nel nono 89 di cui 55 gravide. Nel decimo 144 di cui 89 gravide. Nell'undicesimo 233 di cui 144 gravide. Nel dodicesimo 377. A margine si vede come abbiamo operato, cioè che abbiamo sommato il primo numero conn il secondo, il secondo con il terzo, e così via.

Riportiamo per intero anche la soluzione proposta da Leonardo nel *Liber abaci*.

Quia suprascriptum par in primo mense germinat, duplicabis ipsum, erunt paria duo in uno mense. Ex quibus unum scilicet primum in secundo mense geminat, et sic sunt in secundo mense paria 3, ex quibus in uno mense duo pregnantur, et geminantur in tercio mense paria 2 coniculorum; et sic sunt paria 5 in ipso mense, ex quibus in ipso pregnantur paria 3; et sunt in quarto mense paria 8, ex quibus paria 5 geminant alia paria 5; quibus additis cum pariis 8, faciunt paria 13 in quinto mense, ex quibus paria 5, que geminata fuerunt in ipso mense non concipiunt in ipso mense, sed alia 8 paria pregnantur, et sic sunt in sexto mense paria 21; cum quibus additis pariis 13, que geminantur in septimo, erunt in ipso paria 34, cum quibus additis pariis 21, que geminanatur in octavo mense, erunt in ipso paria 55, cum quibus additis pariis 34, que geminantur in nono mense, erunt in ipso paria 89, cum quibus additis rursum pariis 55, que geminantur in decimo mense, erunt in ipso paria 144, cum quibus additis rursum pariis 89, que geminantur in undecimo mense, erunt in ipso paria 233. Cum quibus etiam additis pariis 144, que geminantur in ultimo mense, erunt paria 377; et tot paria peperit suprascriptum par in prefato loco in capite unius anni.

parium
1
primus
2
secundus
3
tertius
5
quartus
8
quintus
13
sestus
21
septimus
34
octavus
55
nonus
80
decimus
144
undecimus
233
duodecimus
377

Potes enim videre in hac margine qualiter hoc operati fuimus, scilicet quod iunximus primum numerum cum secundo, videlicet 1 cum 2; et secundum cum tercio; et tercium cum quarto; et quartum cum quinto, et sic deinceps, donec iunximus decimum cum undecimo, videlicet 144 cum 233; et habuimus suprascriptorum cuniculorum summam, videlicet 377; et sic posses facere per ordinem de infinitis numeris mensibus.

2.7.2 Problemi con progressioni geometriche: vecchie, alberi, e la scacchiera

Si tratta di un problemi tratti dalla nona parte del capitolo 12, che spesso hanno origini molto antiche (v. Giusti, op. cit., p. 81).

- *Septem vetule vadunt Romam quarum quelibet habet burdones 7, et in quolibet burdone sunt saculi 7 et in quolibet saculo panes 7 et in quilibet panis habet cultellos 7 et quilibet cultellus habet vaginas 7. Queritur summa omnium predictorum.*

◦ Sette vecchie vanno a Roma; ognuna ha sette muli, ogni mulo ha sette sacchi, in ogni sacco ci sono sette pani, ogni pane ha sette coltelli, ogni coltello sette guaine. Si chiede la somma di tutti.

Soluzione.
Moltiplica il numero delle vecchie, 7, per il numero dei muli, 7; viene 49. Moltiplica

49 per i 7 sacchi, viene 343. Moltiplica per 7 pani; viene 2401. Moltiplica per 7 coltelli; viene 16807. Moltiplica per 7 guaine; viene 117649. Sommando tutto viene 137256.

• *Est arbor que habet ramos 100, et in quolibet ramo sunt nidi 100; et in quolibet nido sunt ova 100; et in quolibet ovo sunt aves 100.*

◦ Un albero ha 100 rami, in ogni ramo ci sono 100 nidi, in ogni nido 100 uova e in ogni uovo 100 uccelli. Qual è la somma di tutti?

Soluzione.
Prendi i 100 rami e aggiungi due zeri per avere i nidi, viene 10000. Metti altri due zeri per le uova, viene 1000000. Metti altri due zeri per gli uccelli, viene 100000000. Per sommare metti un 1 al posto del terzo, del quinto e del settimo zero. Viene 101010100.

• *Duplicatio quidem scacherii duplici modo proponitur; quorum unus est cum sequens punctum sui antecedentis duplum sit; alius cum sequens punctum omnium antecedentium punctorum duplum esse proponatur.*

◦ Il raddoppio della scacchiera si può fare in due modi; uno è che in ogni casella della scacchiera c'è un numero doppio del precedente, l'altro modo è che in ogni casella della scacchiera c'è un numero che è il doppio di tutti quelli che lo precedono messi insieme.

Soluzione.
Consideriamo il primo tipo di raddoppio.
Il primo tipo di raddoppio si può calcolare in due modi.
Nel primo modo si procede raddoppiando di punto in punto, fino all'ultima casella.
Nel secondo modo si osserva che sommando la casella numero uno e numero due si ottiene 3, valore che è inferiore di 1 rispetto alla casella successiva dove c'è il raddoppio della casella due, sommando la casella numero uno, numero due e numero tre si ottiene 7, valore che è inferiore di 1 rispetto alla casella successiva dove c'è il raddoppio della casella tre, e così via. Se allora, raddoppiata la prima casella, moltiplico il valore 2 per se stesso, e poi il 4 per se stesso, e poi il 16 per se stesso ottengo rispettivamente i valori 4, 16, 256 che mi danno la somma aumentata di uno delle prime due, quattro, otto caselle; preseguendo moltiplico 256 per se stesso e ottengo 65536 che mi dà la somma aumentata di uno delle prime sedici caselle, moltiplico 65536 per se stesso e ottengo 4294967296 che dà la somma aumentata di uno delle prime trentadue caselle, moltiplico quest'ultimo valore per se stesso e ottengo la somma aumentata di uno dell'intera scacchiera: 18446744073709551616 .

3 Le equazioni di secondo grado nel *Liber abaci*

La terza e ultima parte dell'ultimo capitolo del *Liber abaci* si intitola "de solutione quarumdam quaestionum secundum modum algebrae et almuchabalae, scilicet ad proportionem et restaurationem". Rimandiamo a Giusti, op. cit., p. 106, per altre informazioni. Qui si affrontano equazioni di secondo grado. I termini sono costituiti da numeri, radici (corrispondenti alla nostra incognita) e censi (corrispondenti al quadrato dell'incognita). Nelle equazioni questi termini possono essere legati tra loro in sei modi (che corrispondono alle equazioni indicate a fianco con $b > 0$ e $c > 0$):
- tre semplici

- censo uguale a radici ($x^2 = bx$)
- censo uguale a numero ($x^2 = c$)
- radici uguali a numero ($bx = c$)

- tre composti

- censo e radici uguali a numero ($x^2 + bx = c$)
- censo uguale a radici e numero ($x^2 = bx + c$)
- censo e numero uguali a radici ($x^2 + c = bx$)

A partire da equazioni che coinvolgano censi, radici e numeri ci si riconduceva a una di queste tre forme attraverso alcune trasformazioni. Eventuali termini negativi si eliminavano tramite la "restauratio" (ricomposizione, in arabo "al-jabr")e termini simili nei due membri si semplificano tramite la "oppositio" (bilanciamento, in arabo "al-muqābala"). I censi, cioè i quadrati incogniti, vengono sempre ridotti ad avere coefficiente uno tramite la trasformazione nota in arabo come "al-hatt".

Vediamo come nel *Liber abaci* si presentano i tre modi composti.

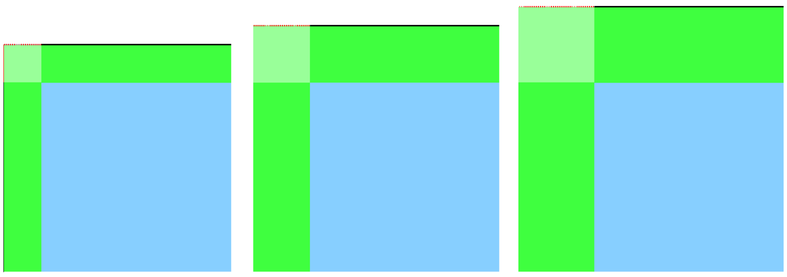
3.1 Quando census et radices equantur numero (Censo e radici uguali a numero)

- *Sic facias: accipe quadratum medietatis radicum et adde eum super numerum datum; et eius quod provenerit radicem accipe; de qua numerum medietatis radicum tolle; et quod remanserit erit radix quesiti census.*
Verbi gratia: census et decem radices equentur 39. Dimidium itaque ex radicibus est 5; quibus in se multiplicatis faciunt 25; quibus additis cum 39 faciunt 64; de quorum radice que est 8 si auferatur medietas radicum, scilicet 5, remanebunt 3 pro radice quesiti census. Quare census est 9, et ipsius decem radices sunt 30; et sic census et decem radicem equantur 39.

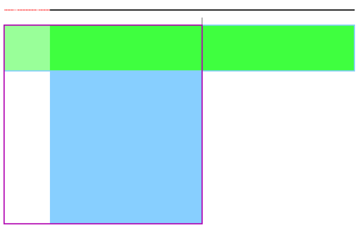
◦ Fai così: prendi il quadrato della metà delle radici e aggiungilo al numero dato; di quello che viene prendi la radice; da questa togli metà delle radici.
Esempio: un censo e dieci radici siano uguali a 39. La metà delle radici è 5 che moltiplicato per se stesso fa 25; questo aggiunto a 39 fa 64; dalla cui radice, che è 8, se si toglie metà delle radici, cioè 5, rimarrà 3 che dà la radice del censo richiesto. Quindi il censo è 9, e le sue dieci radici sono 30; e così il censo con le dieci radici fanno 39.

Il motivo di questa regola viene spiegato attraverso due costruzioni geometriche.

Nella prima si costruisce un quadrato il cui lato sia 5 (in nero), la metà delle radici, più un pezzetto incognito (in rosso tratteggiato). Il quadrato verde chiaro rappresenta il censo e il suo lato una radice. La superficie di un rettangolo verde è pari a 5 radici. La superficie in verde, formata dal quadrato e dai due rettangoli, è dunque nota e pari a 39. La superficie del quadrato azzurro è 25. Se allora si somma 25 a 39 si trova tutto il quadrato grande, 64. Estraendo la radice si trova il suo lato, cioè 8. E togliendo la parte in nero, pari a metà delle radici, cioè 5, Si trova il lato del quadrato incognito, cioè 3.



La seconda costruzione geometrica è basata sulla Prop. VI del II libro degli Elementi di Euclide: se si divide un segmento in parti uguali e ad una parte si aggiunge un altro segmento, il rettangolo costruito con l'intero segmento più il secondo segmento e con il secondo segmento insieme con il quadrato della metà è uguale al quadrato costruito sul secondo segmento più metà del primo. Questo corrisponde alla seguente figura e all'identità algebrica $(s+x)s + (\frac{s}{2})^2 = (\frac{s}{2}+x)^2$:



Ecco la costruzione: per il censo incognito si costruisce un quadrato qualsiasi (in verde chiaro), su un suo lato si costruisce un rettangolo che abbia l'altro lato pari a 10 (in verde più scuro). Questa superficie sarà pari a 39 (un censo più dieci radici). Aggiungiamo un quadrato di lato pari a metà radici. La superficie sarà ora 39+25, cioè 64. Per la proposizione precedente questa superficie è pari al grande quadrato col bordo in viola, di lato pari a metà delle radici più il lato del censo. Dunque questo lato è 8. Sottraendo 5 si ottiene che la radice del censo è 3 e il censo è 9.

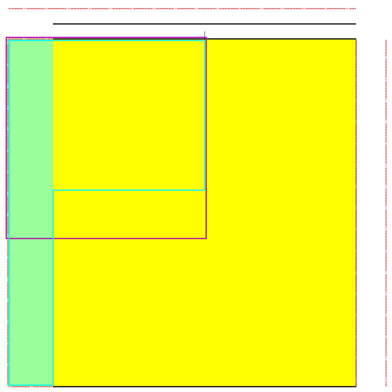
Osserviamo che la regola corrisponde alla formula $\sqrt{(\frac{b}{2}^2) + c} - \frac{b}{2}$. Le radici considerate sono sempre solo quelle positive. Così qui delle due radici dell'equazione $x^2 + bx - c = 0$ con $b, c > 0$, ossia $-\frac{b}{2} + \sqrt{(\frac{b}{2}^2) + c}$ e $-\frac{b}{2} - \sqrt{(\frac{b}{2}^2) + c}$ si costruisce solo la prima.

3.2 Quando radices et numerus equantur censui (Radici e numero uguali a censo)

• *Tunc quadratum medietatis radicum addes super numerum; et super radicem eius, quod provenerit, adde numerum medietatis radicum; et habebis radicem quesiti census.*
Verbi gratia: census equetur decem radicibus et denariis 39. Addam siquidem quadratum medietatis radicum, scilicet 25, super 39; erunt 64; quorum radici, scilicet 8, superadde 5, scilicet medietatem radicum; provenient 13 pro radice quesiti census. Quare census est 169.

◦ Allora aggiungi il quadrato di metà radici al numero; alla sua radice aggiungi il numero di metà radici; avrai la radice del censo cercato.
Esempio: un censo sia uguale a dieci radici e 39 denari. Aggiungi dunque il quadrato di metà radici, cioè 25, a 39; farà 64; alla cui radice, che è 8, aggiungi 5, cioè metà radici; verrà 13 che dà la radice del censo richiesto. Quindi il censo è 169.

Questa la costruzione geometrica a spiegazione del procedimento. Si costruisce il quadrato pari al censo con lato incognito (in rosso tratteggiato) maggiore di 10. Su uno dei suoi lati si costruisce un rettangolo con l'altro lato pari a 10 (in giallo). poiché la superficie del rettangolo giallo è pari a 10 radici, il rettangolo verde che resta deve essere pari a 39. Costruiamo ora un quadrato su metà del lato di 10. Questo quadrato più la striscia verde (cioè la superficie con il bordo azzurro), per la stessa proposizione Elem. II, VI, è pari al quadrato col bordo viola, che è dunque 64. Aggiungendo al suo lato, 8, metà del lato di 10, si ottiene il lato del censo, 13, e dunque il censo, 169.



Osserviamo che la regola qui corrisponde alla formula $\sqrt{(\frac{b}{2}^2) + c} + \frac{b}{2}$. Anche qui delle due radici dell'equazione $x^2 - bx - c = 0$ con $b, c > 0$, ossia $\frac{b}{2} + \sqrt{(\frac{b}{2}^2) + c}$ e $\frac{b}{2} - \sqrt{(\frac{b}{2}^2) + c}$ si costruisce solo la prima, quella positiva.

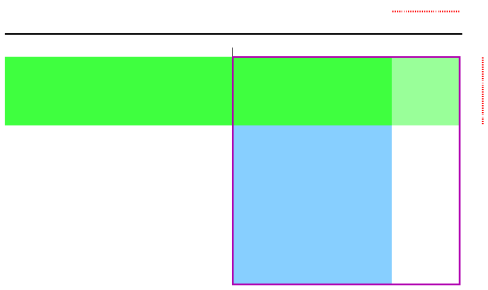
3.3 Quando census et numerus equantur radicibus (Censo e numero uguali a radici)

• *Et cum occurrerit quod census et numerus equentur radicibus scias hoc fieri non posse nisi numerus fiat equalis vel minor quadrato medietatis radicum: qui si equalis fuerit habebitur pro radice census numerus medietatis radicum; et si numerus qui cum censu equatur radicibus fuerit minus quadrato medietatis radicum, extrahe ipsum numerum ex ipso quadrato et eius quod remanserit radicem extrahe ex numero medietatis radicum; et si quod remanserit non erit radix quesiti census tunc addes id quod extraxisti super numerum de quo extraxisti et habebis radicem quesiti census.*
Verbi gratia: census et 40 equantur 14 radicibus. Dimidiatis siquidem radicibus veniunt 7; de quorum quadrato, scilicet 49, extrahe 40, remanent 9; quorum radicem, que est 3, exthrae de mediate radicum, scilicet de 7, remanebunt 4 pro radice quesiti census, census est 16; quibus additis cum 40 faciunt 56 que sunt radices 14 eiusdem census, cum ex ducta radice de 16 in 14 venient 56.
Vel radicem de 9 adde super 7, erunt 10 pro radice questiti census; et sic census erit 100 quo addito cum 40 faciunt 140 que sunt radices 14 de 100; cum ex multiplicatione radicis de 100 in 14 provenient 140; et sic cum non solvetur questio cum diminutione, solvetur sine dubio cum additatione.

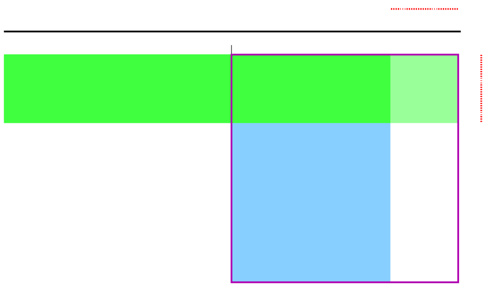
◦ E se capitasse che censo e numero siano uguali a radici sappi che questo non può essere a meno che il numero sia minore o uguale al quadrato di metà radici. Se fosse uguale si avrebbe per radice del censo il numero di metà radici. E se il numero che con il censo è uguale a radici fosse meno del quadrato di metà radici, sottrailo da quel quadrato e sottrai la radice di ciò che resta dal numero di metà radici.

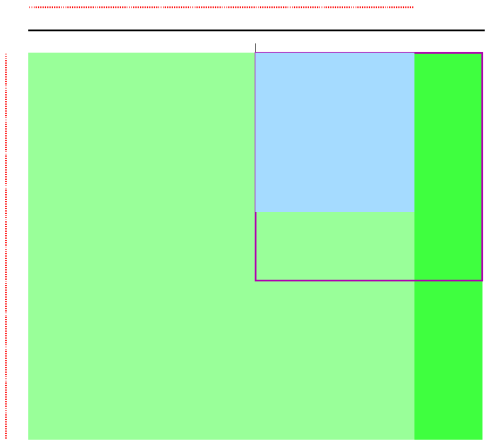
Esempio: un censo e 40 uguale a 14 radici. Dimezzando le radici si ha 7, dal loro quadrato, cioè 49, togli 40, rimane 9; sottrai la sua radice, cioè 3, da metà delle radici, cioè 7; rimarrà 4 come radice del censo cercato e il censo è 16; questo sommato con 40 fa 56 che sono 14 radici dello stesso censo, poiché moltiplicando la radice di 16 per 14 viene 56.
Oppure somma la radice di 9 con 7, verrà 10 come radice del censo cercato; e così il censo sarà 100 che sommato a 40 fa 140 che sono 14 radici di 100 poiché dal prodotto della radice di 100 per 14 viene 140. E così se non si risolvesse la questione con la sottrazione, si risolverà senza dubbio con l'addizione.

La costruzione geometrica che spiega la regola si serve della Prop. V del libro II degli Elementi: se si divide un segmento in parti uguali e in parti disuguali, il rettangolo delle parti disuguali, più il quadrato della differenza tra la parte maggiore e la metà della linea, è uguale al quadrato della metà. Questo corrisponde alla seguente figura (la parte in verde scuro più il quadrato azzurro sono uguali al quadrato con il bordo viola) e all'identità algebrica: $(s-x)x + (\frac{s}{2}-x)^2 = (\frac{s}{2})^2$.



Ecco la costruzione. Si traccia un segmento lungo 14 e su una parte si costruisce il censo (quadrato verde chiaro). Ci sono due casi: il lato del censo è minore della metà di 14 oppure è maggiore. In ogni caso si completa il rettangolo che ha come lati 14 e il lato del censo (parte in verde scura e verde chiara). Questo rettangolo sarà pari a 14 radici. Poiché il quadrato verde chiaro è il censo, la parte rimanente (verde scuro) sarà 40. Questa sommata al quadrato azzurro è, per la prop. V del libro II, uguale al quadrato con il bordo viola, cioè 49. Dunque il quadrato azzurro è 9 e il suo lato è 3.





Primo caso: il lato del censo (rosso tratteggiato) è minore della metà. Per ottenere il lato del censo da 7 tolgo 3. Secondo caso: il lato del censo (rosso tratteggiato) è maggiore della metà. Per ottenere il lato del censo a 7 aggiungo 3.

3.4 Un problema da risolvere con le regole precedenti

Si tratta del primo dei problemi che conducono a uno dei casi composti.

- *Divisi in duas partes 12 et multiplicavi unam earum per 27; et quod provenit fuit equale quadrato alterius partis.*
Sic facies: pone rem pro una partium, remanebunt 12, minus re pro alia; quibus multiplicatis per 27 faciunt 324 minus 27 rebus; et multiplica rem in re, scilicet prima partem in se, proveniet census qui equatur denariis 324 minus 27 rebus; quibus rebus additis utrique parti veniet census et 27 res que equantur denariis 324; et sic reducta est hec questio ad unam ex tribus compositis regulis, ad eam videlicet in qua census et radices equantur numero. Unde ut procedas secundum ipsam regulam multiplica $13+\frac{1}{2}$*, scilicet dimidium radicum in se, erunt* $182+\frac{1}{4}$ *que adde cum 324 erunt* $506+\frac{1}{4}$*; quibus radicem invenias sic: fac quartas ex eis, erunt 2025, cui numero radicem invenias, eritque 45; que divide per radicem de 4, que sunt sub virga, scilicet per 2, exibunt* $22+\frac{1}{2}$*, de quibus extrahe medietatem radicum, remanebunt 9 per radicem census, que sunt una pars: a quibus usque in 12 desunt 3 pro secunda parte.*

◦ Ho diviso in due parti 12 e ho moltiplicato una delle due parti per 27; quel che è venuto era uguale al quadrato dell'altra parte.
Fa' così: prendi la cosa come una delle due parti; rimarranno 12 meno la cosa per l'altra; moltiplicati questi per 27 viene 324 meno 27 cose; moltiplica la cosa per la cosa, cioè la prima parte per se stessa; viene il censo che è uguale a 324 denari meno

27 cose.
(restauratio) Aggiungendo queste (27) cose da entrambe le parti viene che il censo e 27 cose sono uguali a 324 denari; e così questa questione si è ridotta a una delle tre regole composte, a quella cioè in cui censo e radici sono uguali a numero.
(regola) Dunque per procedere secondo quella regola moltiplica $13 + \frac{1}{2}$, cioè metà radici, in sé, saranno $182 + \frac{1}{4}$; sommale con 324, saranno $506 + \frac{1}{4}$, la cui radice trova così: fanne quarti, saranno 2025, e a questo numero trova la radice, sarà 45; dividila per la radice di 4, che sta sotto il segno di frazione, cioè per 2, verrà $22 + \frac{1}{2}$, di questo estrai la metà delle radici, rimarrà 9 per la radice del censo che è una parte; a questa per arrivare a 12 manca 3, che è la seconda parte.