Momenti della storia delle equazioni algebriche

Da Al Khwarizmi a Galois

La nascita della teoria delle equazioni

- ***Al-kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa'l-muqabala***

(Piccolo libro sul calcolo con al-jabr e al-muqabala**)**

- Scritto a Bagdad tra l'811 e l'833
- **Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi** (Maometto figlio di Mosé nativo del Kwarezm)
- Dedicato al califfo Al-Mamun

Descrizione del trattato di Al-Khwarizmi

- Una prima parte che in seguito denomineremo ***Algebra*** in cui vengono introdotte le equazioni di primo e secondo grado e rudimenti di calcolo algebrico
- Una seconda parte in cui si presentano alcuni problemi mercantili
- La terza parte riguarda problemi di suddivisione di eredità

... i numeri richiesti per calcolare con al-jabr e al-muchabala

sono di tre generi

jidr o *shay*	*radix* o *res*	*cosa*	x
mal	*census*	*censo*	x^2
dirham	*numerus*	*numero*	a,b,c

… un numero appartenente a una delle tre classi può essere uguale al numero di un'altra classe

1. censi uguali a cose	$ax^2=bx$
2. censi uguali a numero	$ax^2=b$
3. cose uguali a numeri	$ax=b$

coefficienti e soluzioni strettamente positivi

questi tre tipi, cioè le cose, i censi e i numeri possono essere combinati insieme e si creano tre nuovi generi composti

4. censi e cose uguali a numeri	$ax^2+bx=c$
5. censi e numeri uguali a cose	$ax^2+c=bx$
6. cose e numeri uguali a censi	$bx+c= ax^2$

.4.

$$.x=\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}}-\frac{b}{2a} \qquad x=\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}} \qquad .x=\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}}+\frac{b}{2a}$$

Al-jabr e al muqabala

- ***Al-Jabr*** **consiste nel portare una quantità sottratta da un lato di una equazione all’altro rendendolo positivo**

  Esempio: sostituire 7x+2=5-2x con 9x+2=5

  8x-3=2+x con 8x=5+x

- ***Al-muqabala*** **consiste nel sostituire due termini dello stesso tipo ma su lati differenti di una equazione con la loro differenza sul lato del termine maggiore**

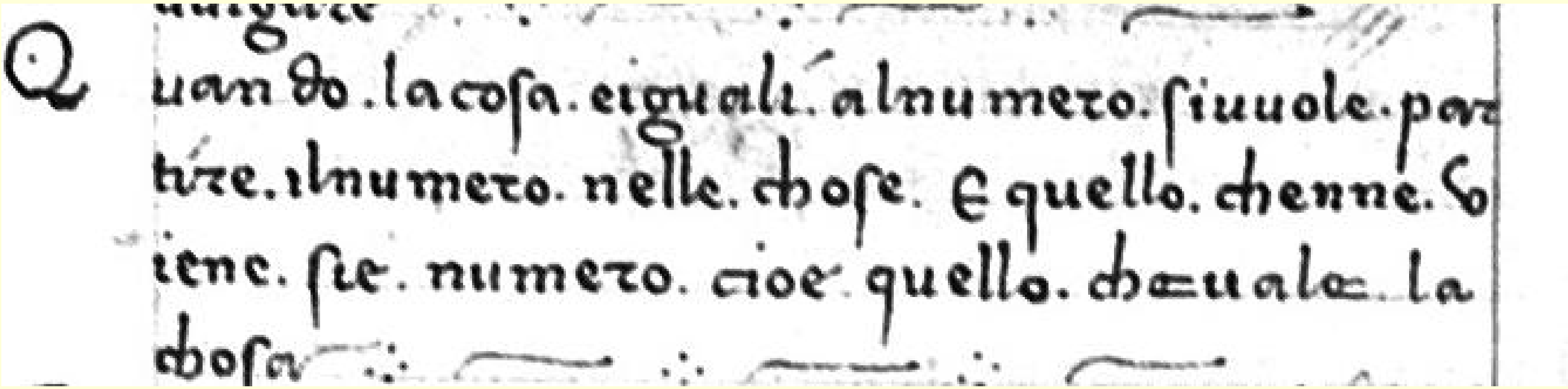
  Esempio: 9x+2=5 con 9x=3

  8x=5+x con 7x=5

Caratteristiche dell'*Al-jabr*

- Dal punto di vista formale è del tutto priva di simboli, tutti i procedimenti ed i calcoli vengono espressi a parole, per indicare questo gli storici della matematica parlano di *algebra retorica*
- L'algebra è considerata uno strumento per risolvere problemi

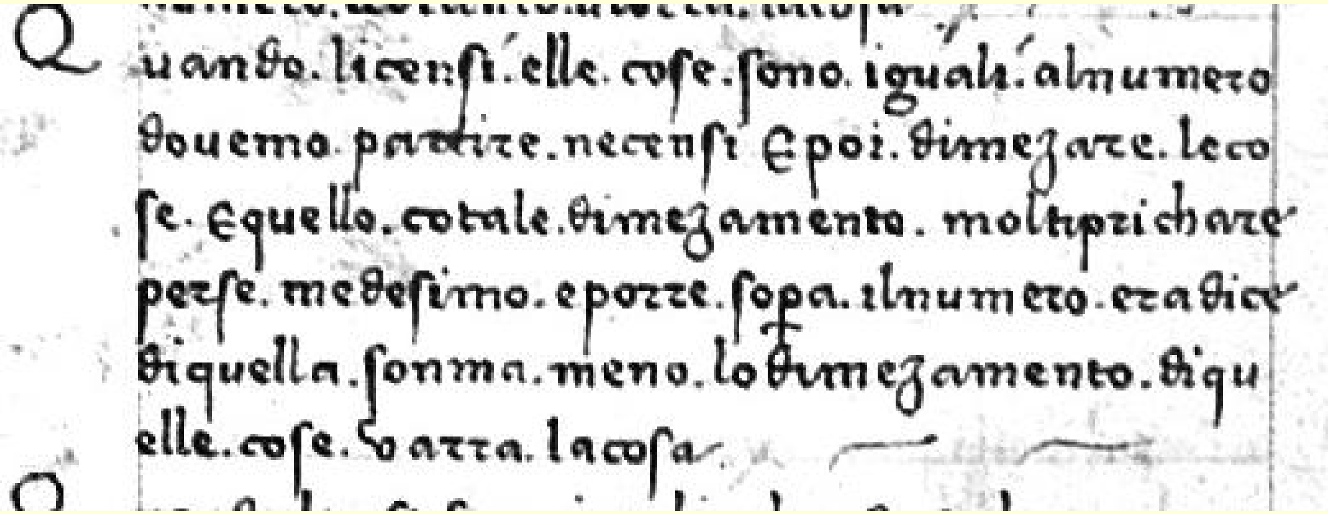
La prima regola semplice



Quando la cosa è iguali al numero si vuole partire il numero nelle chose. E quello chenne viene sie numero cioè quello che vale la chosa

$ax=b$ $b/a=x$

La prima regola composta


Quando. licensi. elle. cose. sono. iguali. al numero
douemo. partire. necensi E poi. dimezare. le co
se. Equello. cotale. dimezamento. moltipricare
perse. medesimo. e porre. sopa. il numero. e radice
diquella. somma. meno. lo dimezamento. diqu
elle. cose. vatra. la cosa.

ax2+bx=c

x2+b/a x=c/a

$$.x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}$$

L’algebra arriva in Europa

- **Nel XII secolo vengono effettuate ben tre traduzioni latine del trattato di Al-khwarizmi la più diffusa è quella di**

  Gherardo da Cremona

- **Anche il *Liber abaci (1202)* di Leonardo Fibonacci contiene un lungo capitolo d’algebra**

L’algebra in Italia nei secoli XIV-XV

- Viene coltivata e diffusa nell’ambito delle scuole d’abaco, che a partire dalla fine del XIII secolo erano attive nelle principali città
- Compito di queste scuole era quello di insegnare l’aritmetica e le tecniche commerciali a quanti volessero dedicarsi al commercio
- L’algebra era considerata uno strumento molto versatile per risolvere ogni genere di problemi, tuttavia il suo insegnamento non faceva parte del curriculum di base
- La sua conoscenza era titolo di vanto per i maestri

Sviluppo dell’algebra in Italia nei secc. XIV-XV
prima parte

- **Non vi sono notevoli avanzamenti**
- **Si affrontano le risoluzioni di equazioni binomiali di grado superiore al secondo e di equazioni trinomie di grado superiore al secondo ma ad esso riconducibili**

$$ax^n = b, n \geq 2$$

$$ax^{2^{n+m}} + bx^{n+m} = cx^n$$

$$ax^{2n} + bx^n = c$$

Sviluppo dell’algebra in Italia nei secc. XIV-XV seconda parte

- C’è una ricerca di risolvere equazioni di terzo e quarto grado non riconducibili a quelle di secondo e vengono proposte formule risolutive sbagliate o valide solo in casi particolari
- Si risolvono con l’algebra problemi sempre più complessi

La prima algebra a stampa

- *Summa de aritmetica geometria proportioni et proportionalità,* Venezia,1494
- Autore *Luca Pacioli* (1445-d.1515)
- Scritta in volgare
- Contiene un lungo capitolo di algebra

Luca Pacioli

- **De numero cosa e cubo fra loro composti overo numero censo e cubo overo numero cubo e censo di censo non s'è posuto finore bene formare regole generali**

$$ax^3 + bx = c$$

$$ax^3 + bx^2 = c$$

$$ax^4 + bx^3 = c$$

Secolo XVI: nuovi risultati

- **Bologna, Scipione dal Ferro ca. 1515**
- **Risolve**

$$x^3 + px = q$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}}$$

La regola dall'Ars Magna

REGVLA.

Deducito tertiam partem numeri rerum ad cubum, cui addes quadratum dimidij numeri æquationis, & totius accipe radicem, ſcilicet quadratam, quam ſeruabis, vnique dimidium numeri quod iam in ſe duxeras, adiicies, ab altera dimidium idem minues, habebiſque Binomium cum ſua Apotomæ, inde detracta ℞. cubica Apotomæ ex ℞. cubica ſui Binomij, reſiduum quod ex hoc relinquitur, eſt rei æſtimatio. Exemplum,

cubus p̄. 6. rebus æqualis 20.
2. 20.
8. 10.
108.
℞. 108. p̄. 10.
℞. 108. m̄. 10.
℞. v. cu. ℞. 108. p̄. 10.
m̄. ℞. v. cu. ℞. 108. m̄. 10.

$$x^3 + 6x = 20$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108}+10} + \sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$$

Scipione dal Ferro muore nel 1526

- **Aveva comunicato i suoi risultati solo ad alcuni allievi e al genero *Annibale della Nave* al quale lascia anche il suo quaderno di appunti in cui aveva trascritto la soluzione**
- **Nel 1535 *Niccolò Tartaglia* (1499-1557)afferma di avere trovato le soluzioni a tutti e tre i casi**

Girolamo Cardano (1501-1576)

- **Nel 1539 riceve da Tartaglia le soluzioni dietro la promessa di non divulgarle**
- **1542 Cardano e il genero Ludovico Ferrari a Bologna visionano il quaderno di Scipione dal Ferro**
- **1545 Cardano pubblica l'*Ars Magna* trattato tutto dedicato all'algebra**

L’Ars Magna di Cardano

- Contiene le risoluzioni di tutti i possibili casi delle equazioni di terzo grado con dimostrazioni geometriche
- Soluzioni di alcuni casi di equazioni di quarto grado dovute a Ludovico Ferrari (1522-1565)
- Riconosce i contributi di dal Ferro e Tartaglia

Tartaglia si arrabbia

- Nel 1546 pubblica *Quesiti e invenzioni diverse* allo scopo di chiarire la parte avuta nella scoperta, denunciare di spergiuro Cardano e accusarlo di scarsa conoscenza matematica
- Cartelli di Matematica disfida fra Tartaglia e Ferrari

Un consiglio bibliografico

Fabio Toscano

La formula segreta:

Tartaglia, Cardano e il duello matematico che infiammò l'Italia del Rinascimento

SIRONI, 2009

Rafael Bombelli (1526-d.1572)

- **Nella sua *Algebra(1572)*fornisce un resoconto completo di tutte le conoscenze algebriche dell'epoca arricchite di molti contributi personali**
- **Il più importante riguarda l'introduzione dei numeri complessi**
- **Finisce il periodo dell'algebra italiana**

L'algebra diventa simbolica

- E' nella *Géometrié* (1637)di René Descartes (1596-1674) che troviamo per la prima volta tutto il simbolismo ancora attualmente in uso in algebra
- i segni attualmente in uso per indicare le operazioni aritmetiche
-

Descartes 1

- **Le ultime lettere dell'alfabeto x,y,z,w**

per indicare le incognite e le prime a,b,c,.. Per indicare i coefficienti

- **Le equazioni come polinomi eguagliati a zero**
- **Considerazione di radici positive negative e immaginarie**

Da la Géometrié

Vt ſi loco

$$+x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \propto 0,$$

ſcribatur

$$+x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \propto 0,$$

habebitur Æquatio, in quâ una tantùm eſt vera radix, quæ eſt 5; & tres falſæ, quæ ſunt 2, 3, & 4.

Descartes 2

- Le ultime lettere dell’alfabeto x,y,z,w

per indicare le incognite e le prime a,b,c,.. Per indicare i coefficienti

- Le equazioni come polinomi eguagliati a zero
- Considerazione di radici positive negative e immaginarie

Il secolo XVIII, 1

- Ricerca di una dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra cioè del fatto che ogni equazione algebrica ha almeno una radice reale o complessa
- Da cui discende che ogni equazione algebrica di grado n ha esattamente n radici

Il secolo XVIII, 2

- Ricerca di una formula risolutiva per radicali per le equazioni di grado superiore al quarto
- Una formula si dice per radicali quando i valori dell'incognita sono espressi operando sui coefficienti mediante le quattro operazioni razionali ed estrazioni di radice

Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

- **Nel 1799 a soli 19 anni dimostra nella sua tesi di laurea il teorema fondamentale dell’algebra**

Paolo Ruffini (1765-1822)

- **Nel 1799 pubblica un'opera in due volumi di complessive 516 pagine dal titolo**
- ***Teoria generale delle equazioni in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto***
- **Contiene oltre alla dimostrazione di impossibilità una esposizione chiara e completa della teoria generale delle equazioni algebriche**

Niels Henrik Abel (1802-1829)

- **ignaro dell'opera di Ruffini nel 1824 Abel dimostra l'impossibilità della risoluzione per radicali dell'equazione generale di quinto grado e due anni più tardi estende il risultato a tutte le equazioni di grado superiore al quarto**
- **Nel 1828 fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché una equazione algebrica di grado qualunque sia risolubile per radicali**

Evariste Galois (1811-1832)

- **A soli venti anni nel 1831 Galois scrive una memoria intitolata**
- ***Mémoire sur les conditions de résolubilité des equations par radicaux***
- **Pubblicata solo nel 1846**
- **Condizione necessaria e sufficiente affinché una equazione algebrica sia risolubile per radicali**

Dall’algebra classica all’algebra moderna

- **Galois associa ad ogni equazione algebrica un nuovo oggetto che egli chiama *gruppo* e dimostra che un’equazione è risolubile per radicali se e solo se il suo gruppo ha certe caratteristiche**

Riassumendo

- **811-33 Al-Khwarizmi: la nascita dell’algebra**
- **1180-1202- traduzioni latine**
- **1300-1500- sviluppo in Italia**
- **1515-1545- finalmente nuovi risultati**
- **1637- Descartes l’algebra diventa simbolica**
- **1799- Gauss, Ruffini**
- **1828- Abel**
- **1832- Galois**