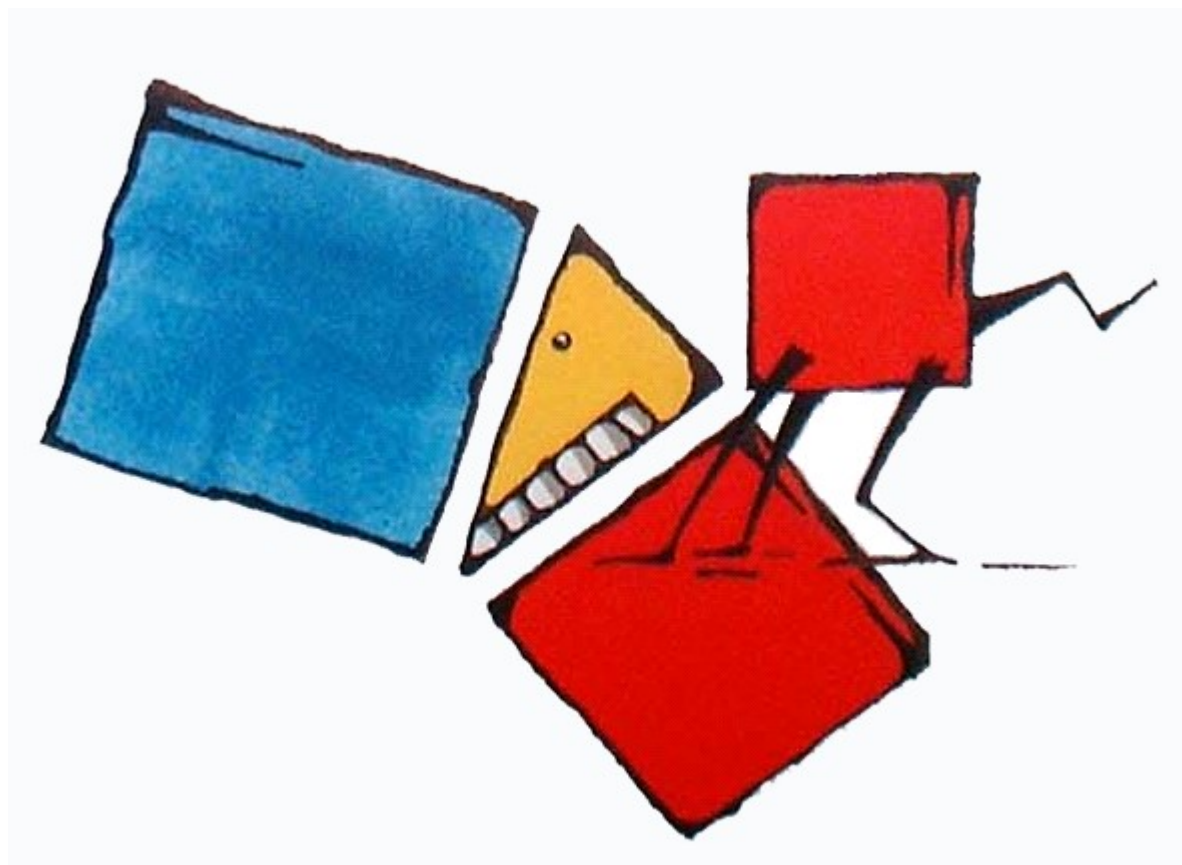




IL GIARDINO DI ARCHIMEDE
unmuseo
per la [matematica]



Lecture dal *Liber abaci*

IL LIBER ABACI



Codex 2009.100



IL

LIBER ABBACI

DI

LEONARDO PISANO

PUBBLICATO

SECONDO LA LEZIONE DEL CODICE MAGLIABECHIANO

C. I, 2016, *Badia Fiorentina*, n.° 73.

DA

BALDASSARRE BONCOMPAGNI

SOGRO ORDINARIO DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI, E SOGRO
CORRISPONDENTE DELL'ACCADEMIA REALE DELLE SCIENZE DI TORINO,
DELLI REALI ACCADEMIE DELLE SCIENZE DI NAPOLI,
E DELLA PONTIFICIA ACCADEMIA DELLE SCIENZE
DELL'ISTITUTO DI BOLOGNA

1066

1857

- *Il Liber abaci*: introduzione



Mio padre, che risiedeva a Bugia quale pubblico notaio per i mercanti pisani, mi prese fanciullo con sé, e considerata la futura utilità e comodità volle che andassi per alcuni giorni a studiare l'abaco. Introdotta così nell'arte delle nove cifre degli Indiani, questa scienza mi piacque tanto, che con molti studi e dispute imparai tutto quanto si studiava di essa in Egitto, Siria, Grecia, Sicilia e Provenza, nei luoghi di commercio dove andai in *causita*

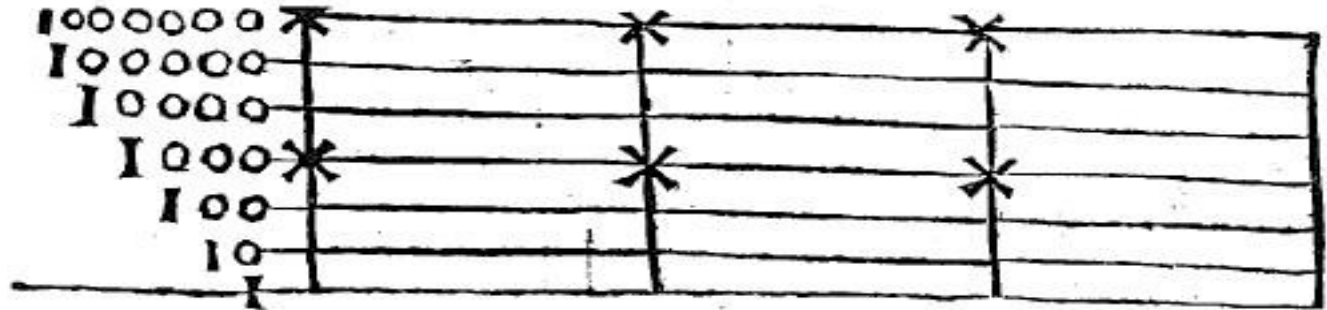
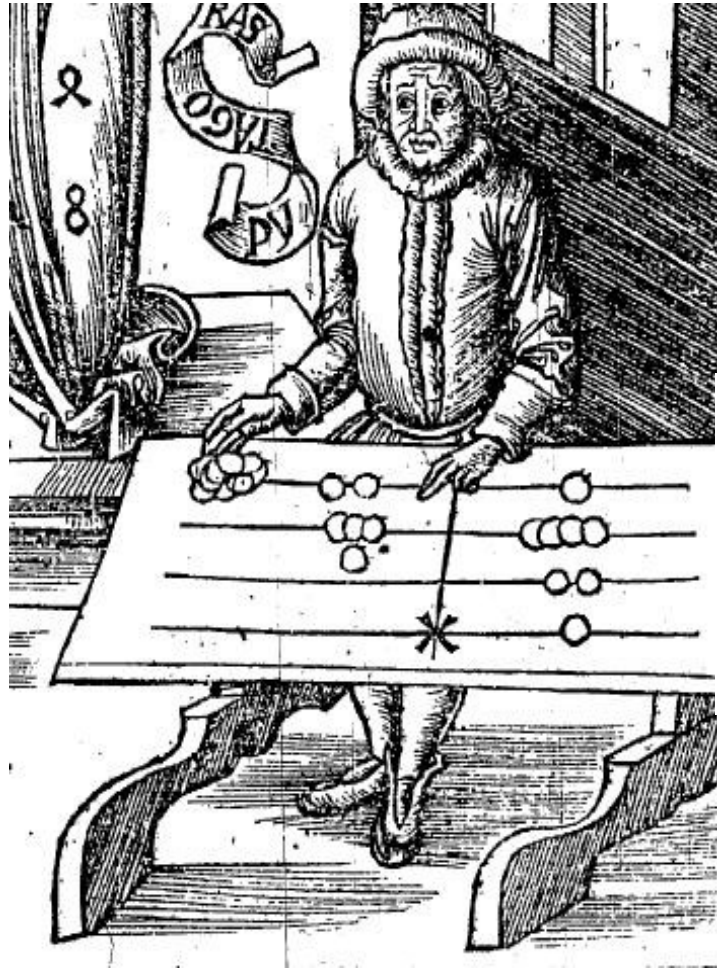
- **L'ABACO**



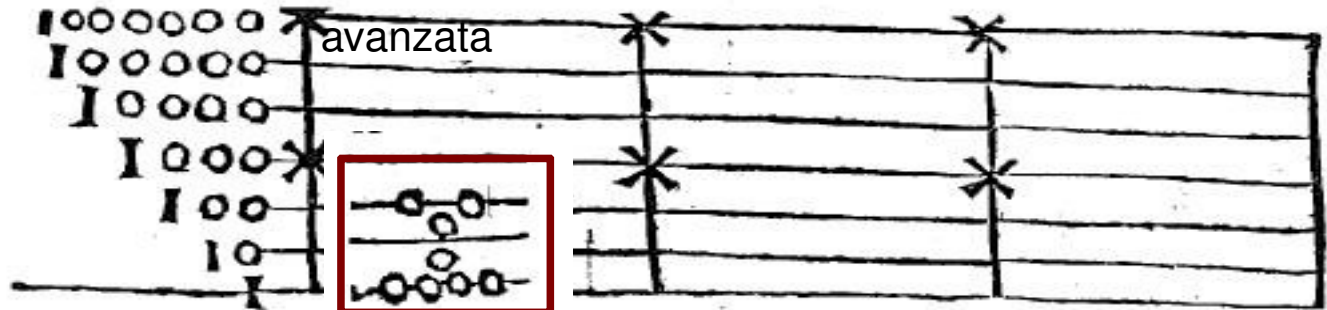
- **L'ABACO: le tavole di conto**

da Reisch, *Margarita Philosophica*,

1504



versione
avanzata



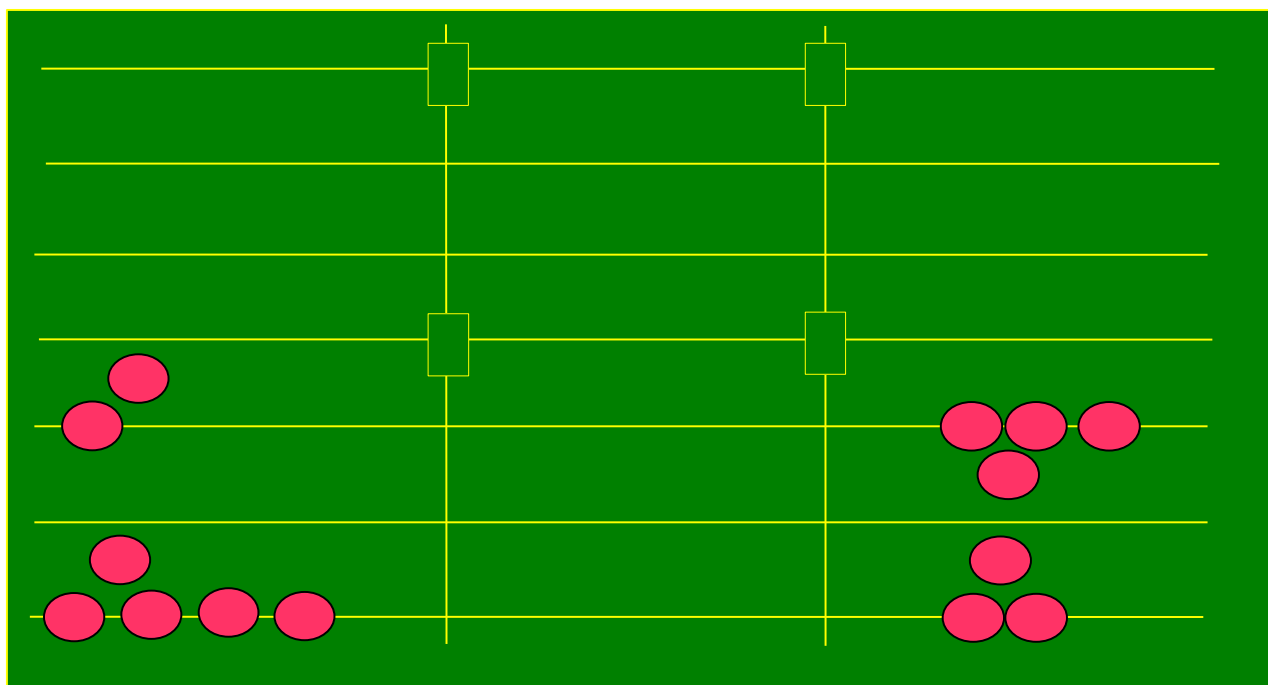
259

- **L'ABACO: le tavole di conto**

seicentonove +
trecentocinquantesette

DCIX
CCCDVII

D
C
L
X
I

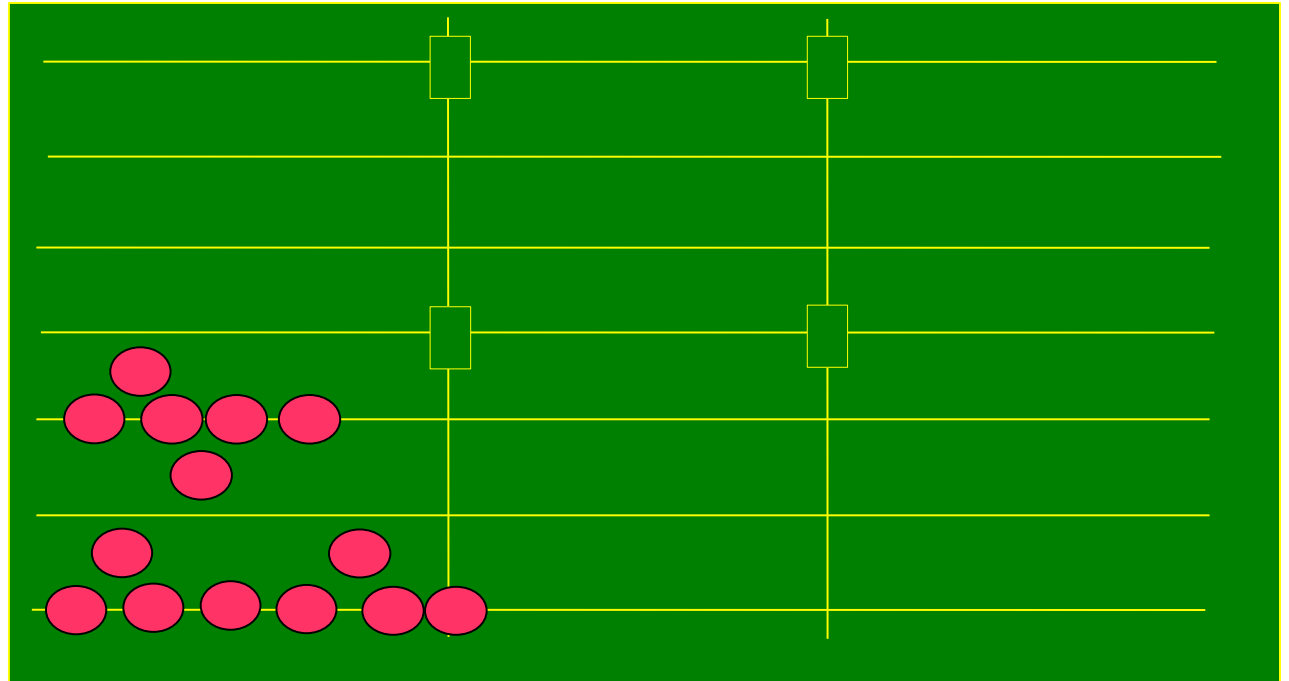


- **L'ABACO: le tavole di conto**

seicentonove +
trecentocinquantesette

DCIX
CCCDVII

D
C
L
X
V
I

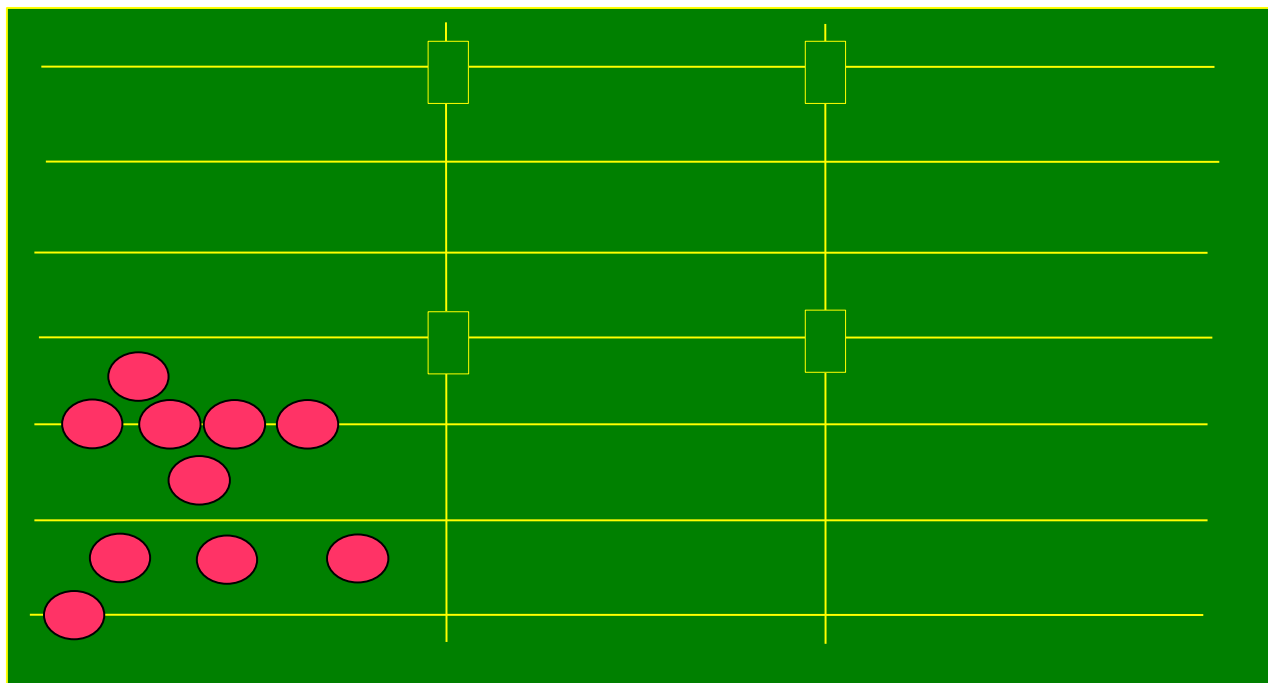


- **L'ABACO: le tavole di conto**

seicentonove +
trecentocinquantesette

DCIX
CCCDVII

D
C
L
X
V
I

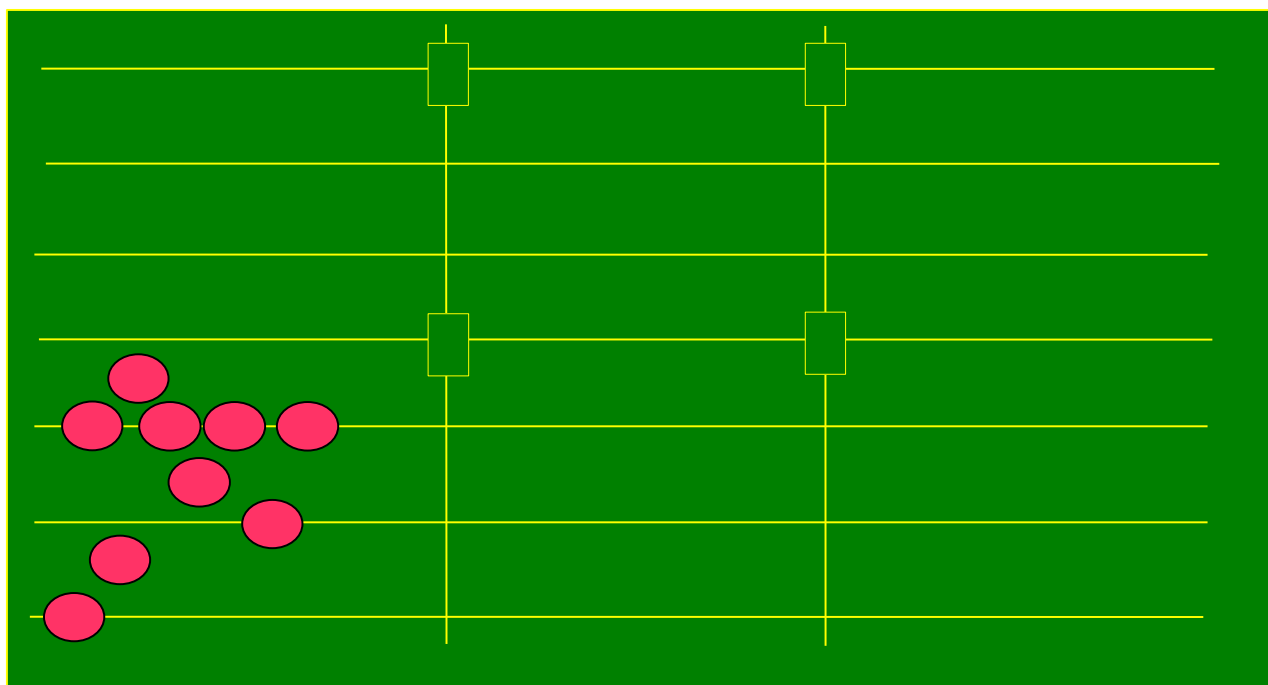


- **L'ABACO: le tavole di conto**

seicentonove +
trecentocinquantesette

DCIX
CCCDVII

D
C
L
X
V
I



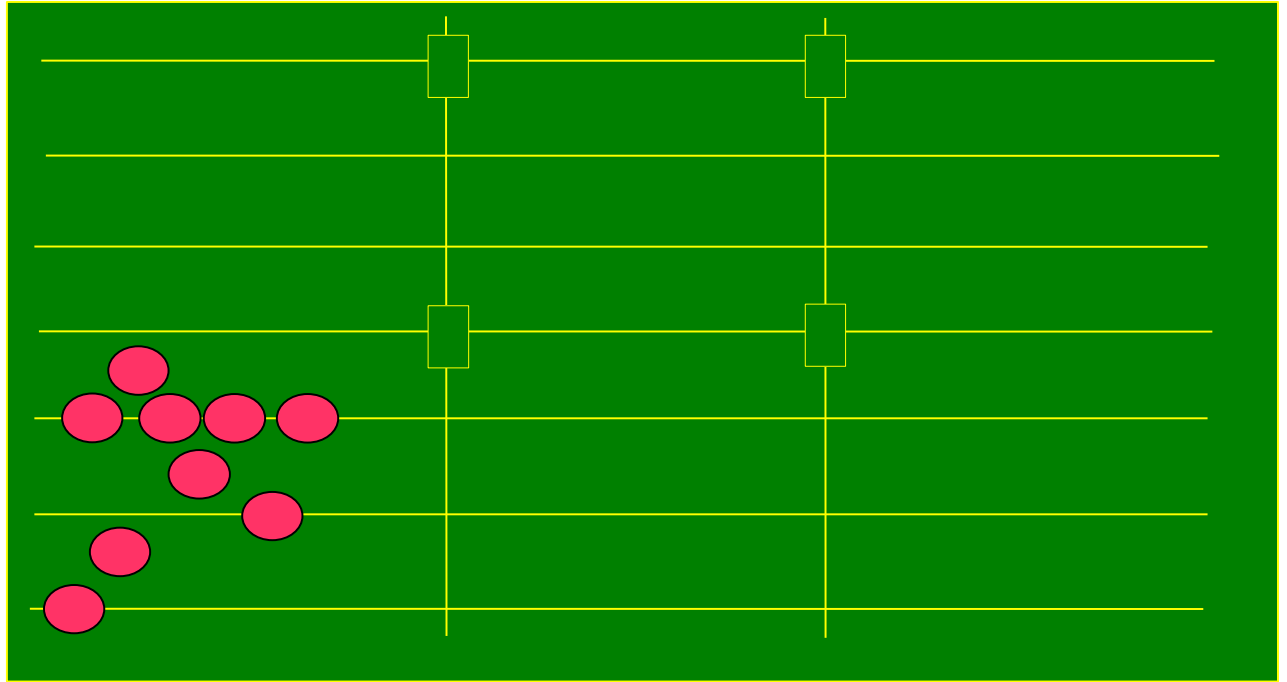
- **L'ABACO: le tavole di conto**

seicentonove +
trecentocinquantesette

novescentosessantasei

DCCCCLXVI

D
C
X
I
L
V



● Il Liber abaci: inizio

Explicit prologus. Incipiunt capitula.

De cognitione nouem figurarum yndorum, et qualiter cum eis omnis numerus scribatur; et qui numeri, et qualiter retineri debeant in manibus, et de introductionibus abaci.

1
4
8 | (1)

De multiplicatione integrorum numerorum.

De additione ipsorum ad inuicem.

De extractione minorum numerorum ex maioribus.

De diuisione integrarum (sic) numerorum per integros.

De multiplicatione integrarum (sic) numerorum cum ruptis atque ruptorum sine sanis.

De additione ac extractione et diuisione numerorum integrarum cum ruptis atque partium numerorum in singulis partibus reductione.

De emptione et venditione rerum uenaliu et similium.

De baractis rerum uenaliu et de emptione bolsonalie, et quibusdam regulis similibus.

De societatibus factis inter consocios.

De consolamine monetarum atque eorum regulis, que ad consolamen pertinent.

De solutionibus multarum positarum questionum quas erraticas appellamus.

De regula elcataym qualiter per ipsam fere omnes erraticas questiones soluantur.

De reperiendis radicibus quadratis et cubitis ex multiplicatione et diuisione seu extractione earum in se, et de tractatu binomiorum et recisorum et eorum radicum.

De regulis proportionibus geometrie pertinentibus: de questionibus aliebre et almuchabale.

Incipit primum capitulum.

Nouem figure indorum he sunt

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Cum his itaque nouem figuris, et cum hoc signo 0, quod arabice zephyrum appellatur, scribitur quilibet numerus, ut inferius demonstratur. Nam numerus est unitatum per-fusa collectio siue coagregatio unitatum, que per suos in infinitum ascendit gradus. Ex quibus primus ex unitatibus, que sunt ab uno usque in decem, constat. Secundus ex decenis, que sunt a decem usque in centum, fit. Tertius fit ex centenis que sunt a centum usque in mille. Quartus fit ex millenis que sunt a mille usque in decem milia, et sic sequentium graduum in infinitum, quilibet ex decuplo sui antecedentis constat. Primus gradus in descriptione numerorum incipit a dextera. Secundus uero uersus sinistram sequitur primum. Tertius secundum sequitur. Quartus tertium, et quintus quartum, et semper sic uersus sinistram gradus gradum sequitur. Figura itaque que in primo reperitur gradu se ipsam representat, hoc est: si in primo gradu fuerit figura unitatis, unum representat; si binarii, duo; si ternarii, tria, et ita per ordinem que secuntur, usque si nouenarii: nouem figure quidem que in secundo gradu fuerint, tot decenas representant, quot in primo unitates; hoc est si figura unitatis secundum occupat gradum, denotat decem; si binarii, uiginti; si ternarii, triginta; si nouenarii, nonaginta.

Figura namque que in tertio fuerit gradu, tot centenas denotat, quot in secundo decenas, uel in primo unitates, ut si figura unitatis centum; si binarii, ducenta; si ter-

narii, trecenta, et nouenarii, nongenta. Ipsa igitur que fuerit in quarto gradu tot mil-lenas quot in tertio centenas, aut in secundo decenas, uel in primo unitates denotat; et sic semper mutando gradum, numerus decuplando ascendit. Et ut hoc quod dictum est lucidius declarescat, ipsum cum figuris ostendatur. Si figura septenarii fuerit in primo gradu, et ternarii in secundo, ambe insimul 37 denotant; uel econtra: figura ternarii in primo, et septenarii in secundo, 73 denotabunt. Item si figura quaternarii fuerit in primo, et unitatis in secundo sic 14, nimirum .XIIII. denotabunt: uel si figura unitatis fuerit in primo, et quaternarii in secundo sic 41, denotabunt .XLI. Rursus in primo 73, et in secundo faciunt 27; contrarium enim facit 72. Si autem septuaginta tantum scribere uoluerit, ponat in primo gradu 0, et post ipsum ponat figuram septenarii, sic 70; si octua-ginta sequatur zephyrum figuram octonarii sic 80: hac itaque demonstratione quemlibet numerum a decem usque in centum cum duabus figuris scribere potes. Cum tribus uero a centum scribitur usque in mille; ut si figura octonarii fuerit in primo, et qui-narii in secundo, et unitatis in tertio 138, centum quinquaginta octo denotabunt; et econuerso: si figura unitatis fuerit in primo, et quinary in secundo, et octonarii in tertio 831, octigenta et quinquaginta unum denotabunt; uel econtra: si figura octo-narii fuerit in primo, et unitatis in secundo, et quinary in tertio, denotabunt 518. Item si permutatim figura quinary fuerit in primo, octonarii in secundo, et unitatis in tertio, denotabunt 185. Item si figura unitatis fuerit in primo, octonarii in secundo, et quinary in tertio, nimirum denotabunt 581: tres uero unitates sic 111, centum unde-cim faciunt. Verum si quinquaginta tantum scribere uolueris, in primo et in secundo gradu ponas zephyra, et in tertio figuram quinary hoc modo 500; et sic cum duobus zephyris quemlibet centenariorum numerum scribere poteris. Et si centenaria cum de-cenis siue unitatibus scribere uolueris, ponas in primo gradu zephyrum; in secundo de-cenas, et in tertio centenas quas uolueris. Verbi gratia: si in primo gradu fiat zephyrum, et in secundo figura nouenarii, et in tertio binarii, denotabunt 290. Si autem absque de-cenis centenaria cum unitatibus scribere uolueris, pones in secundo gradu, scilicet in loco decenarii zephyrum, et in primo numerum unitatum quem uoluerit, et in tertio centenariorum: ut si in primo fuerit figura nouenarii, et in secundo zephyrum, et in tertio binarii 209; et sic secundum supradictam demonstrationem qualem uolueris, numerus a centum usque in mille scribes cum tribus figuris. Cum quattuor namque a mille usque in decem milia, ut in sequenti cum figuris numeris super notatis ostenditur.

M .I	MMXXIII	MMMXXII	MMMMXX	MMMMMDC	MMM MCCI	MCCXXXIII	MMMMCCCXXI
1001	2023	3022	3020	5600	3000 1111	1234	4321

Et sic in reliquis numeris est procedendum. Cum quinque namque figuris scribuntur omnes numeri, incipiendo a decem milia usque ad centum milia. Cum sex uero, a cen-tum milibus usque in mille milia, et sic deinceps, addendo figuram figuris, numerus gradatim in decuplum ascendit. Vnde si contigerit quod aliquem numerum multarum figurarum propter multitudinem figurarum, quis legere uel intelligere nequeat, quali-ter legere et intelligere ipsum debeat, ostendere procurabo.

(1) Nei margini laterale esterno ed inferiore del recto della carta 1 del sopraccitato codice Magliabechiano C. I. 2616. *Badia Fiorentina* n.° 73, presso alla linea 40 ed ultima del medesimo recto, trovasi scritto in due linee in carattere più moderno del rimanente di questo recto: «Leonardi Pisani Algorismi Geometrie!! Inter Codices designatur num: 44: ».

● *Il Liber abaci: capitoli*

1. La conoscenza delle nove cifre indiane, e come con esse si scrivano tutti i numeri; quali numeri si possano tenere nelle mani e come, e l'introduzione all'abaco.
2. La moltiplicazione degli interi.
3. L'addizione degli stessi.
4. La sottrazione dei numeri minori dai maggiori.
5. La divisione di numeri interi per numeri interi.
6. La moltiplicazione degli interi con le frazioni, e delle frazioni senza interi.
7. La somma, la sottrazione e la divisione degli interi con le frazioni e la riduzione delle parti di numeri in parti singole.
8. L'acquisto e la vendita delle merci e simili.
9. I baratti delle merci, l'acquisto delle monete, e alcune regole simili.
10. Le società fatte tra consoci.
11. La fusione delle monete e le regole relative.
12. La soluzione di questioni diverse, dette miscellanee.
13. La regola della doppia falsa posizione, e come con essa si risolvano pressoché tutte le questioni miscellanee.
14. Il calcolo delle radici quadrate e cubiche per moltiplicazione e divisione o da estrazione, e il trattato dei binomi e recisi e delle loro radici.
15. Le regole delle proporzioni geometriche, e le questioni di algebra e almucabala

• *Il Liber abaci: capitoli*

1. De cognitione novem figurarum yndorum, et qualiter cum eis omnis numerus scribatur; et qui numeri, et qualiter retineri debeant in manibus, et de introductionibus abbaci.
2. De multiplicatione integrorum numerorum.
3. De additione ipsorum ad invicem.
4. De extractione minorum numerorum ex maioribus.
5. De divisione integrorum numerorum per integros.
6. De multiplicatione integrorum numerorum cum ruptis atque ruptorum sine sanis.
7. De additione ac extractione et divisione numerorum integrorum cum ruptis atque partium numerorum in singulis partibus reductione.
8. De emptione et venditione rerum venalium et similium.
9. De baractis rerum venalium et de emptione bolsonalie, et quibusdam regulis similibus.
10. De societatibus factis inter consocios.
11. De consolamine monetarum atque eorum regulis, quae ad consolamine pertineant.
12. De solutionibus multarum positarum quaestionum quas erraticas appellamus.
13. De regula elcataym qualiter per ipsam fere omnes erraticae quaestiones solvantur.
14. De reperiendis radicibus quadratis et cubicis ex multiplicatione et divisione seu extractione earum in se, et de tractatu binomiorum et recisorum et eorum radicum.
15. De regulis proportionibus geometriae pertinentibus: de quaestionibus aliebrae et almuchabalae.

• I numeri indiani

Incipit primum capitulum.

Nouem figure indorum he sunt

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Cum his itaque nouem figuris, et cum hoc signo 0, quod arabice zephyrum appellatur, scribitur quilibet numerus, ut inferius demonstratur.

Le nove cifre degli indi sono queste

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Con queste nove cifre e con questo segno 0, che in arabo si chiama “zefiro”, si scrive qualunque numero, come di seguito si mostra.

zero, cifra

صفر

صفر

Digit
0 Fra
del numero zero, il simbolo si usa con il valore di primo ordine
nella scrittura posizionale decimale. La sua origine è in arabo
صفر (sifr).

— = ≡ ≠ √ √ √ √ √

Brahmi



1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Indiano (Gwalior)



१ २ ३ ४ ५ ६ ७ ८ ९ ०

Sanscrito-Devanagari



1 2 3 4 5 6 7 8 9

Arabo Occidentale (Gobar)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Arabo Orientale

1 2 3 4 5 6 7 8 9

XI sec. (Apici)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

XV sec.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

XVI sec. (Durer)

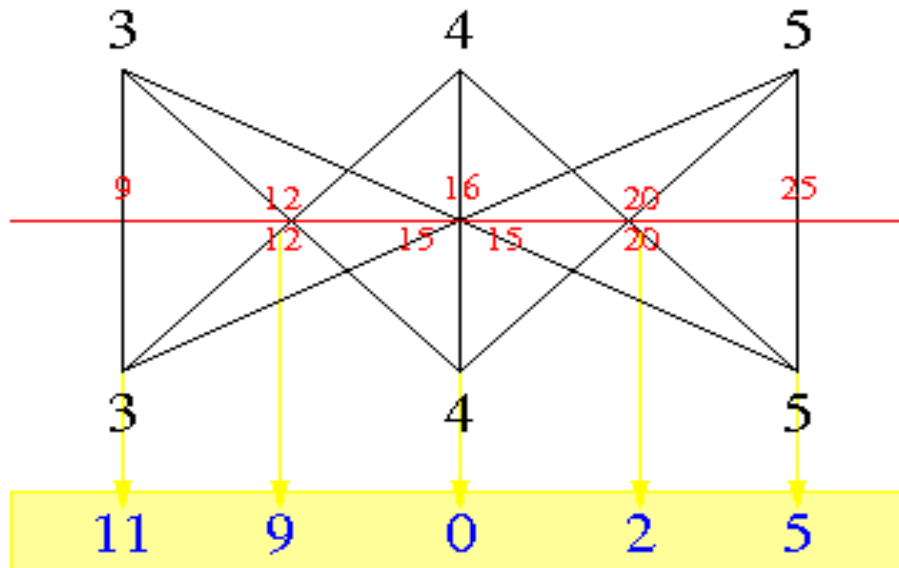
• Le operazioni: moltiplicazioni – cap. 2

Ad cuius rei euidentiā sint equales numeri 345 et 345, quos insimul multiplicare oportet, qui collocentur ad inuicem sicuti in pagina collocati esse cernuntur; et multiplicet 5 per 5 erunt 25, ponat 5 super utrumque 5, sicuti in secunda descriptione cernitur, et pro decenis seruet in manu 2 et multiplicet 3 superioris numeri per 4 subterioris, et 5 inferioris per 4 superioris; quibus additis cum 2 seruatis, erunt 42: ponat 2 super utrumque 4, sicuti in tertia continetur descriptione, et seruentur pro quattuor decenis 4; et multiplicet 5 superioris per 3 subterioris et 5 inferioris per 3 superioris, et 4 per 4, et summa ipsarum trium multiplicationum addatur cum 4 in manu seruatis, erunt 50: ponat 0 super utrumque 3, ut in quarta descriptione ostenditur, et seruentur in manu 5, et multiplicet 4 superioris per 3 inferioris, et 4 inferioris per 3 superioris, et addantur cum 3, erunt 29: ponat 9 post 0, ut in quinta patet descriptione, et seruentur in manu 2, et multiplicet 3 per 3, erunt 9, que addat cum 2, erunt 11, que ponat, ut in sexta et ultima descriptione ostenditur. Que multiplicatio si recta est, per supradictum modum cognoscitur, uidelicet ut addantur figure de 345 superioribus, et dematur inde 9, remanebunt 3; similiter fiat de 345 inferioribus et remanebunt similiter 3; et multiplicentur 3 per 3, de quibus dematur 9, remanet 0 quod habeat pro pensa, tunc colligantur figure que sunt in summa multiplicationis, scilicet 1 et 1 et 2 et 5, erunt 9, de quibus trahantur 9, remanet 0 ut oportet. Assignabo quidem quare multiplicatio secunde figure per secundam additur cum multiplicatione primarum figurarum, in tertiis; quia ut dictum est primus gradus quicumque multiplicat ipsum gradum, facit secundus gradus, quicumque multiplicat secundum gradum, facit post ipsum quem multiplicat. Et sic est primus gradus multiplicat tertium, tertium gradum facit. Et cum secundus multiplicat secundum, facit eundem, silicet tertium, qui est secundus post ipsum quem multiplicat. Ergo oportet cum multiplicatio secundi gradus per secundum

Ad cuius ... figurarum = (6 recto, lin. 18-15; pag. lin. 20 — pag. 12, lin. 2).

prima	345
	345
secunda	5
	345
	345
tertia	25
	345
	345
quarta	025
	345
	345
quinta	9025
	345
	345
Ultima	119025
	345
	345

- Algoritmi per le moltiplicazioni – *crocetta*



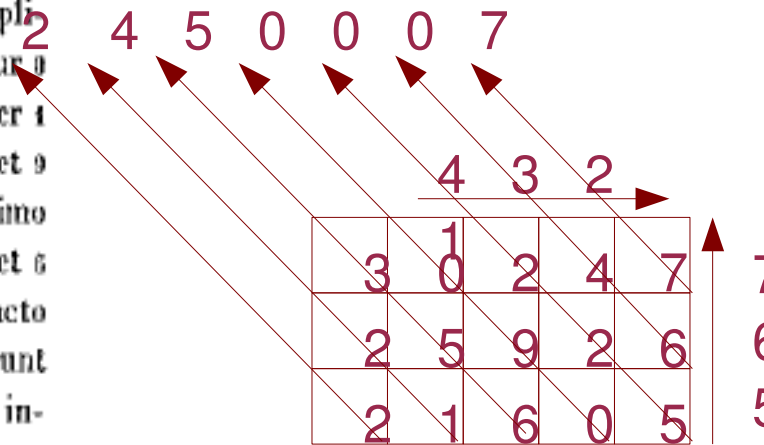
Ad cuius ... figurarum ... (6 recto, lin. 18-15 ; pag. 120 — pag. 12, lin. 2).

prima	345	345
secunda	5	345
tertia	25	345
quarta	025	345
quinta	9025	345
Ultima	119025	345

• Algoritmi per le moltiplicazioni – *quadrilatero*

Est enim alius modus multiplicandi ualde laudabilis, maxime in multiplicandis magnis numeris, quem ostendam in multiplicatione de 567 in 4321. Constituatur quadrilaterum in forma scacherii, habens puncta 5 in longitudine, scilicet unum plus numero figurarum maioris numeri, et habeat in latitudine puncta 3, sicuti sunt tres figure in minori numero, et ponatur maior numerus super quadrilaterum supradictum, et minor ponatur ante ipsum, ut hic cernitur, et multiplicetur prima figura minoris numeri, scilicet 7, per 1, scilicet per primam maioris numeri facies 7, que ponantur in primo puncto superioris linee, scilicet sub ipso 1, et multiplicentur 7 per secundam figuram maioris numeri, scilicet per 2, erunt 14, ponantur 4 sub 2 post posita 7, scilicet in secundo puncto superioris linee, et seruetur 1, cum quo addatur multiplicatio eorundem 7 in 3, erunt 22, ponantur 2 in tertio puncto post 4 posita, et seruentur 2, cum quibus addatur multiplicatio de 7 in 4, scilicet in ultimam figuram maioris numeri erunt 30, ex quibus ponatur 0 in quarto puncto et 3 in quinto. Simili quoque modo multiplicabuntur 6 singulariter per 1 et per 2 et per 3 et per 4, exhibunt 6 in primo puncto secunde linee, et 2 in secundo, et 9 in tertio, et 5 in quarto, et 2 in quinto; quod idem fiat de quinque que sunt in ultimo gradu minoris numeri, et habebitur 5 in primo puncto tertie linee, et 0 in secundo, et 6 in tertio, et 1 in quarto, et 2 in quinto. Deinde pro 7 que posita sunt in primo puncto ponantur 7 super 1, et addantur 6 et 4 que sibi inuicem sunt opposita; post ipsa 7 erunt 10: ponatur 0 super 2 et seruetur 1, cum quo addatur 5 et 2 et 2 que item sibi inuicem sunt opposita: post predicta 6 et 4 erunt 10: ponatur iterum 0 super tertium gradum, scilicet super 3, et seruetur iterum 1 quod addatur cum 0 et 9 et 0 que item sibi inuicem sunt opposita: post dicta 5 et 2 et erunt 10: ponatur iterum 0 super 4, scilicet super ultimum gradum maioris numeri et seruetur iterum 1: quod addatur cum 6 et 5 et 3 que sunt in sequenti oppositione erunt 15: ponantur 5 in quinto gradu, et seruetur unum quod addatur cum .1. et .2. que sunt in sequenti oppositione, erunt 4 que ponantur in sexto gradu. Deinde ponantur 2 in septimo gradu pro 2 que sunt in angulo quadrati post dictam oppositionem de 1 et 2 et habebis predictam summam.

2 4 5 0 0 0 7						
4 3 2 1						
3	0	2	4	7	1 2 3	
2	5	9	2	6		
2	1	6	0	5		



- Addizione - *summa*

Incipit capitulum tertium de additione integrorum numerorum.

Cum autem quoslibet numeros et quotcumque quis addere uoluerit, collocet eos in tabula, secundum quod in multiplicationibus numerorum prediximus, hoc est primum gradum cunctorum numerorum quos addere uoluerit sub primo ipsius qui ante in iunctionem positus fuerit. Et secundum sub secundo, et deinceps qui sequatur. Et tunc incipiat in manibus colligere numeros figurarum que in primis gradibus cunctorum numerorum que in iunctionem positi fuerint, ab inferiori numero usque ad superiorem, ascendendo: ponat itaque unitates super primum gradum numerorum et decenas in manu reseruet, quibus decenis superaddat numeros qui in secundis gradibus extiterint, et ponat unitates super secundum gradum, et iterum decenas reseruet. Cum quibus collectionem tertii gradus numerorum super addat, et sic ponendo unitates, et decenas reseruando,

gradatim numeros colligendo, potest collectionem cunctorum numerorum usque ad infinitum habere. Et ut melius intelligatur iunctiones duorum numerorum et etiam tertij, nec non et plurium ostendantur.

tabula

- **Addizione - *summa***



tabula



- **Addizione - *summa***



Ut si quesieris scire aditionem de 25 cum 49 colloce 49 sub 25 tamquam deberet eos ad inuicem multiplicare, et addat 9 cum 5, erunt 14: ponat 4 super primum gradum et pro decenis reseruet in manu 1 quod addat cum 4 et cum 2, erunt 7 que ponat, et sic habebuntur pro eorum collectione 74, ut hic ostenditur.

Item si uoluerit scire collectionem de 123 cum 4567, describat eos ut hic cerauntur; et addat 7 cum 3, erunt 10; ponat 0 et retineat 1 quod addat cum 6 et cum 2, erunt 9 que ponat. Item addat 5 cum 1 que sunt in tertio gradu, erunt 6 que ponat super eundem gradum, et per 4 que sunt in quarto gradu inferioris numeri, ponet 4 in quarto gradu exeuntis summe, cum non sit aliqua figura super ipsa in alio numero, scilicet in 123, et sic habebit pro eorum additione 4690.

Item si uoluerit addere 4321 cum 506789, descriptis eis ordine prescripto, addat 9 cum 1, erunt 10: ponet 0 et retineat 1 quod addat cum 8 et cum 2, erunt 11: ponet 1, retineat 1 quod addat cum 7 et cum 3, erunt 11. Iterum ponat 1 et retineat 1 quod addat cum

summa

74
25
49

4690
123
4567

511110
4321
506789

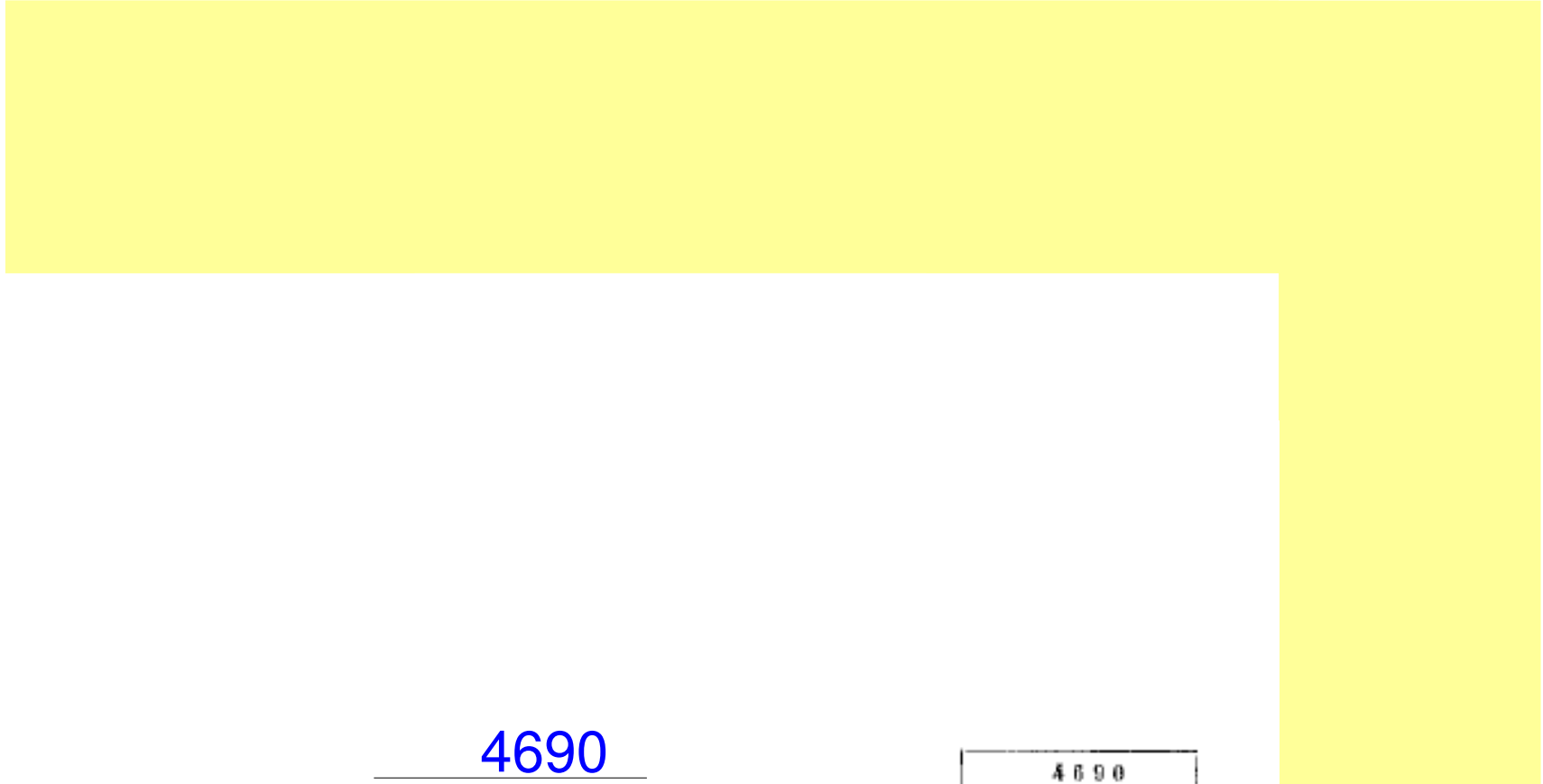
- **Addizione - *summa***



123
4567

4 0 0 0
1 2 3
4 5 6 7

- Addizione - *summa*



$$\begin{array}{r} 4690 \\ \hline 123 \\ 4567 \end{array}$$

4 6 9 0
1 2 3
4 5 6 7

- **Addizione - *summa***

lire denari soldi

1 lira = 20 soldi

1 soldo = 12 denari

4 migl. 6 cent. 9 dec. 0 unità

1 cent. 2 dec. 3 unità

4 migl. 5 cent. 6 dec. 7 unità

10 lire 13 soldi 5 denari

4 lire 8 soldi 6 denari

3 lire 13 soldi 7 denari

2 lire 11 soldi 4 denari

• Sottrazione – cap. 4

De extractione minorum numerorum ex maioribus.

$$\begin{array}{r} 46 \\ \hline 85 \\ 39 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 5 \\ 3 \quad 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 10+5 \\ 10+3 \quad 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \quad 6 \\ \hline 8 \quad 15 \\ 4 \quad 9 \end{array}$$

• Sottrazione – cap. 4

De extractione minorum numerorum ex maioribus.

$$\begin{array}{r} 46 \\ \hline 85 \\ 39 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 5 \\ 3 \quad 9 \\ \hline 8 \quad 5 \\ +1 \quad 3 \quad 1 \quad 10-9 \\ \hline 4 \quad 6 \\ \hline 8 \quad 5 \\ 4 \quad 1 \quad 10-9 \end{array}$$

$$A-B = 10A'+A - (10B'+B)=10A'-10B' + A -B$$

$$\begin{aligned} A- B -10 + 10 &= 10A' - 10B' - 10 + A + (10 - B) \\ &= 10A'-10(B'+1)+ A + (10 - B) \\ &= 10(A' - B'+1) + A + (10 - B) \end{aligned}$$

capitolo 8

De emptione et venditione rerum venalium et similium

Acquisto e vendita delle merci

LA REGOLA DEL TRE (O DELLE TRE COSE)

• LA REGOLA DEL TRE (O DELLE TRE COSE) - cap.8

• Misure di peso

1) trovare il valore di una data quantità di merce

• Quod cantare si vendatur pro libris XL, et queratur quantum valeant rotuli 5.

◦ Se un cantare si vende per 40 lire, quanto valgono 5 rotoli?

Soluzione.

Secondo la regola del tre, scrivi su una stessa riga i 100 rotoli (cioè 1 cantare) e a sinistra il loro prezzo, cioè 40 lire; poi scrivi 5 rotoli sotto i 100 rotoli, poiché numeri dello stesso genere vanno uno sotto l'altro: rotoli sotto rotoli e lire sotto lire.

<i>l.</i>	<i>R.</i>
40	100
	5

...

1 cantare pisano = 100 rotuli

1 rotulo = 12 once

1 oncia = 39 denari di cantare e mezzo

1 denaro di cantare = 6 carrube

1 carruba = 4 grani di frumento

• LA REGOLA DEL TRE (O DELLE TRE COSE) - cap.8

• Misure di peso

1) trovare il valore di una data quantità di merce

• Quod cantare si vendatur pro libris XL, et queratur quantum valeant rotuli 5.

◦ Se un cantare si vende per 40 lire, quanto valgono 5 rotoli?

Soluzione.

Secondo la regola del tre, scrivi su una stessa riga i 100 rotoli (cioè 1 cantare) e a sinistra il loro prezzo, cioè 40 lire; poi scrivi 5 rotoli sotto i 100 rotoli, poiché numeri dello stesso genere vanno uno sotto l'altro: rotoli sotto rotoli e lire sotto lire.

<i>l.</i>	<i>R.</i>
40	100
2	5

Moltiplica ora in diagonale i numeri che si trovano agli estremi, cioè 40 e 5, che fa 200. Dividi poi per 100. Viene 2 lire come prezzo di 5 rotoli.

1 cantare pisano = 100 rotuli

1 rotulo = 12 once

1 oncia = 39 denari di cantare e mezzo

1 denaro di cantare = 6 carrube

1 carruba = 4 grani di frumento

• LA REGOLA DEL TRE (O DELLE TRE COSE) - cap.8

• Misure di peso

1) trovare il valore di una data quantità di merce

• Quod cantare si vendatur pro libris XL, et queratur quantum valeant rotuli 5.

◦ Se un cantare si vende per 40 lire, quanto valgono 5 rotoli?

$$100 : 40 = 5 : x$$

<i>l.</i>	<i>R.</i>
40	100
2	5

Moltiplica ora in diagonale i numeri che si trovano agli estremi, cioè 40 e 5, che fa 200. Dividi poi per 100. Viene 2 lire come prezzo di 5 rotoli.

• LA REGOLA DEL TRE (O DELLE TRE COSE) - cap.8

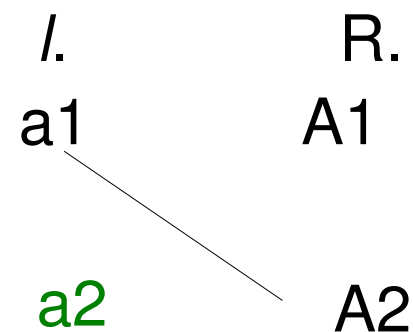
• Misure di peso

1) trovare il valore di una data quantità di merce

• Quod cantare si vendatur pro libris XL, et queratur quantum valeant rotuli 5.

◦ Se un cantare si vende per 40 lire, quanto valgono 5 rotoli?

$$A1 : a1 = A2 : a2$$



Moltiplica ora in diagonale i numeri che si trovano agli estremi, cioè 40 e 5, che fa 200. Dividi poi per 100. Viene 2 lire come prezzo di 5 rotoli.

• LA REGOLA DEL TRE (O DELLE TRE COSE) - cap.8

• Misure di peso

2) trovare la quantità di merce per un dato valore

• Item rotuli 100 per libras 40; quot rotulos habuero per libras 2.

◦ Se un cantare, cioè 100 rotoli, si vende per 40 lire, quanti rotoli avrò per 2 lire?

Soluzione.

Secondo la regola del tre, scrivi su una stessa riga i 100 rotoli e a sinistra il loro prezzo, cioè 40 lire; poi scrivi 5 rotoli sotto i 100 rotoli, poiché numeri dello stesso genere vanno uno sotto l'altro: rotoli sotto rotoli e lire sotto lire.

<i>l.</i>	<i>R.</i>
40	100
2	5

Moltiplica ora in diagonale i numeri che si trovano agli estremi, cioè 40 e 5, che fa 200. Dividi poi per 100. Viene 2 lire come prezzo di 5 rotoli.

- 1 cantare pisano = 100 rotoli
- 1 rotulo = 12 once
- 1 oncia = 39 denari di cantare e mezzo
- 1 denaro di cantare = 6 carrube
- 1 carruba = 4 grani di frumento

• LA REGOLA DEL TRE (O DELLE TRE COSE) - cap.8

• Misure di lunghezza 1) trovare il valore di una data quantità di merce

• Si canna pisana, que est brachia 4 cuiuslibet panni vendatur pro soldis 7 et queratur quantum valet brachium 1.

◦ Se una canna pisana, cioè 4 braccia, di una certa stoffa si vende per 7 soldi quanto costa 1 braccio?

<u>soldi</u>	<u>braccia</u>
7	4
?	1

$$? = (7 \times 1) : 4 = \frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4} \text{ soldi}$$

= 21 denari

1 canna pisana = 4 braccia

1 lira = 20 soldi

1 soldo = 12 denari

- **LA REGOLA DEL TRE (O DELLE TRE COSE) - cap.8**

- **Misure di lunghezza** 1) trovare il valore di una data quantità di merce

- Si canna pisana, que est brachia 4 cuiuslibet panni vendatur pro soldis 7 et queratur quantum valet brachium 1.

- Se una canna pisana, cioè 4 braccia, di una certa stoffa si vende per 7 soldi quanto costa 1 braccio?

<u>soldi</u>	<u>braccia</u>
7	4
?	1

x

$$? = (7 \times 1) : 4 = \frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4} \text{ soldi} = 12 + 9 \text{ denari} = 21 \text{ denari}$$

1 lira = 20 soldi

1 soldo = 12 denari

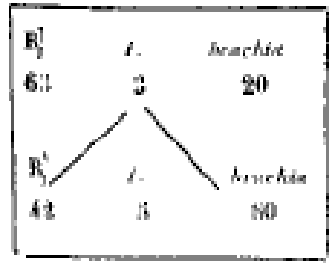
De baractis mercium atque alium similibus – Cap.9

REGOLA DEL TRE COMPOSTO

Regula uniuersalis in baractis mercium primum de pipere ad linum.

Cum autem uolueris quamlibet mercem cum qualibet alia merce cambiare, hoc est baractare, addiscas pretium uniuscuiusque mercis; quod pretium semper debet esse unius monete. Et describas illarum mercium unam in capite tabule, et pretium illius mercis scribas in tabula retro uersus sinistra in eadem lineatione, sicuti in negotiationibus in antecedenti capitulo describere docuimus. Deinde sub pretio illius mercis in aliam lineam describes pretium alterius mercis; et retro describes mercem illius pretii. Et si merces, quam aliam mercem baractare uolueris, fuerit ex superiori merce de prima uidelicet descripta in tabula, pones quantitatem illius mercis, quam habueris sub eadem merce. Et si fuerit ex alia merce, describere quantitatem illius super ipsam mercem, ut sicuti modo diximus describendum esse pretium unius mercis sub pretio alterius, ita describantur similes merces sub simili merce. Et descriptis itaque ipsis quinque numeris, tunc ultimum eorum per numerum pretii oppositis multiplica; et quot inde prouenerit, in alium numerum eidem pretio oppositum ducere studeas; quorum numerorum summam per reliquos duos numeros diuide, et habebis optatum. Verbi gratia brachia 20 panni ualeant libras 3 pisaninorum; et Rotuli 42 cottonis ualeant 5 similiter pisaninorum; queritur pro brachiis 50 panni quot Rotuli cottonis habebuntur. Pone itaque brachia 20 in tabula; post que pone libras 3, scilicet eorum pretium, sub quibus pone libras 5; post quas 5 pone Rotulos 42; deinde brachia 50 pone sub brachiis 20, et multiplica 50 per 3, que sunt eis ex aduerso, erunt 150; que multiplica per 42, cum sint ex aduerso eisdem tribus; et quot prouenerit diuide per reliquos numeros, scilicet per 20 et per 5, hoc est per 100, uenient 63; et tot Rotuli bombicis habebuntur pro brachiis 50 panni.

3. scilicet ... mercis ... (fol. 49 recta, lin. 49-54; pag. 118, lin. 34-42).



• LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

al qutn

• Verbi gratia brachia 20 panni valeant libras 3 pisaninorum, et rotuli 42 cotonis valeant 5 similiter pisaninorum; queritur pro brachiis 50 panni quot rotuli cotonis habebuntur

◦ Ad esempio, 20 braccia di panno valgono 3 lire di pisani, e 42 rotuli di cotone valgono 5 lire di pisani. Si chiede quanti rotuli di cotone si avranno per 50 braccia di panno.

<u>rotuli</u>	<u>lire</u>	<u>braccia</u>	
	3	20	
42	5		?
		50	

• LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

al qutn

• Verbi gratia brachia 20 panni valeant libras 3 pisaninorum, et rotuli 42 cotonis valeant 5 similiter pisaninorum; queritur pro brachiis 50 panni quot rotuli cotonis habebuntur

◦ Ad esempio, 20 braccia di panno valgono 3 lire di pisani, e 42 rotuli di cotone valgono 5 lire di pisani. Si chiede quanti rotuli di cotone si avranno per 50 braccia di panno.

lire

braccia di panno

3

20

1. trovo il valore di 50 braccia di panno

$3 \cdot 50/20$

50

• LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

al qutn

• Verbi gratia brachia 20 panni valeant libras 3 pisaninorum, et rotuli 42 cottonis valeant 5 similiter pisaninorum; queritur pro brachiis 50 panni quot rotuli cottonis habebuntur

◦ Ad esempio, 20 braccia di panno valgono 3 lire di pisani, e 42 rotuli di cotone valgono 5 lire di pisani. Si chiede quanti rotuli di cotone si avranno per 50 braccia di panno.

	<u>lire</u>	<u>braccia di panno</u>
<u>rotuli</u>	<u>lire</u>	20
<input type="text"/>	$3 \cdot 50/20$	50
42	5	

1. trovo il valore di 50 braccia di panno
2. trovo il cotone per $3 \cdot 50/20$ lire

• LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

al qutn

• Verbi gratia brachia 20 panni valeant libras 3 pisaninorum, et rotuli 42 cotonis valeant 5 similiter pisaninorum; queritur pro brachiis 50 panni quot rotuli cotonis habebuntur

◦ Ad esempio, 20 braccia di panno valgono 3 lire di pisani, e 42 rotuli di cotone valgono 5 lire di pisani. Si chiede quanti rotuli di cotone si avranno per 50 braccia di panno.

	<u>lire</u>	<u>braccia di panno</u>	
<u>rotuli</u>	<u>lire</u>	20	1. trovo il valore di 50 braccia di panno
			2. trovo il cotone per $3 \cdot 50/20$ lire
$(3 \cdot 50/20) \cdot 42/5$	$3 \cdot 50/20$	50	$(3 \cdot 50/20) \cdot 42/5 = 3 \cdot 21 = 63$
42	5		

• LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

al qutn

• Verbi gratia brachia 20 panni valeant libras 3 pisaninorum, et rotuli 42 cottonis valeant 5 similiter pisaninorum; queritur pro brachiis 50 panni quot rotuli cottonis habebuntur

◦ Ad esempio, 20 braccia di panno valgono 3 lire di pisani, e 42 rotuli di cotone valgono 5 lire di pisani. Si chiede quanti rotuli di cotone si avranno per 50 braccia di panno.

	<u>lire</u>	<u>braccia di panno</u>	
<u>rotuli</u>	<u>lire</u>	20	1. trovo il valore di 50 braccia di panno
			2. trovo il cotone per $3 \cdot 50/20$ lire
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">63</div>	$3 \cdot 50/20$	50	$(3 \cdot 50/20) \cdot 42/5 = 3 \cdot 21 = 63$
42	5		

• LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

al qutn

• Verbi gratia brachia 20 panni valeant libras 3 pisaninorum, et rotuli 42 cotonis valeant 5 similiter pisaninorum; queritur pro brachiis 50 panni quot rotuli cotonis habebuntur

◦ Ad esempio, 20 braccia di panno valgono 3 lire di pisani, e 42 rotuli di cotone valgono 5 lire di pisani. Si chiede quanti rotuli di cotone si avranno per 50 braccia di panno.

<u>rotuli</u>	<u>lire</u>	<u>braccia</u>
---------------	-------------	----------------

3

20

42

5

Scrivi dunque sulla tavola 20 braccia, e accanto scrivi 3 lire, cioè il loro prezzo, sotto le quali scrivi 5 lire, e a fianco di queste scrivi 42 rotuli. Scrivi poi 50 braccia sotto 20 braccia, e moltiplica 50 per 3, che stanno diagonalmente, fa 150 che moltiplica per 42 posto diagonalmente, e quello che viene dividilo per gli altri numeri, cioè per 20 e per 5, cioè per 100. Il risultato è 63, e tanti rotuli di cotone si avranno per 50 braccia di panno.

• LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

• Verbi gratia brachia 20 panni valeant libras 3 pisaninorum, et rotuli 42 cottonis valeant 5 similiter pisaninorum; queritur pro brachiis 50 panni quot rotuli cottonis habebuntur

◦ Ad esempio, 20 braccia di panno valgono 3 lire di pisani, e 42 rotuli di cotone valgono 5 lire di pisani. Si chiede quanti rotuli di cotone si avranno per 50 braccia di panno.

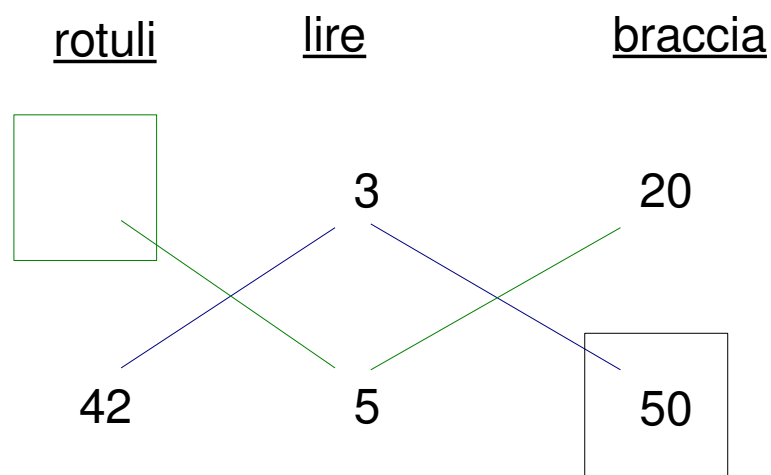
<u>rotuli</u>	<u>lire</u>	<u>braccia</u>
	3	20
42	5	50

Scrivi dunque sulla tavola 20 braccia, e accanto scrivi 3 lire, cioè il loro prezzo, sotto le quali scrivi 5 lire, e a fianco di queste scrivi 42 rotuli. Scrivi poi 50 braccia sotto 20 braccia, e moltiplica 50 per 3, che stanno diagonalmente, fa 150 che moltiplica per 42 posto diagonalmente, e quello che viene dividilo per gli altri numeri, cioè per 20 e per 5, cioè per 100. Il risultato è 63, e tanti rotuli di cotone si avranno per 50 braccia di panno.

• LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

• Verbi gratia brachia 20 panni valeant libras 3 pisaninorum, et rotuli 42 cottonis valeant 5 similiter pisaninorum; queritur pro brachiis 50 panni quot rotuli cottonis habebuntur

◦ Ad esempio, 20 braccia di panno valgono 3 lire di pisani, e 42 rotuli di cotone valgono 5 lire di pisani. Si chiede quanti rotuli di cotone si avranno per 50 braccia di panno.

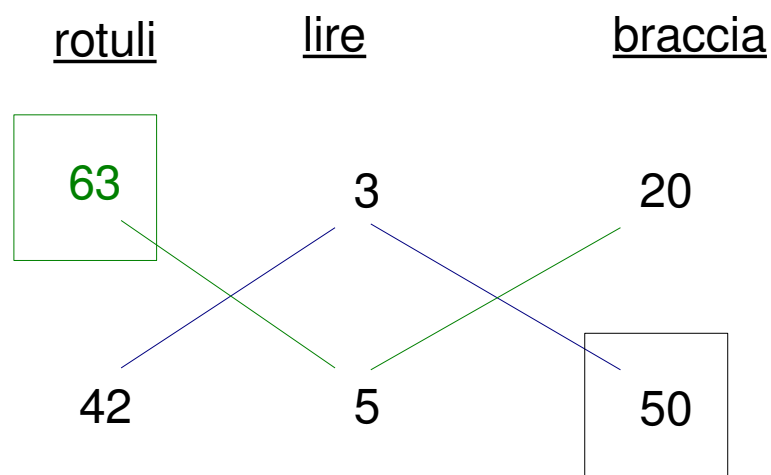


Scrivi dunque sulla tavola 20 braccia, e accanto scrivi 3 lire, cioè il loro prezzo, sotto le quali scrivi 5 lire, e a fianco di queste scrivi 42 rotuli. Scrivi poi 50 braccia sotto 20 braccia, e moltiplica 50 per 3, che stanno diagonalmente, fa 150 che moltiplica per 42 posto diagonalmente, e quello che viene dividilo per gli altri numeri, cioè per 20 e per 5, cioè per 100. Il risultato è 63, e tanti rotuli di cotone si avranno per 50 braccia di panno.

• LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

• Verbi gratia brachia 20 panni valeant libras 3 pisaninorum, et rotuli 42 cottonis valeant 5 similiter pisaninorum; queritur pro brachiis 50 panni quot rotuli cottonis habebuntur

◦ Ad esempio, 20 braccia di panno valgono 3 lire di pisani, e 42 rotuli di cotone valgono 5 lire di pisani. Si chiede quanti rotuli di cotone si avranno per 50 braccia di panno.

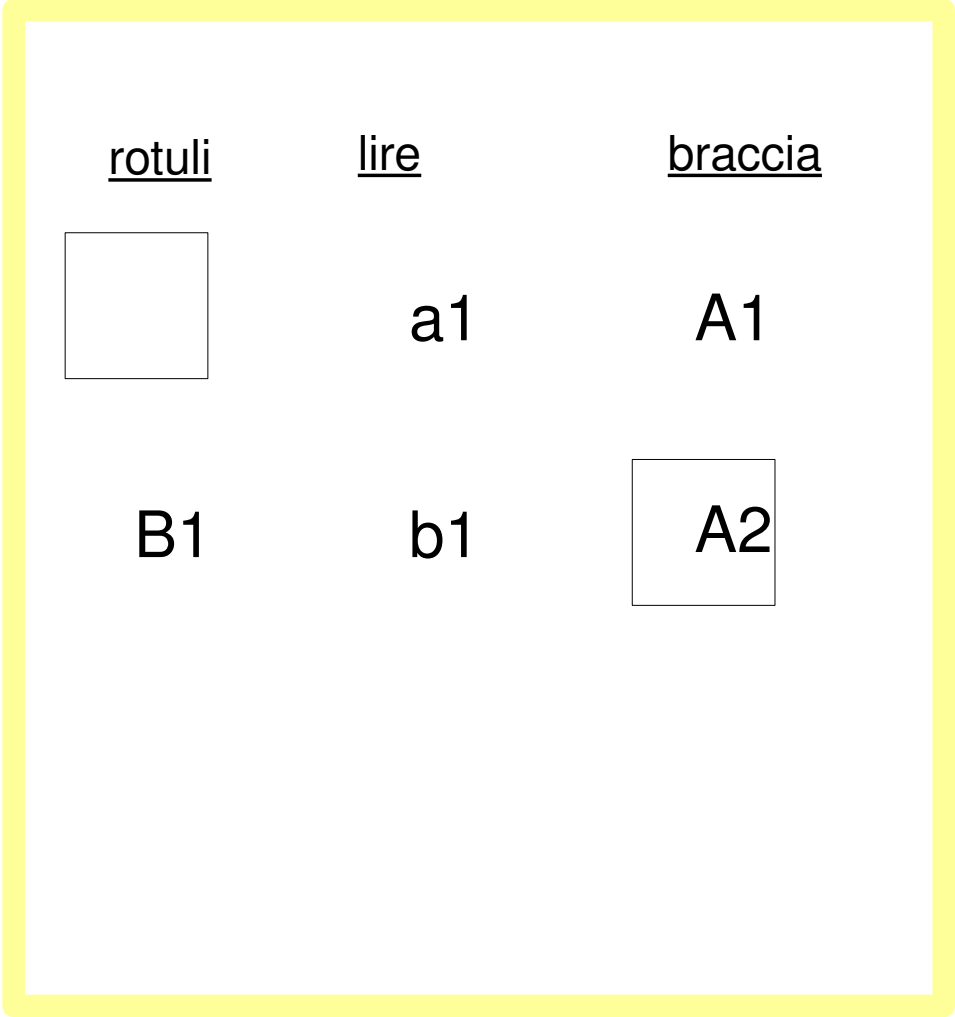


$$(3 \cdot 50 / 20) \cdot 42 / 5 = 63$$

$$(3 \cdot 50 \cdot 42) / 20 \cdot 5 = 63$$

Scrivi dunque sulla tavola 20 braccia, e accanto scrivi 3 lire, cioè il loro prezzo, sotto le quali scrivi 5 lire, e a fianco di queste scrivi 42 rotuli. Scrivi poi 50 braccia sotto 20 braccia, e moltiplica 50 per 3, che stanno diagonalmente, fa 150 che moltiplica per 42 posto diagonalmente, e quello che viene dividilo per gli altri numeri, cioè per 20 e per 5, cioè per 100. Il risultato è 63, e tanti rotuli di cotone si avranno per 50 braccia di panno.

- **LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9**

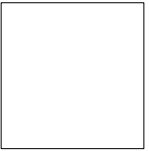


• LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

merceB

lire

merceA

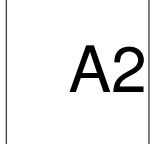


a1

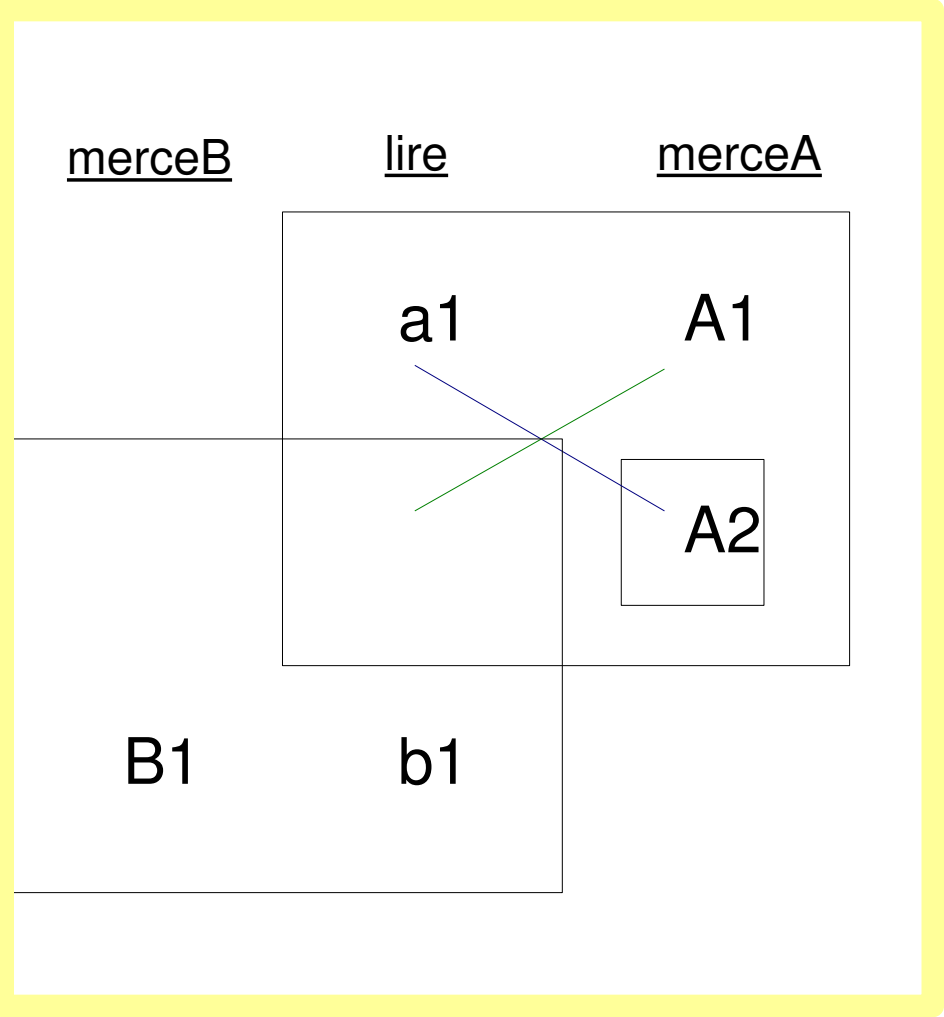
A1

B1

b1



• LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

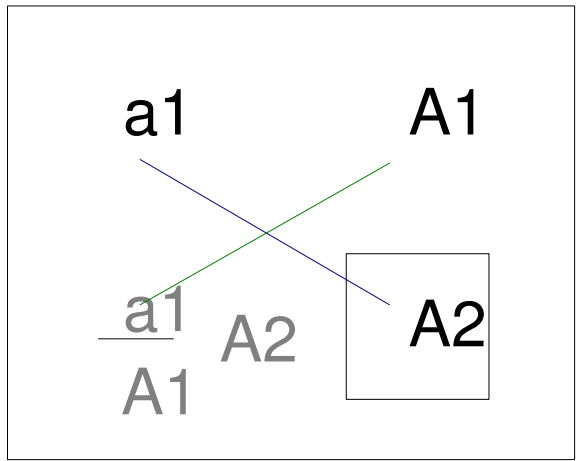


• LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

merceB

lire

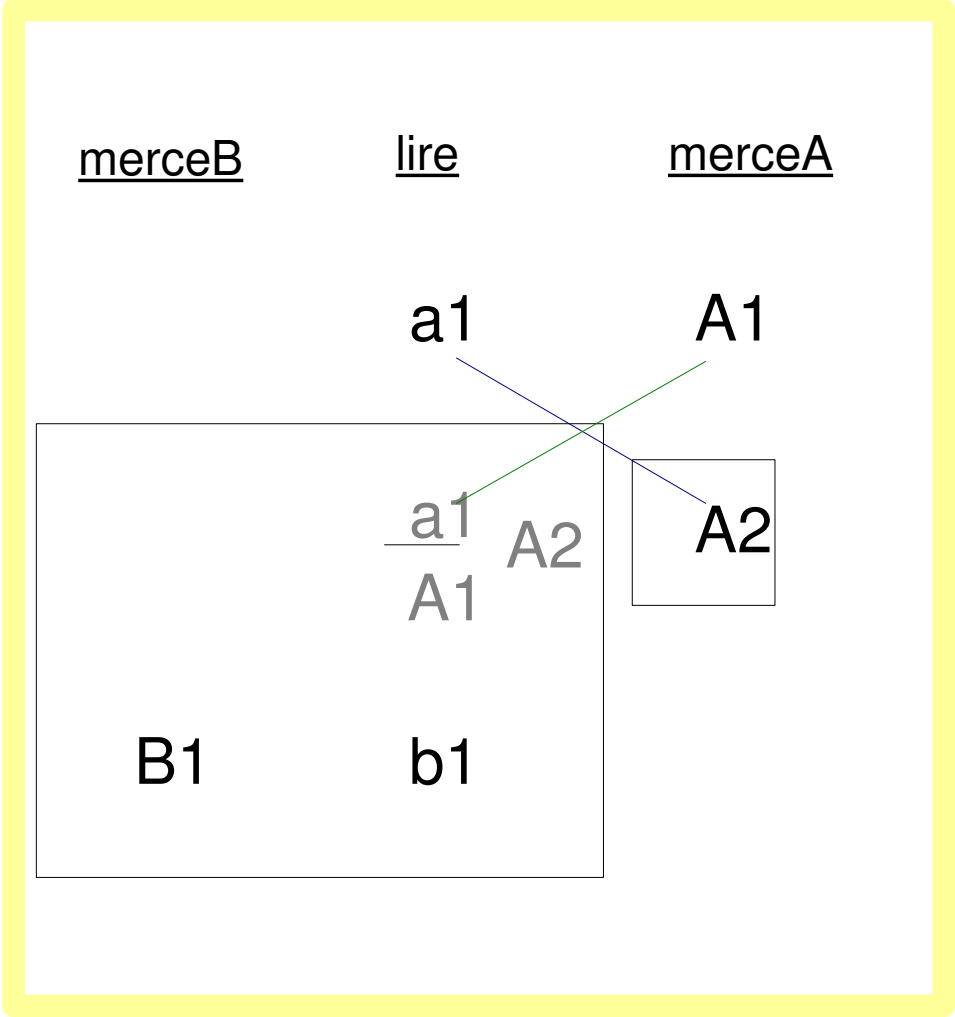
merceA



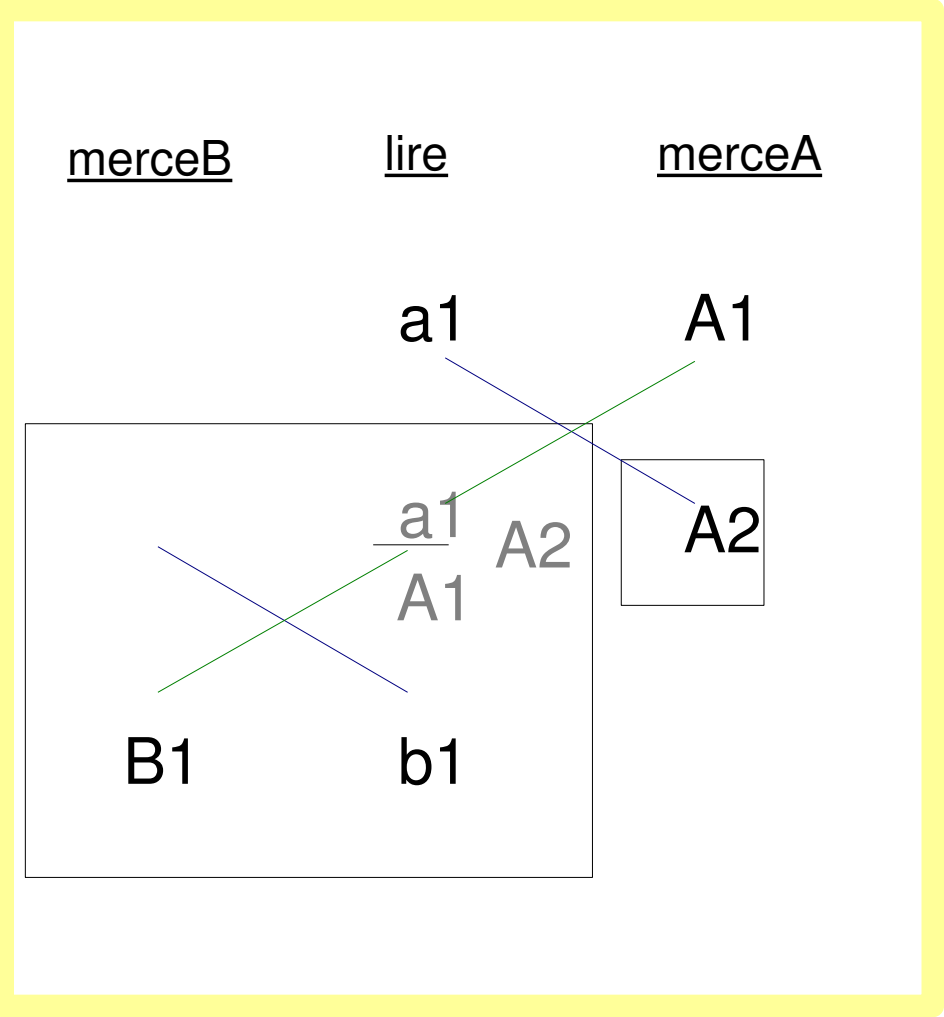
B1

b1

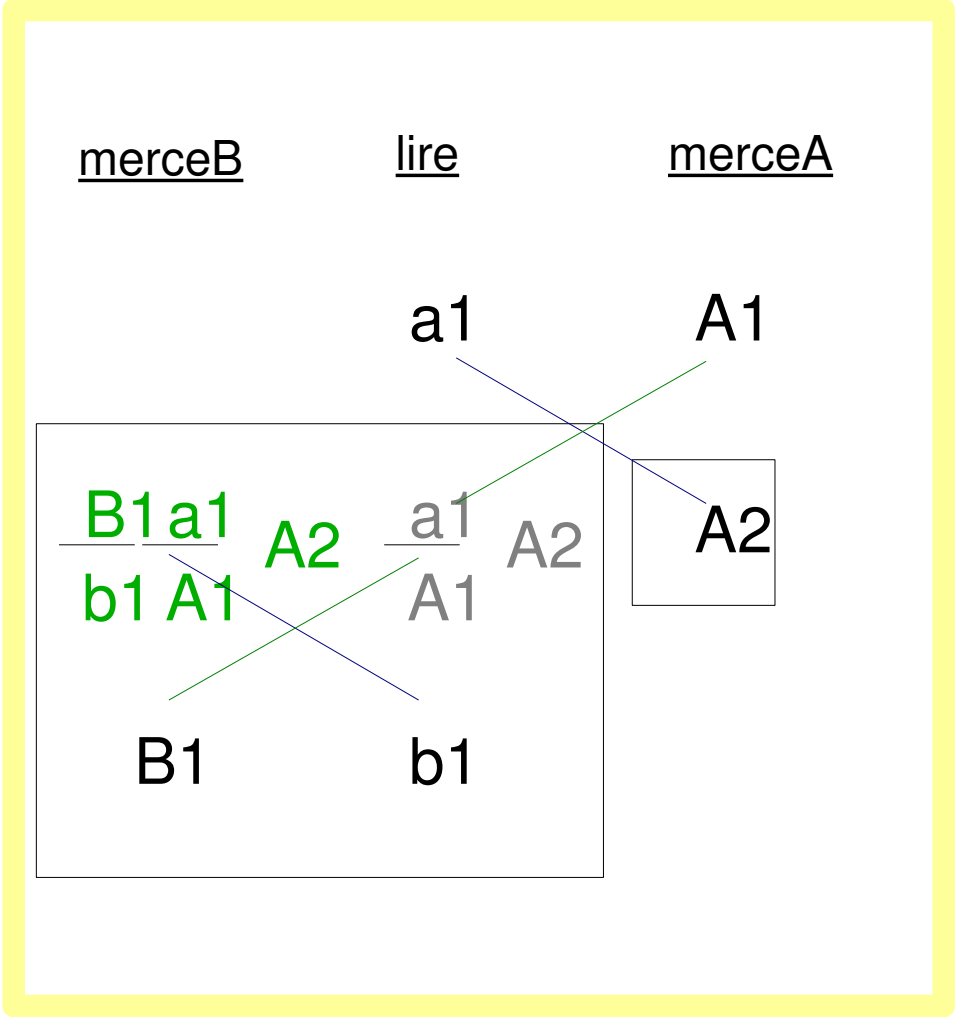
• LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9



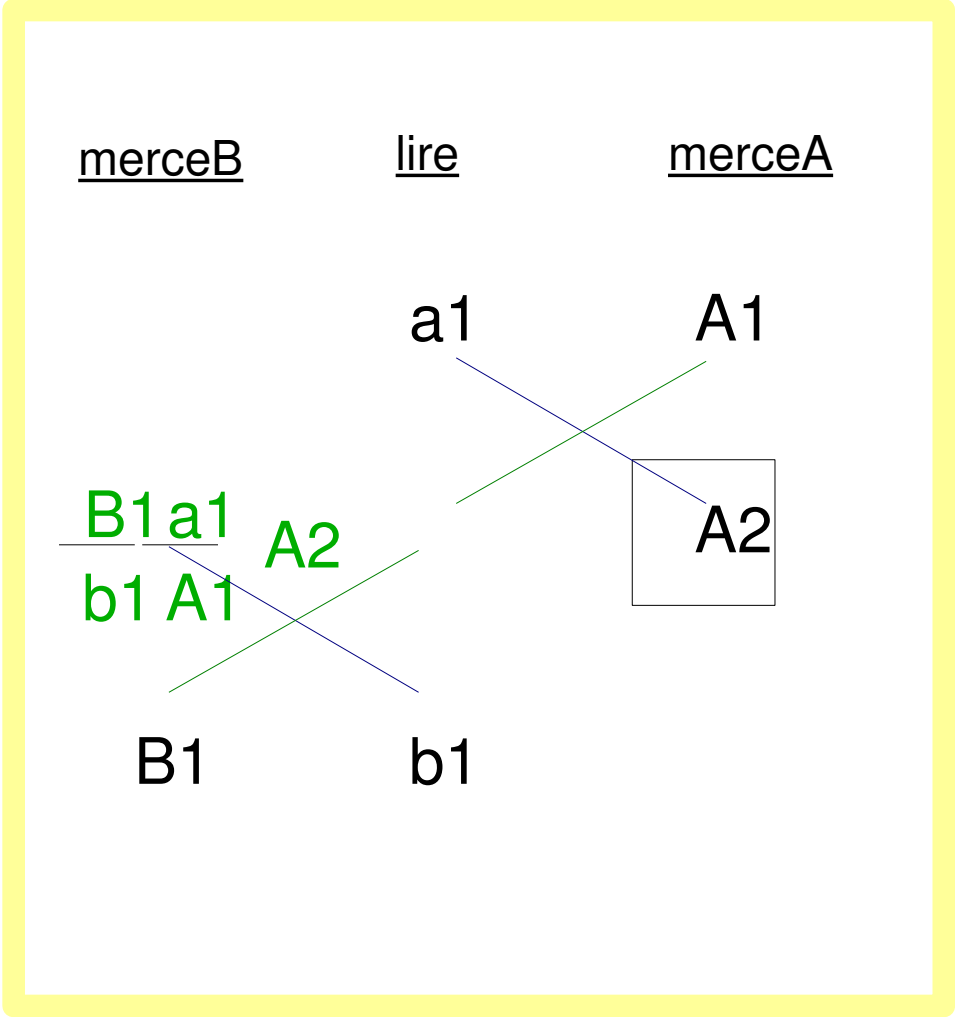
• LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9



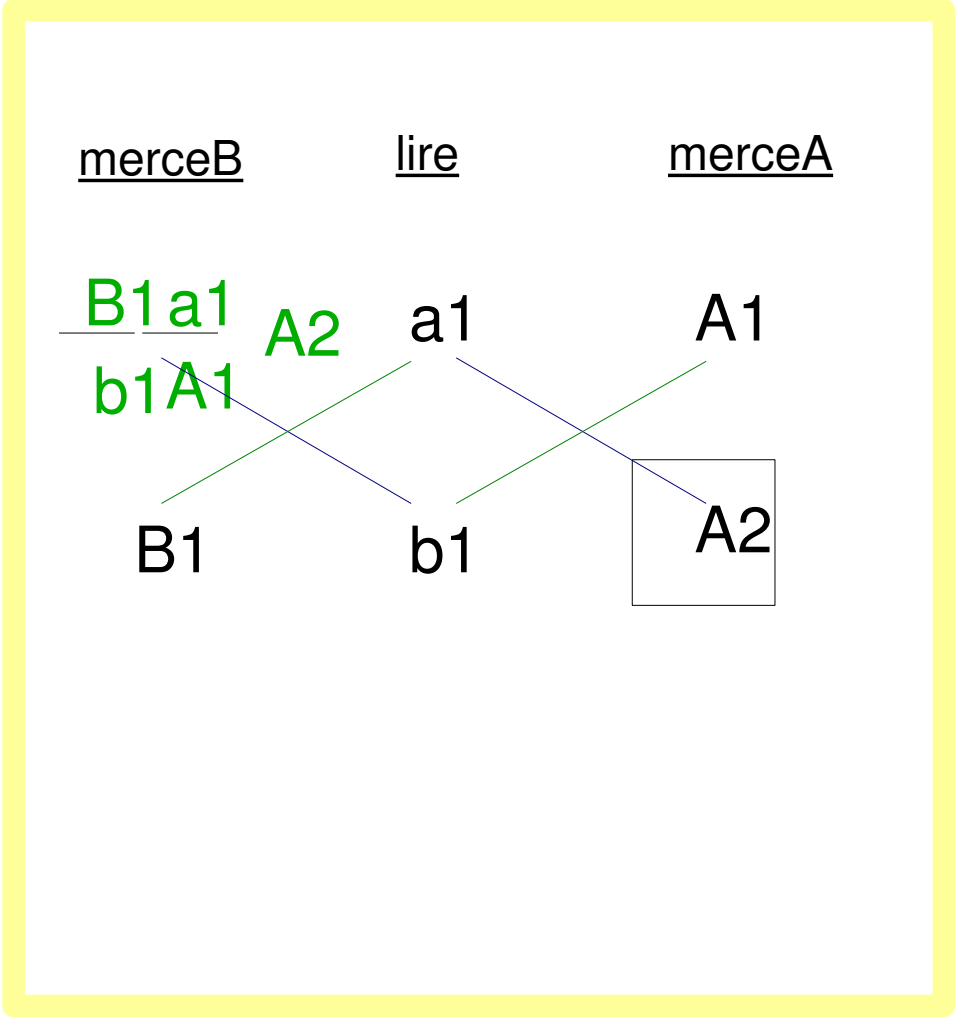
• LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9



• LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9



LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9



$$\frac{B2}{A2} = \frac{a1}{b1} = \frac{B1}{A1}$$

Annotations:
 - An arrow points from $a1$ to the text "lire per 1 quant di merce".
 - An arrow points from $B1$ to the text "merce per 1 li".

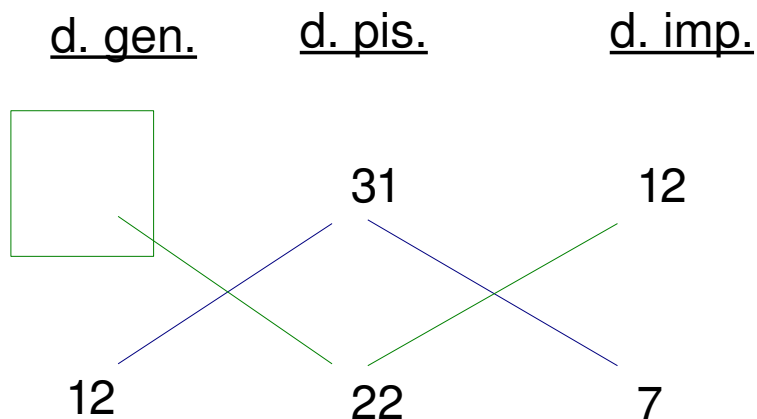
$$A1 : a1 = A2 : a2$$

$$B1 : b1 = B2 : a2$$

• LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO – scambi monetari

• Item si proponatur quod soldus imperialium valeat 31 et soldus ianuinorum valeat pisaninos 22 et queratur quot ianuinos valeant imperiales 7 ...

◦ Se un soldo di imperiali vale 31 (denari) di pisanini e un soldo di genovini vale 22 (denari) pisanini, quanti (denari) genovini per 7 (denari) imperiali ?



Soluzione.

Dovresti moltiplicare 7 per 31 e per 12, dividere per 12 e per 22. Tralascia di moltiplicare e dividere per 12. Dunque moltiplica 7 per 31 e dividi per 22. Verranno $9 + 9/11 + 1/22$ genovini.

• LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

- Quinque equi comedunt sextaria 6 ordei in diebus 9; queritur in quot dies eadem ratione decem equi comedent sextaria 16.

- Cinque cavalieri consumano 6 sestari di orzo in 9 giorni; si domanda in quanti giorni 10 cavalieri consumano 16 sestari di orzo.

• LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

- Quinque equi comedunt sextaria 6 ordei in diebus 9; queritur in quot dies eadem ratione decem equi comedent sextaria 16.

- Cinque cavalieri consumano 6 sestari di orzo in 9 giorni; si domanda in quanti giorni 10 cavalieri consumano 16 sestari di orzo.

dies

ordeum

equites

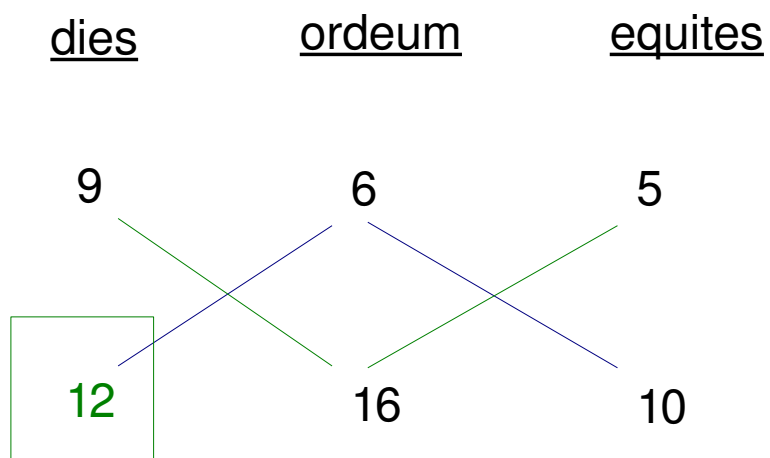
Soluzione.

Scrivi su una riga 5 cavalieri, 6 sestari, 9 giorni (iniziando da destra); poi sotto 5 scrivi 10 cavalieri e sotto 6 scrivi 16 sestari. Moltiplica 5 per 16 per 9, che fa 720; dividi per 10 e per 6, viene 12.

• LA REGOLA DEL TRE COMPOSTO - cap.9

- Quinque equi comedunt sextaria 6 ordei in diebus 9; queritur in quot dies eadem ratione decem equi comedent sextaria 16.

- Cinque cavalieri consumano 6 sestari di orzo in 9 giorni; si domanda in quanti giorni 10 cavalieri consumano 16 sestari di orzo.



Soluzione.

Scrivi su una riga 5 cavalieri, 6 sestari, 9 giorni (iniziando da destra); poi sotto 5 scrivi 10 cavalieri e sotto 6 scrivi 16 sestari. Moltiplica 5 per 16 per 9, che fa 720; dividi per 10 e per 6, viene 12.

• De societatibus factis inter consocios – Cap.10

DIVISIONE DEGLI UTILI

Incipit capitulum decimum de societatibus factis inter consocios.

Cum autem prepositum fuerit de quibusdam consociis qui insimul societatem fecerunt, quorum unusquisque inequaliter suam portionem in ipsa societate habuerit, et cum ipsa societate aliquam quantitatem lucrati fuerint; quam quantitatem inter se secundum portiones eorum diuidere uoluerint. Et uoluerit scire quot unicuique de ipso lucro continget; pone portionem primi socii in capite tabule in dextera parte; deinde in eadem linea uersus sinistram portiones aliorum per ordinem ponere studeas; et lucrum quod fecerint, in alio capite tabule in eadem linea depingas, in sinistra uidelicet parte. Tunc aggregabis portiones omnium sociorum in unum, et aggregatam summam seruabis. In qua singulariter diuides multiplicationes portionis uniuscuiusque socii in totum lucrum; et sic habebis hoc quod unicuique de ipso lucro contigerit.

• De societatibus factis inter consocios – Cap.10

DIVISIONE DEGLI UTILI

Qualora si trattasse di soci che hanno fatto società insieme, dei quali ciascuno ha messo una parte diversa nella società, e con questa società si fosse guadagnata una certa quantità, e questa quantità volessero dividere secondo le parti;

se si vuole sapere quanto del profitto tocchi a ciascuno, scrivi la parte del primo socio all'estremità destra della tavola, poi sulla stessa linea scrivi ordinatamente verso sinistra le parti degli altri soci, e all'altra estremità poni il profitto; poi somma tutti i capitali in uno, e metti da parte la somma, per la quale dividerai il prodotto del capitale di ogni socio per il profitto. In questo modo avrai quanto dell'utile totale tocca a ciascuno.

• DIVISIONE DEGLI UTILI – cap.10

società di due uomini

• Si proponatur de duobus hominibus, qui societatem insimul fecerunt, quorum unus misit in prescripta societate libras 18 alicuius monete, et alter misit in eadem libras 25, et lucrati fuerunt inde libras 7; et queratur quot unicuique de ispis libris 7 contingerit, sic facies.

◦ Se due uomini fanno insieme una società, e uno mette 18 lire di una certa moneta, l'altro 25, e si guadagnano 7 lire; se si vuole sapere quanto di queste 7 lire tocchi a ognuno, fai così:

$$\begin{array}{r} 7 \\ \hline 25 \\ \hline 43 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 18 \\ \hline 43 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 40 \\ 2 + \frac{40}{43} \end{array}$$

Scrivi a partire da destra la parte del primo socio, del secondo e il guadagno: 18, 25, 7. Somma 18 con 25: viene 43 che metterai a denominatore a 18 e a 25. Ora moltiplica il 7 del guadagno per 18/43 e troverai quanto del guadagno tocca al primo socio. Viene $2 + \frac{40}{43}$, cioè 2 lire, 18 soldi e $7 + \frac{11}{43}$ di denari. Il resto tocca all'altro.

Puoi anche trovarlo moltiplicando 7 per $\frac{25}{43}$.

● DIVISIONE DEGLI UTILI – cap.10

società di due uomini

• Si proponatur de duobus hominibus, qui societatem insimul fecerunt, quorum unus misit in prescripta societate libras 18 alicuius monete, et alter misit in eadem libras 25, et lucrati fuerunt inde libras 7; et queratur quot unicuique de ispis libris 7 contingerit, sic facies.

◦ Se due uomini fanno insieme una società, e uno mette 18 lire di una certa moneta, l'altro 25, e si guadagnano 7 lire; se si vuole sapere quanto di queste 7 lire tocchi a ognuno, fai così:

$$\frac{7 \cdot 18}{43} = \frac{126}{43} = 2 + \frac{40}{43} \quad \text{lire}$$

$$\frac{40}{43} \text{ lire} = ? \text{ soldi}$$

$$\frac{40 \cdot 20}{43} = 18 + \frac{800 - 18 \cdot 43}{43} = 18 + \frac{26}{43}$$

$$\frac{26}{43} \text{ soldi} = ? \text{ denari}$$

$$\frac{26 \cdot 12}{43} = 7 + \frac{312 - 7 \cdot 43}{43} = 7 + \frac{11}{43}$$

Scrivi a partire da destra la parte del primo socio, del secondo e il guadagno: 18, 25, 7. Somma 18 con 25: viene 43 che metterai a denominatore a 18 e a 25. Ora moltiplica il 7 del guadagno per 18/43 e troverai quanto del guadagno tocca al primo socio. Viene $2 + \frac{40}{43}$, cioè 2 lire, 18 soldi e $7 + \frac{11}{43}$ di denari. Il resto tocca all'altro.

Puoi anche trovarlo moltiplicando 7 per $\frac{25}{43}$.

• De consolamine monetarum – Cap.11

Incipit capitulum undecimum de consolamine monetarum.

Moneta quidem dicitur quelibet denariorum quantitas; et ellicitur ex quavis argenti, et eris commixtione. Maior autem moneta dicitur, in cuius libra fuerit plus argenti, quam in ea, que fieri desideratur. Minor uero, in qua minus. Moneta consolari dicitur, quando ponitur in libra ipsius aliqua data argenti quantitas. Et cum dicimus: habeo monetam ad uncias quantaslibet, ut dica[mus] ad 2, intelligimus quod in libra ipsius monete habeantur uncie 2 argenti. Consolatur enim moneta tribus modis. Primus modus est, quando consolatur ex data quantitate argenti uel eris. Secundus cum consolatur ex quibuslibet datis monetis cum argenti, uel eris, uel utriusque additione tertius: quando tantum ex datis monetis consolatur; que omnia, ut in hoc capitulo perfecte contineantur, ipsum in differentiis septem diuidimus; quarum prima erit de consolamine monete ex data argenti, uel eris quantitate:

• De consolamine monetarum – Cap.11

Incipit capitulum undecimum de consolamine monetarum.

Moneta quidem dicitur quelibet denariorum quantitas; et ellicitur ex quavis argenti, et eris commixtione. Maior autem moneta dicitur, in cuius libra fuerit plus argenti, quam in ea, que fieri desideratur. Minor uero, in qua minus. Moneta consolari dicitur, quando ponitur in libra ipsius aliqua data argenti quantitas. Et cum dicimus: habeo

titolo di una moneta:

tra 0 e 12

once d'argento in una libbra di moneta

1 libbra = 12 once

1. fusione di argento e bronzo
2. fusione di monete con argento e bronzo
3. fusione di monete

• De consolamine monetarum – Cap.11

1. fusione di argento e bronzo

- Quidam habet libras 7 argenti, ex quibus vult facere monetam ad uncias 2 argenti in libra; et vult scire quantitatem totius consolaminis, nec non et eris iunctionem.

Un tale ha 7 libbre di argento, dalle quali vuol fare monete a 2 once per libbra; si vuole sapere la quantità da fondere e il bronzo da aggiungere.

$$7 \cdot 12 = 84$$

$$84 : 2 = 42$$

$$42 - 7 = 35$$

Soluzione 1.

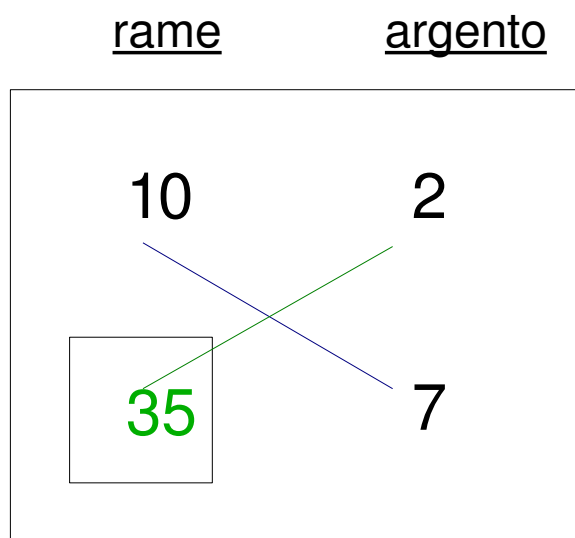
Di queste 7 libbre d'argento fanno 84 once, e saranno 84. Dato che in ogni libbra di moneta ci sono 2 once d'argento, quante volte 2 once entrano in 84, tante volte si può fondere una libbra di monete da queste once d'argento. Ma in 84 once due once entrano 42 volte; dunque da 84 once d'argento si possono fondere 42 libbre di monete. Dalle quali, tolte le 7 libbre d'argento, rimangono 35 libbre di bronzo da aggiungere.

• De consolamine monetarum – Cap.11

1. fusione di argento e bronzo

- Quidam habet libras 7 argenti, ex quibus vult facere monetam ad uncias 2 argenti in libra; et vult scire quantitatem totius consolaminis, nec non et eris iunctionem.

Un tale ha 7 libbre di argento, dalle quali vuol fare monete a 2 once per libbra; si vuole sapere la quantità da fondere e il bronzo da aggiungere.



Soluzione 2.

Poiché in ogni libbra devono esserci 2 once d'argento il resto delle once, cioè 10, per ogni libbra sarà di rame.

Dunque per ogni 2 once di argento che si hanno bisogna prenderne 10 di rame. Scrivi allora 2 libbre di argento e 10 di rame su una riga e 7 libbre di argento sotto l'argento, come nello schema. Moltiplica 7 per 10 e dividi per 2: vengono 35 libbre di rame.

• De consolamine monetarum – Cap.11

2. fusione di monete con argento e bronzo

Item si habueris libras 7 ad uncias 5 unius monete et libras 9 ad uncias 4 alterius et volueris ex eis monetam ad uncias 3 cuprum addendo conformare; et quesieris iunctionem cupri nec non et totius consolaminis quantitatem sic facies.

Si hanno 7 libbre di alcune monete a 5 onces d'argento ciascuna e 9 libbre di altre monete a 4 onces e se ne vuole fare una moneta a 3 onces aggiungendo del rame. Quanto rame si deve aggiugnere e qual è il totale delle monete fuse?

1. trovo il totale dell'argento
71

2. trovo quante libbre di monete a 3 onces
 $23 + \frac{2}{3}$

3. trovo quante libbre di rame in totale

$$(23 + \frac{2}{3}) \times \frac{9}{12} = \frac{207 + 6}{12} = \frac{213}{12} = 17 + \frac{9}{12}$$

4. trovo quante libbre di rame nelle monete

$$(7 \times 7 + 9 \times 8) / 12 = (49 + 72) / 12 = 121 / 12 = 10 + \frac{1}{12}$$

5. trovo quanto rame da aggiungere

$$\frac{213}{12} - \frac{121}{12} = 17 + \frac{9}{12} - (10 + \frac{1}{12}) = 7 + \frac{8}{12} = 7 + \frac{2}{3}$$

Soluzione.

Moltiplica 7 per 5, viene 35, e 9 per 4, viene 36, somma: viene 71, che è il totale dell'argento contenuto nelle monete. Dividi per 3, viene $23 + \frac{2}{3}$, che sono le libbre totali di monete che verranno. Togli le libbre di rame delle monete iniziali e troverai la quantità di rame da aggiungere, cioè $7 + \frac{2}{3}$ libbre.

• Cap. 12 Pars tertia de questionibus arborum et similium

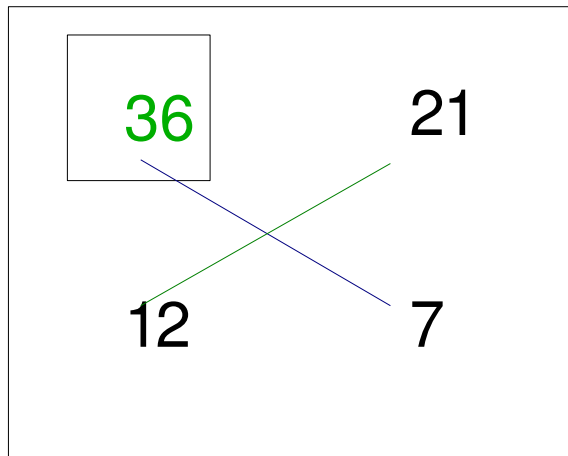
• Est arbor cuius $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ latet sub terra; et sunt palmi 21; queritur quanta sit arboris illius longitudo.

◦ C'è un albero, di cui $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ stanno sotto terra e sono 21 palmi. Si chiede quale sia la lunghezza dell'albero.

• LA FALSA POSIZIONE – Cap 12, III

• Est arbor cuius $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ latet sub terra; et sunt palmi 21; queritur quanta sit arboris illius longitudo.

◦ C'è un albero, di cui $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ stanno sotto terra e sono 21 palmi. Si chiede quale sia la lunghezza dell'albero.



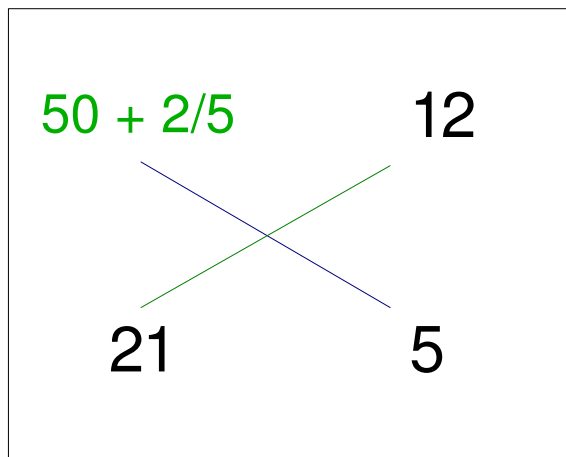
Soluzione.

Supponiamo che la lunghezza dell'albero sia 12 (scelto perché divisibile sia per 3 che per 4). Prendiamo $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ del 12 che abbiamo supposto come lunghezza. Si ottiene 7. Se avessimo ottenuto 21 avremmo a caso trovato che l'albero era 12 palmi. Ma poiché 7 non è 21 avremo che 7 sta a 21 come la lunghezza ipotizzata dell'albero, cioè 12, sta a quella da trovare. In altre parole: se per 12 che suppongo trovo 7, cosa devo prendere per ottenere 21? Secondo la regola delle tre cose moltiplica gli estremi, cioè 12 e 21, e dividi per l'altro numero, cioè 7. Si ottiene 36.

• LA FALSA POSIZIONE – Cap 12, III

• Item est arbor cuius $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ latet sub terra. Residuum vero quod est super terram est palmi 21.

◦ C'è un albero, di cui $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ stanno sotto terra. Il rimanente, che sta sopra la terra, è 21 palmi. Si chiede quale sia la lunghezza dell'albero.



Soluzione.

Supponiamo che la lunghezza dell'albero sia 12 da cui tolti $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$, che fa 7, restano sopra la terra 5 palmi. Dunque dirai: per 12 che ho posto, viene 5; cosa devo porre perché venga 21? Moltiplica allora gli estremi, cioè 12 per 21, e dividi per il medio 5; verrà $50 \frac{2}{5}$.

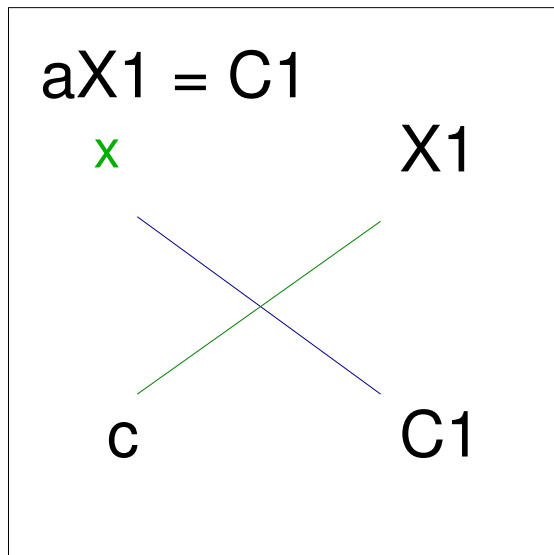
• LA FALSA POSIZIONE – Cap 12, III

• Item est arbor cuius $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ latet sub terra. Residuum vero quod est super terram est palmi 21.

◦ C'è un albero, di cui $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ stanno sotto terra. Il rimanente, che sta sopra la terra, è 21 palmi. Si chiede quale sia la lunghezza dell'albero.

$$ax = c$$

$$(1 - (\frac{1}{4} + \frac{1}{3}))x = 21$$



Soluzione.

Supponiamo che la lunghezza dell'albero sia 12 da cui tolti $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$, che fa 7, restano sopra la terra 5 palmi. Dunque dirai: per 12 che ho posto, viene 5; cosa devo porre perché venga 21? Moltiplica allora gli estremi, cioè 12 per 21, e dividi per il medio 5; verrà $50 \frac{2}{5}$.

• LA DOPPIA FALSA POSIZIONE – Cap 13

elcataym

• Valeat enim cantare, scilicet rotuli 100, libras 13; et queratur quantum valeat rotulus 1.

◦ Se un cantare, cioè 100 rotoli, vale 13 lire, quanto vale 1 rotolo?

soldi	1	2
err.(lire)	8	3
diff.ip.(soldi)	1	3/5
diff.err.(lire)	5	3

Soluzione.

Supponiamo che 1 rotolo valga 1 soldo, allora 100 rotoli valgono 100 soldi, cioè 8 e 5 lire; l'errore della prima supposizione è dunque 8 lire. Supponiamo ora che 1 rotolo valga 2 soldi, allora 100 rotoli valgono 200 soldi, cioè 10 lire; l'errore della seconda supposizione è dunque 3 lire. Un aumento di uno (da 1 soldo a 2 soldi) nella supposizione iniziale ha portato dunque a una diminuzione di 5 (da 8 a 3 lire) nell'errore del risultato finale. Si dirà allora: per 1 che ho aumentato, mi sono avvicinato di 5; quanto dovrò ancora aumentare per avvicinarmi di altri 3? Si moltiplica 1 per 3 e si divide per 5. Poiché 1 soldo sono 12 denari verrà $(12 \cdot 3) / 5$ cioè $7 + 1/5$ denari, che aggiunti ai 2 soldi della seconda ipotesi danno 2 soldi e $7 + 1/5$ denari.

2soldi
7+1/5 denari

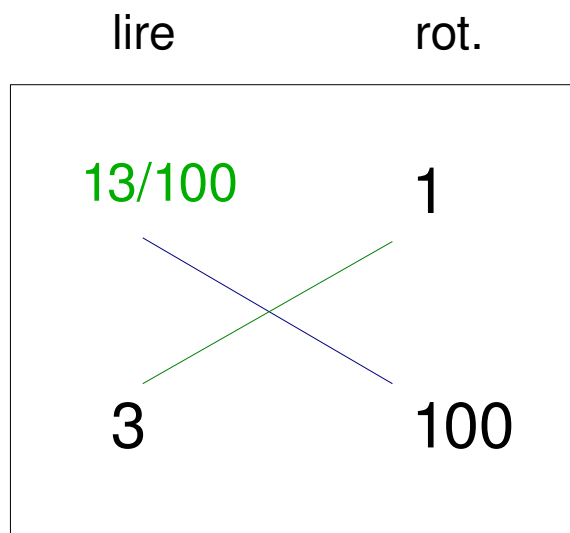
$3/5$ soldi = $(12 \cdot 3) / 5$ denari

• LA DOPPIA FALSA POSIZIONE – Cap 13

elcataym

• Valeat enim cantare, scilicet rotuli 100, libras 13; et queratur quantum valeat rotulus 1.

◦ Se un cantare, cioè 100 rotoli, vale 13 lire, quanto vale 1 rotolo?



$$13/100 \text{ lire} = 13 \times 20/100 \text{ soldi} = 260/100 \text{ soldi} = 2 + 60/100 \text{ soldi}$$

$$60/100 \text{ soldi} = 3/5 \times 12 \text{ denari} = 36/5 \text{ denari} = 7 + 1/5 \text{ denari}$$

• LA DOPPIA FALSA POSIZIONE – Cap 13

elcataym

• Valeat enim cantare, scilicet rotuli 100, libras 13; et queratur quantum valeat rotulus 1.

◦ Se un cantare, cioè 100 rotoli, vale 13 lire, quanto vale 1 rotolo?

soldi	1	2
err.(lire)	8	3
diff.ip.(soldi)	1	3/5
diff.err.(lire)	5	3

Soluzione.

Supponiamo che 1 rotolo valga 1 soldo, allora 100 rotoli valgono 100 soldi, cioè 8 e 5 lire; l'errore della prima supposizione è dunque 8 lire. Supponiamo ora che 1 rotolo valga 2 soldi, allora 100 rotoli valgono 200 soldi, cioè 10 lire; l'errore della seconda supposizione è dunque 3 lire. Un aumento di uno (da 1 soldo a 2 soldi) nella supposizione iniziale ha portato dunque a una diminuzione di 5 (da 8 a 3 lire) nell'errore del risultato finale. Si dirà allora: per 1 che ho aumentato, mi sono avvicinato di 5; quanto dovrò ancora aumentare per avvicinarmi di altri 3? Si moltiplica 1 per 3 e si divide per 5. Poiché 1 soldo sono 12 denari verrà $(12 \cdot 3) / 5$ cioè $7 + 1/5$ denari, che aggiunti ai 2 soldi della seconda ipotesi danno 2 soldi e $7 + 1/5$ denari.

2soldi
7+1/5 denari

$3/5$ soldi = $(12 \cdot 3) / 5$ denari

• LA DOPPIA FALSA POSIZIONE – Cap 13

elcataym

3. fusione di monete

• Quidam habuit monetam que erat ad uncias 3 et aliam monetam que erat ad uncias 6; et voluit ex eis facere libram 15 monete que essent ad uncias 5; et queritur quantum de una quaque moneta in predicto consolamine mittere debuit.

• Un tale ha delle monete a 3 once d'argento e altre a 6 once d'argento per libbra. Vuole con queste fare 15 libbre di monete a 5 once d'argento. Quante monete di ciascun tipo deve fondere?

			Per 15 libbre a 5 once d'argento occorrono in tutto 75 once d'argento.
libb.tipol	3	4	Supponiamo di prendere 3 libbre della prima moneta. Abbiamo allora $3 \times 3 = 9$ once d'argento dalla prima moneta e dalle 12 libbre che mancano e che devo prendere della seconda moneta ottengo altre $12 \times 6 = 72$ once d'argento. In totale 81 once; dunque in questa prima ipotesi ho un errore di 6 once. Supponiamo ora di prendere 4 libbre della prima moneta. Abbiamo allora $4 \times 3 = 12$ once d'argento dalla prima moneta e dalle 11 libbre che mancano e che devo prendere della seconda moneta ottengo altre $11 \times 6 = 66$ once d'argento. In totale 78 once; dunque in questa seconda ipotesi ho un errore di 3 once.
err.	6	3	
diff.ip.	1	1	
diff.err.	3	3	

Dunque aumentando di una libbra la prima moneta ho diminuito di 3 l'errore. Quanto allora devo aumentare ancora la prima moneta per diminuire ancora di 3 once?

Moltiplica 1 per 3 e dividi per 3. Viene 1, e dunque dovr` usare 5 libbre della prima moneta e 10 della seconda.

4+1
libbre tipol

LA DOPPIA FALSA POSIZIONE – Cap 13

elcataym

3. fusione di monete

• Quidam habuit monetam que erat ad uncias 3 et aliam monetam que erat ad uncias 6; et voluit ex eis facere libram 15 monete que essent ad uncias 5; et queritur quantum de una quaque moneta in predicto consolamine mittere debuit.

• Un tale ha delle monete a 3 once d'argento e altre a 6 once d'argento per libbra. Vuole con queste fare 15 libbre di monete a 5 once d'argento. Quante monete di ciascun tipo deve fondere?

libb.tipol	3	4
err.	6	3

X1	X2
c-C1	c-C2

$$\begin{cases} 3X + 6Y = 75 & \text{once d'argento totali} \\ X + Y = 15 & \text{libbre totali} \end{cases}$$

diff.ip.	1	1
diff.err.	3	3

ΔX	?
C1-C2	c-C2

$$3x + 6(15-x) = 75$$

$$ax + b = c$$

$$aX1 + b = C1 \quad X2 = X1 + \Delta X$$

$$aX2 + b = C2$$

$$a\Delta X = C1 - C2$$

4+1
libbre tipol

• **CAP. 12, De solutionibus multarum positarum quaestionum quas erraticas appellamus.**

Quot paria coniculatorum in uno anno ex uno pario germinentur.

Quidam posuit unum par coniculatorum in quodam loco, qui erat undique pariet circumdatus, ut sciret, quot ex eo paria germinerentur in uno anno: cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare; et in secundo mense ab eorum natiuitate germinant. Quia suprascriptum par in primo mense germinat, duplicabis ipsum erunt paria duo in uno mense. Ex quibus unum, scilicet primum, in secundo mense geminat; et sic sunt in secundo mense paria 3; ex quibus in uno mense duo pregnantur; et geminantur in tercio mense paria 2 coniculatorum; et sic sunt paria 5 in ipso mense; ex quibus in ipso pregnantur paria 3; et sunt in quarto mense paria 8 ex quibus paria 5 geminant alia paria 5: quibus additis cum parijs 8, faciunt paria 13 in quinto mense; ex quibus paria 5, que geminata fuerunt in ipso mense, non concipiunt in ipso mense, sed alia 8 paria pregnantur; et sic sunt in sexto mense paria 21

parium	1
primus	2
Secundus	3
tercius	5
Quartus	8
Quintus	13
Sextus	21
Septimus	34
Octauus	55
Nonus	80
Decimus	144
Undecimus	233
Duodecimus	377

• Il problema dei conigli, cap. 12

• Quidam posuit unum par cuniculorum in quodam loco, qui erat undique pariete circumdatus, ut sciret quot ex eo paria germinarentur in uno anno, cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare et in secundo mense ab eorum nativitate germinant.

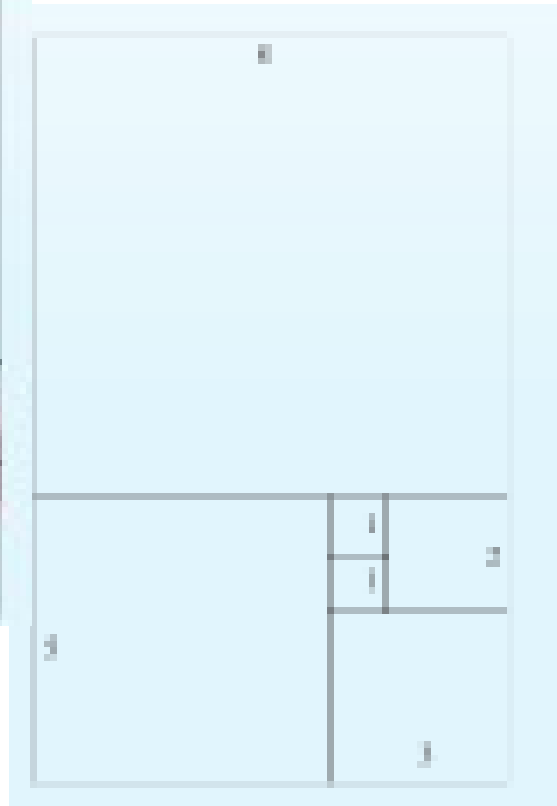
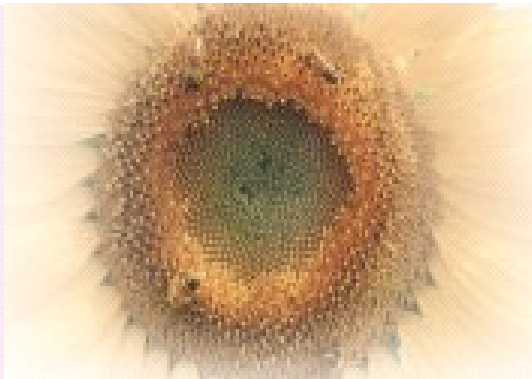
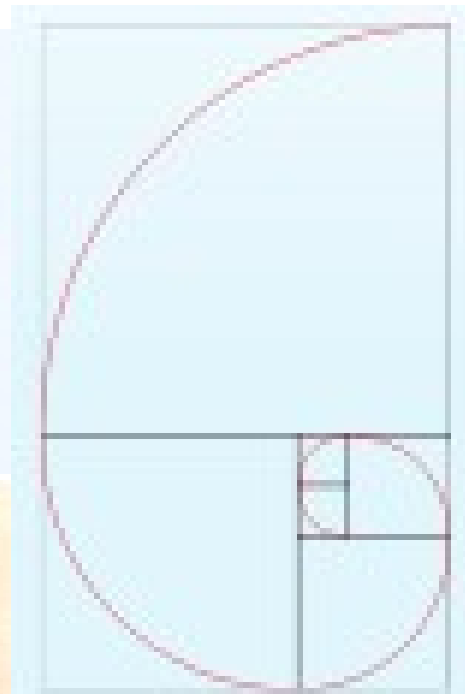
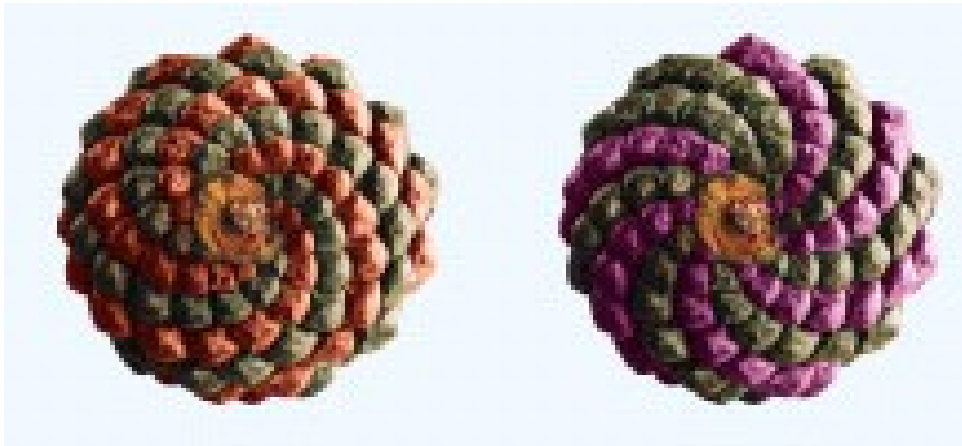
◦ Un tale mise una coppia di conigli in un luogo chiuso per sapere quante coppie sarebbero nate in un anno da quella coppia sapendo che in ogni mese da una coppia nasce un'altra coppia e che ogni coppia inizia a riprodursi nel secondo mese di vita.



Nel primo mese la coppia si riproduce e dunque dopo un mese ci sono 2 coppie. Nel secondo mese la prima coppia si riproduce ancora e dunque vi sono 3 coppie. Di queste 2 rimangono gravide. Nel terzo mese nascono 2 nuove coppie e dunque vi sono 5 coppie, di cui 3 rimangono gravide. Nel quarto mese vi sono 8 coppie di cui 5 rimangono gravide. Nel quinto vi sono 13 coppie di cui 8 rimangono gravide. Nel sesto 21 coppie di cui 13 gravide. Nel settimo 34 coppie di cui 21 gravide, nell'ottavo 55 di cui 34

- **Il problema dei conigli, cap. 12**

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610,



- **Progressioni geometriche, cap. 12**

- Septem vetule vadunt Romam quarum quelibet habet burdones 7, et in quolibet burdone sunt saculi 7 et in quolibet saculo panes 7 et in quilibet panis habet cultellos 7 et quilibet cultellus habet vaginas 7. Queritur summa omnium predictorum.

- Sette vecchie vanno a Roma; ognuna ha sette muli, ogni mulo ha sette sacchi, in ogni sacco ci sono sette pani, ogni pane ha sette coltelli, ogni coltello sette guaine. Si chiede la somma di tutti.

Sette case; in ognuna sette gatti; ogni gatto uccide sette topi; ogni topo aveva mangiato sette grani; ogni grano produce sette hekat. Qual è il totale di tutti?

Papiro di Rhind

• Progressioni geometriche, cap. 12

• Septem vetule vadunt Romam quarum quelibet habet burdones 7, et in quolibet burdone sunt saculi 7 et in quolibet saculo panes 7 et in quilibet panis habet cultellos 7 et quilibet cultellus habet vaginas 7. Queritur summa omnium predictorum.

◦ Sette vecchie vanno a Roma; ognuna ha sette muli, ogni mulo ha sette sacchi, in ogni sacco ci sono sette pani, ogni pane ha sette coltelli, ogni coltello sette guaine. Si chiede la somma di tutti.

$$\begin{array}{r} 137256 \\ 7 \\ 49 \\ 343 \\ 2401 \\ 16807 \\ 117649 \end{array}$$

Soluzione.

Moltiplica il numero delle vecchie, 7, per il numero dei muli, 7; viene 49. Moltiplica 49 per i 7 sacchi, viene 343. Moltiplica per 7 pani; viene 2401.

Moltiplica per 7 coltelli; viene 16807. Moltiplica per 7 guaine; viene 117649. Sommando tutto viene 137256.

• Progressioni geometriche, cap. 12

• Est arbor que habet ramos 100, et in quolibet ramo sunt nidi 100; et in quolibet nido sunt ova 100; et in quolibet ovo sunt aves 100.

◦ Un albero ha 100 rami, in ogni ramo ci sono 100 nidi, in ogni nido 100 uova e in ogni uovo 100 uccelli. Qual è la somma di tutti?

Soluzione.

Prendi i 100 rami e aggiungi due zeri per avere i nidi, viene 10000. Metti altri due zeri per le uova, viene 1000000. Metti altri due zeri per gli uccelli, viene 100000000.

Per sommare metti un 1 al posto del terzo, del quinto e del settimo zero. Viene 101010100.

- Progressioni geometriche, cap. 12

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

- Progressioni geometriche, cap. 12

$$\sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

$$= \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

• Il problema della scacchiera

Incipit pars 9^a de duplicatione scacherij, et quorundam aliarum regularum.

Duplicatio quidem scacherij duplici modo proponitur; quorum unus est cum sequens punctum sui antecedentis duplum sit; alius, cum sequens punctum omnium antecedentium punctorum duplum esse proponatur. Unde qualiter utrum duplicatio fieri debeat, ad presens ostendere procuramus. Prima namque duplicatio duplici modo fieri potest, videlicet si de puncto in punctum duplicando usque ad ultimum punctum egrediendo operabimur: alius modus est, ut duplices tantum primum punctum, et habebis duo; que duo multiplica in se, erunt 4; que 4 sunt 1, magis numero duplicationis duorum punctorum. Verbi gratia. In primo puncto pone 1. In secundo 2; quibus iunctis, faciunt 3; quibus tribus superscripta 4 sunt 1 plus; quibus 4 in se multiplicatis, faciunt 16; qui numerus est uno magis duplicatione dupli duorum punctorum, videlicet de punctis 4. Verbi gratia: in primo est 1. In secundo 2. In | tercio 4. In quarto 8; quibus insimul iunctis, faciunt 15; que sunt 1, minus de 16. Item 16 in se multiplica, faciunt 256; que sunt 1, plus numero duplicationis dupli 114^{or} punctorum superscriptorum, scilicet de

secundo 2. In tercio 4. In quarto 8. In quinto 16. In sexto 32. In septimo 64. In octavo 128; quibus insimul iunctis, faciunt 255; quorum 255 superscripta 256 sunt, 1 plus, ut prediximus: quare multiplicatis 256 in se, faciunt 65536, que sunt 1, magis duplicatione dupli unius linee, scilicet de punctis 16: propter eandem ergo multiplica 65536 in se, faciunt 4294967296; que similiter sunt uno magis numero duplicationis dupli duarum linearum, videlicet de punctis 32, que dimidium optinent scacherij. Unde multiplica 4294967296 in se, reddunt 18446744073709551616; que sunt 1, magis duplicatione totius scacherij; quo numero in se ipso multiplicato, reddunt 1, magis duplicatione duorum scacheriorum, scilicet $\overbrace{340282366920939463483374607431768211456}$; et sic multiplicando possemus procedere in infinitum.

fol. 137 recto.



• Il problema della scacchiera

• Duplicatio quidem scacherii duplici modo proponitur; quorum unus est cum sequens punctum sui antecedentis duplum sit; alius cum sequens

◦ Il raddoppio della scacchiera si può fare in due modi; uno è che in ogni casella della scacchiera c'è un numero doppio del precedente ...

1	2	4	8	16	32	64	128
256	...						

Il primo tipo di raddoppio si può calcolare in due modi.

Nel primo modo si procede raddoppiando di punto in punto, fino all'ultima casella

• Il problema della scacchiera

- Il raddoppio della scacchiera si può fare in due modi; uno è che in ogni casella della scacchiera c'è un numero doppio del precedente ...

		3	7	15	31	63	127	...
	1	2	4	8	16	32	64	128
1	2	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	
	256	...	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}
65536								
2^{16}	...							
2^{24}								
2^{32}								
2^{40}								
2^{48}								
2^{54}							...	2

Nel secondo modo si osserva che sommando la casella numero uno e numero due si ottiene 3, valore che è inferiore di 1 rispetto alla casella successiva dove c'è il raddoppio della casella due, sommando la casella numero uno, numero due e numero tre si ottiene 7, valore che è inferiore di 1 rispetto alla casella successiva dove c'è il raddoppio della casella tre, e così via. Se allora, raddoppiata la prima casella, moltiplico il valore 2 per se stesso, e poi il 4 per se stesso, e poi il 16 per se stesso ottengo rispettivamente i valori 4, 16, 256 che mi danno la somma aumentata di uno delle prime due, quattro, otto caselle; proseguendo moltiplico 256 per se stesso e ottengo 65536 che mi dà la somma aumentata di uno delle prime sedici caselle, moltiplico 65536 per se stesso e ottengo 4294967296 che dà la somma aumentata di uno delle prime trentadue caselle, moltiplico quest'ultimo valore per se stesso e ottengo la somma aumentata di uno dell'intera scacchiera: 18446744073709551616 .

• Il problema della scacchiera

$$1 + 2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

		3	7	15	31	63	127	...
	1	2	4	8	16	32	64	128
1	2	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	
256	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}
65536	2^{16}	...						
	2^{24}							
4292967296	2^{32}							
	2^{40}							
	2^{48}							
	2^{54}				...			2^{63}

- $256 - 1 = 2^8 - 1$
- $256 \times 256 - 1 = 2^{16} - 1$
- $65536 \times 65536 - 1 = 2^{32} - 1$
- $4292967296 \times 4292967296 - 1 = 2^{64} - 1$
 $= 18446744073709551616 - 1$

• Il problema della scacchiera

18 446 744 073 709 551 615

Sed cum numerus duplicationis scacherij post multitudinem intelligi nequeat; qualiter apertius intelligi possit, ostendere procuramus. Sumantur bizantij 65536, qui colliguntur ex duplicatione duarum linearum, scilicet 16 punctorum; et impleatur ex hijs arca una; et eas cum ipsa arca duplicando per ordinem; et sic habebimus in septimo decimo puncto, uidelicet in primo puncto tercie linee, archas duas; secundo eiusdem linee archas 4. In tercio 8. In quarto 16. In quinto 32. In sexto 64. In septimo 128. In ultimo eiusdem linee 256. In primo quarte linee 512.

In septimo decimo puncto habebimus 65536 archas duplicando per ordinem si una arca impleatur in ultimo puncto eiusdem ciuitatis arce 65536 oportet

Supponiamo che i numeri rappresentino altrettanti bisanti (il bisante è una moneta d'oro imperiale); le prime due righe della scacchiera assommeranno a 65.536 bisanti, che riempiono una cassa. Alla terza riga si ricomincia con 2, 4, 8, casse, finché alla fine della quarta riga si saranno riempite 65.536 casse, che faranno una casa. La quinta e la sesta riga daranno allora 65.536 case, una città; e infine le ultime due righe moltiplicheranno il numero delle città fino a 65.536. In totale, se si parte con un bisante, tutta la scacchiera ammonterà a 65.536 città, ognuna delle quali sarà composta di 65.536 case, che conterranno ciascuna 65.536 casse con 65.536 bisanti ognuna.

- De quaestionibus aliebrae et almuchabalae, Cap. 15, III

*Incipit pars tertia de solutione quarumdam questionum secundum Modum
algebre et almuchabale, scilicet ad proportionem et restaurationem.*

Maumicht

Ad compositionem quidem elgebre (*sic*), et elmulchabale tres proprietates, que sunt in quolibet numero, considerantur, que sunt radix, quadratus, et numerus simples. Cum itaque aliquis numerus multiplicatur in se, et prouenit aliquid. Tunc factus ex multiplicatione quadratus est multiplicati; et multiplicatus sui quadrati est radix. Vt cum multiplicatur 3 in se, ueniunt 9. Sunt enim 3 radix de 9; et 9 sunt quadratus ternarii. Et cum numerus non habet respectum ad quadratum uel radicem, tunc simpliciter numerus appellatur: he autem in solutionibus questionum inter se equantur sex modis, ex quibus tres sunt simplices, et tres compositi. Primus quidem modus est,

• EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

*Incipit pars tertia de solutione quarumdam questionum secundum Modum
algebre et almuchabale, scilicet ad proportionem et restaurationem.*

Maunclit

Ad compositionem quidem elgebre (*sic*), et elmulchabale tres proprietates, que sunt in quolibet numero, considerantur, que sunt radix, quadratus, et numerus simples. Cum itaque aliquis numerus multiplicatur in se, et prouenit aliquid. Tunc factus ex multiplicatione quadratus est multiplicati; et multiplicatus sui quadrati est radix. Vt cum multiplicatur 3 in se, ueniunt 9. Sunt enim 3 radix de 9; et 9 sunt quadratus ternarii. Et cum numerus non habet respectum ad quadratum uel radicem, tunc simpliciter numerus appellatur: he autem in solutionibus questionum inter se equantur sex modis, ex quibus tres sunt simplices, et tres compositi. Primus quidem modus est,

NUMERO

RADICE (numero incognito) o COSA

CENSO (numero moltiplicato in sé)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- censo uguale a radici ($x^2 = bx$)
- censo uguale a numero ($x^2 = c$)
- radici uguali a numero ($bx = c$)

- censo e radici uguali a numero ($x^2 + bx = c$)
- censo uguale a radici e numero ($x^2 = bx + c$)
- censo e numero uguali a radici ($x^2 + c = bx$)

• EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

- censo uguale a numero ($x^2 = c$)

Hec omnia intelligantur cum census augmentatus vel diminutus equabitur alicui numero.

Sed ut hec apertius habeantur ponantur 5 census equari denariis 45.

Divide ergo 45 per 5, venient denarii 9 qui equantur censui, hoc est census est 9, et radix eius est 3.

Perché sia più chiaro si ponga 5 censi uguale a 45 denari.

Dividi allora 45 per 5, verrà 9 denari uguale a un censo, cioè un censo è 9 e la sua radice è 3

Esempio

$$5x^2 = 45$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

• EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

- censo uguale a numero ($x^2 = c$)

Similiter cum census $4\frac{1}{3}$ equatur denariis 26 divides 26 per $4\frac{1}{3}$ scilicet 78 per 13, exhibunt 6 quibus equatur unus census.

Quare radix eius est surda, cum sit radix numeri non quadrati.

In modo simile se $4\frac{1}{3}$ è eguale a 26 denari, dividi 26 per $4\frac{1}{3}$, cioè 78 per 13, verrà 6 che sono uguali a un censo.

Perciò la sua radice è sorda, perché è radice di un numero non quadrato.

Esempio

$$(4 + \frac{1}{3})x^2 = 26$$

$$(\frac{13}{3})x^2 = 26$$

$$x^2 = 26 \cdot \frac{3}{13}$$

$$x^2 = \frac{78}{13}$$

$$x^2 = 6$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- Termini arabi nella matematica medievale

radice

jidhr

جذر

numero sordo

jidhr 'aşamm

جذر أصم

zero, cifra

şifr

صفر

cosa

shay'

شيء

censo

māl

مال

cosa
censo

nell'algebra latina medievale il termine italiano corrispondente
alla parola araba *şifr* è "cifra",
alla parola araba *shay'* è "cosa",
alla parola araba *māl* è "censo".

- **Termini arabi nella matematica medievale**

algoritmo

al-khwārizmī

الخوارزمي

algebra

al-jabr

الجبر

almucabala

al-muqābala

المقابلة

algebra
almucabala

elcataym

al-khaṭa'aym

الخطأين

elcataym, elkataym

nel libro che si intitola "al-khaṭa'aym" (questo nome arabo è stato
"trasmesso" nella doppia forma "kataym"
in al-Buhārī, "al-khaṭa'aym")

- **Quando census et radices equantur numero**
Censo e radici uguali a numero

$$x^2 + bx = c$$

• Sic facias: accipe quadratum medietatis radicum et adde eum super numerum datum; et eius quod provenerit radicem accipe; de qua numerum medietatis radicum tolle; et quod remanserit erit radix quesiti census.

◦ Fai così: prendi il quadrato della metà delle radici e aggiungilo al numero dato; da quello che viene prendi la radice; da questa togli metà delle radici.

$$x^2 + bx + c = 0$$

soluzioni

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}}{2}$$

$$x^2 + bx = c$$

soluzione

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$$

- **Quando census et radices equantur numero**

Censo e radici uguali a numero

$$x^2 + bx = c$$

- Fai così prendi il quadrato della metà delle radici e aggiungilo al numero dato; da quello che viene prendi la radice; da questa togli metà delle radici.

Verbi gratia: census et decem radices equentur 39. Dimidium itaque ex radicibus est 5; quibus in se multiplicatis faciunt 25; quibus additis cum 39 faciunt 64; de quorum radice que est 8 si auferatur medietas radicum, scilicet 5, remanebunt 3 pro radice quesiti census. Quare census est 9, et ipsius decem radices sunt 30; et sic census et decem radicem equantur 39.

- **Quando census et radices equantur numero**

Censo e radici uguali a numero

$$x^2 + bx = c$$

- Fai così prendi il quadrato della metà delle radici e aggiungilo al numero dato; da quello che viene prendi la radice; da questa togli metà delle radici.

$$x^2 + 10x = 39$$

$$x^2 + 10x - 39 = 0$$

$$x = -5 \pm \sqrt{5^2 + 39}$$

$$x = -5 \pm \sqrt{25 + 39}$$

$$x = -5 \pm \sqrt{64}$$

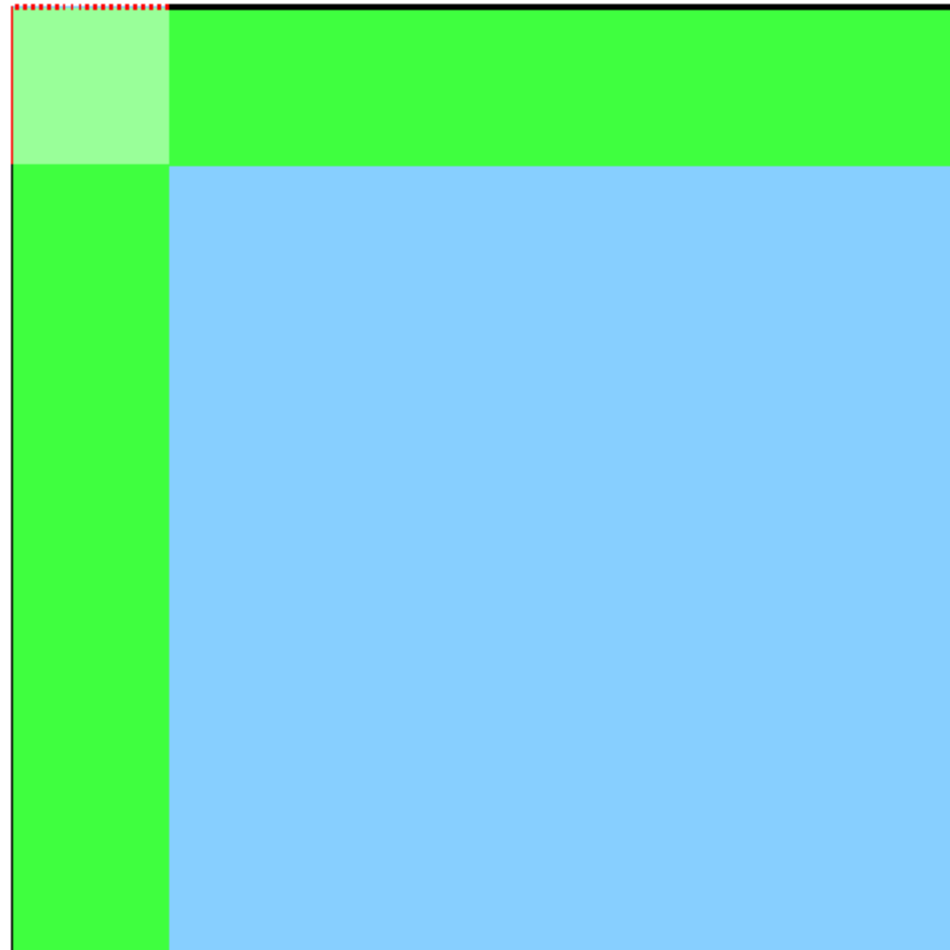
$$x = -5 \pm 8$$

$$x = 3 \quad \text{o} \quad x = -13$$

Esempio: un censo e dieci radici siano uguali a 39. La metà delle radici è 5 che moltiplicato per se stesso fa 25; questo aggiunto a 39 fa 64; dalla cui radice, che è 8, se si toglie metà delle radici, cioè 5, rimarrà 3 che dà la radice del censo richiesto. Quindi il censo è 9, e le sue dieci radici sono 30; e così il censo con le dieci radici fanno 39.

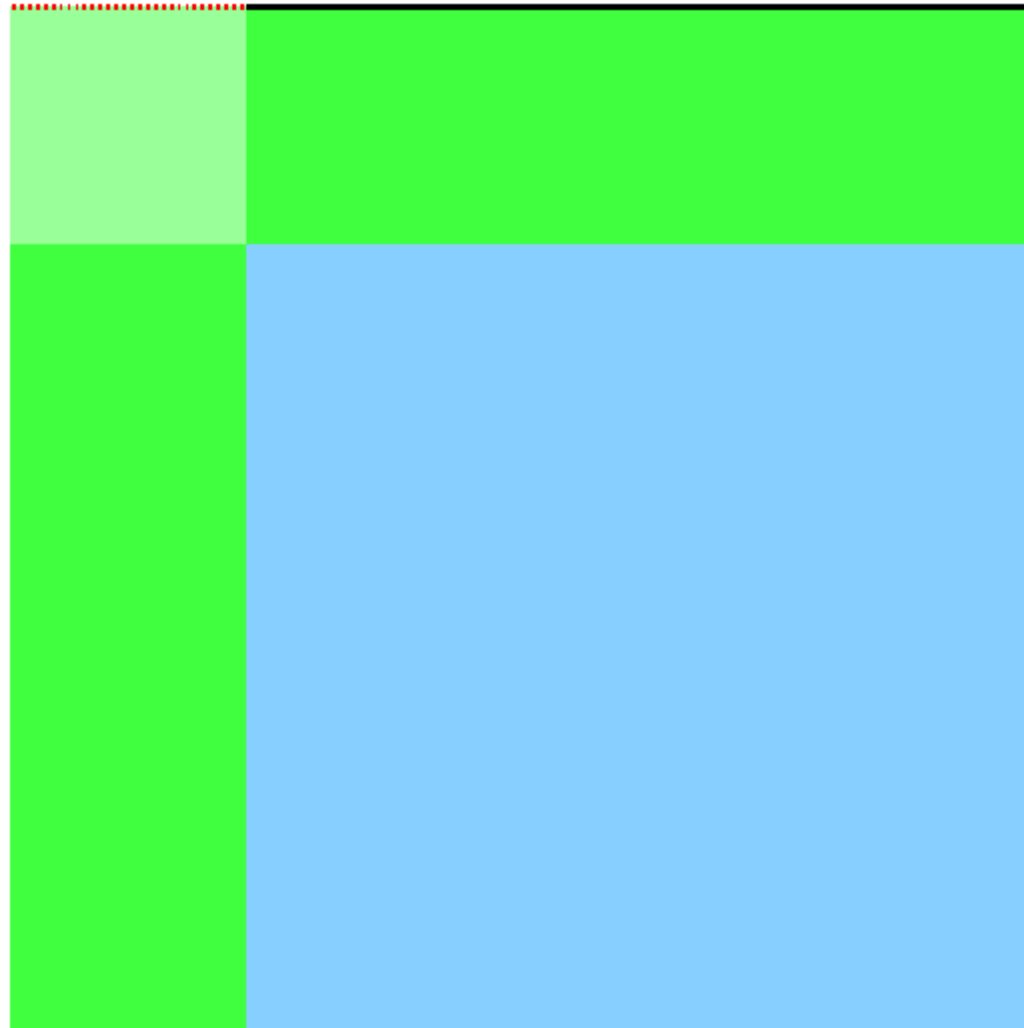
- **Quando census et radices equantur numero**

Censo e radici uguali a numero – costruzione geometrica 1



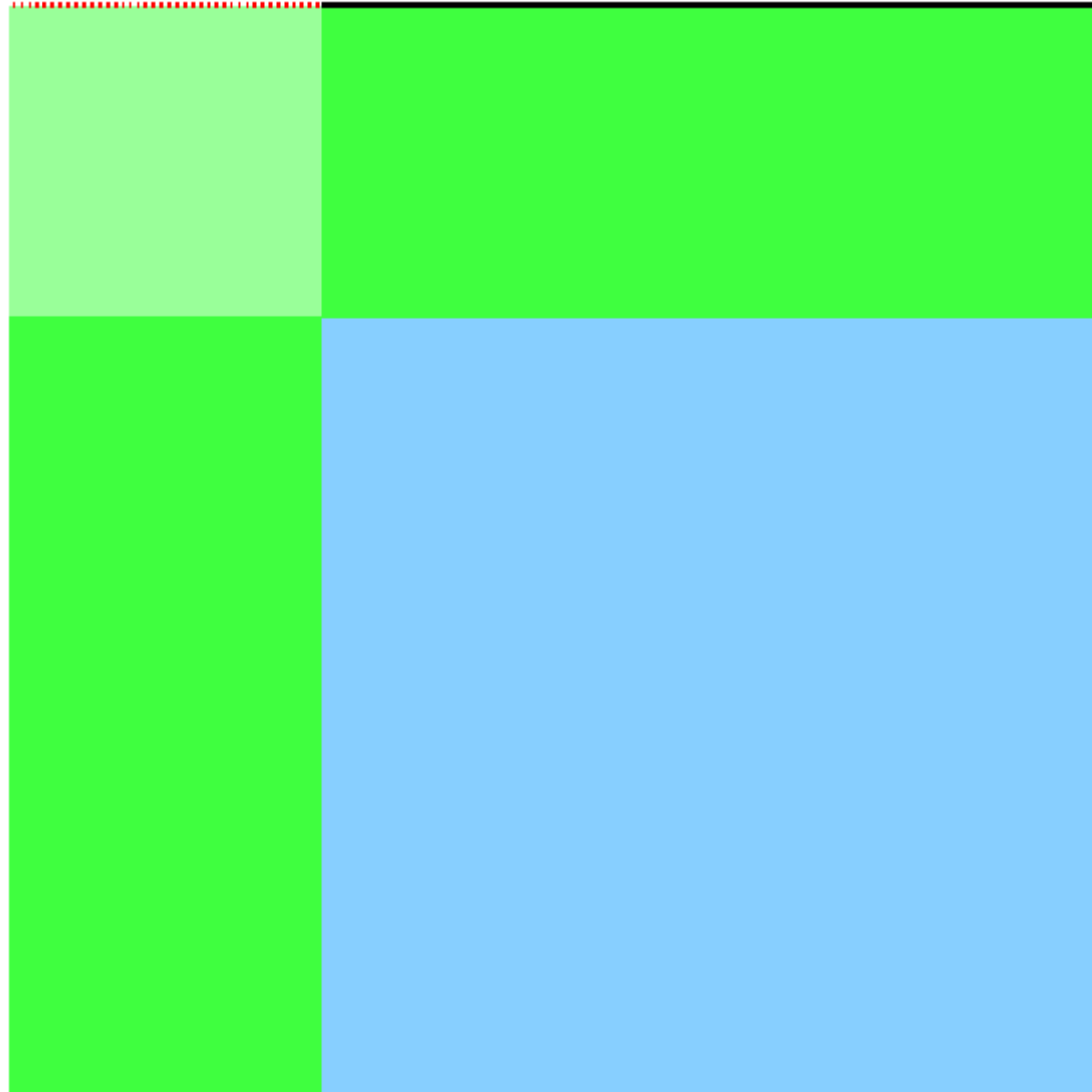
- Quando census et radices equantur numero

Censo e radici uguali a numero – costruzione geometrica 1



- Quando census et radices equantur numero

Censo e radici uguali a numero – costruzione geometrica 1



- Quando census et radices equantur numero

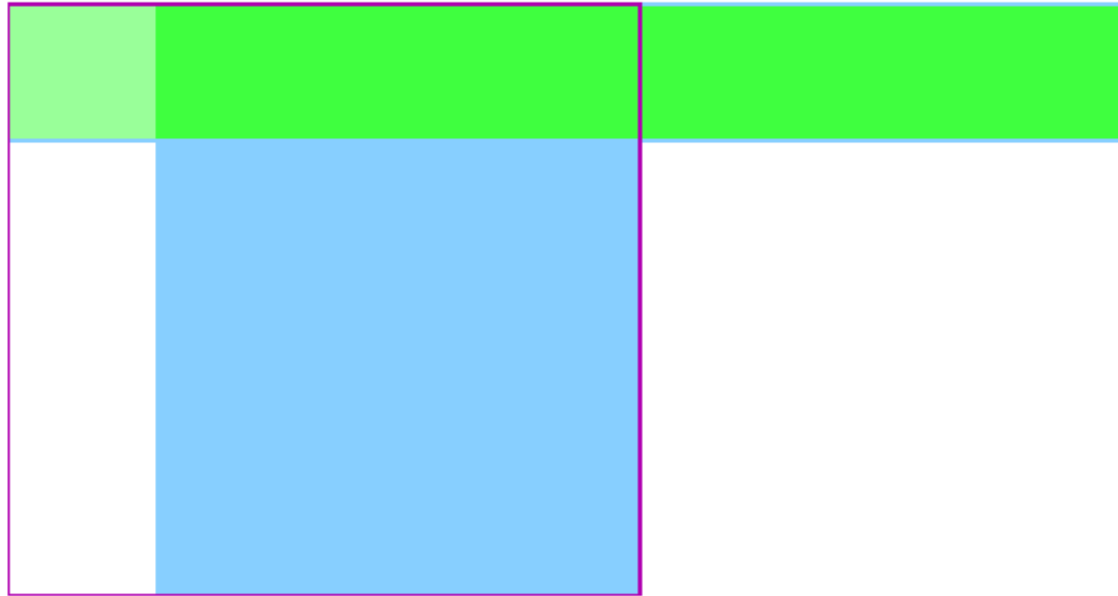
Censo e radici uguali a numero – costruzione geometrica 1

un censo e dieci radici siano uguali a 39



- **Quando census et radices equantur numero**

Censo e radici uguali a numero – costruzione geometrica 2

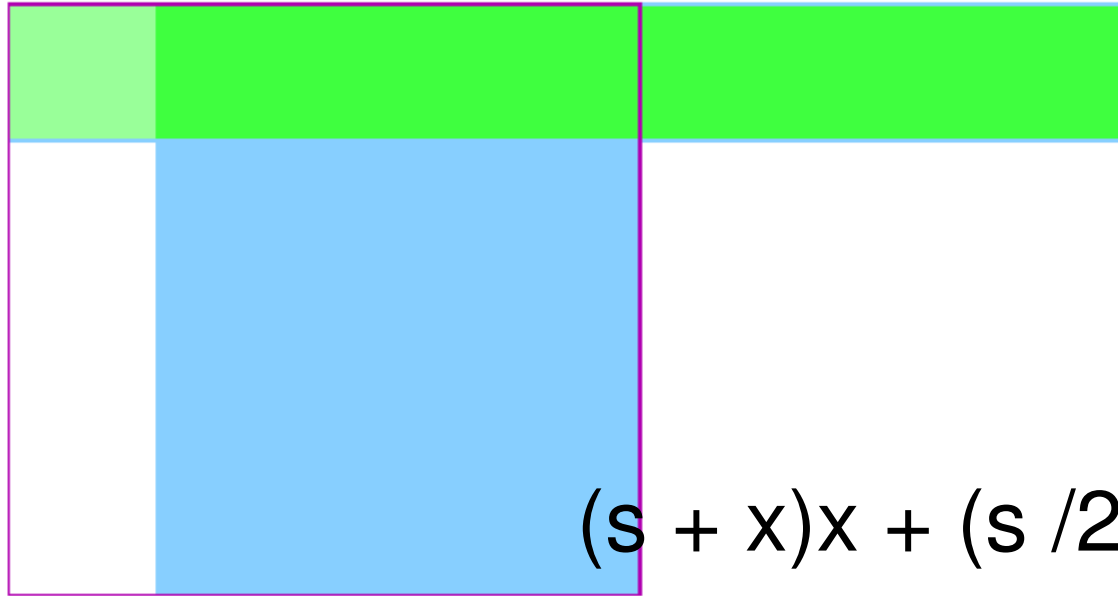


**Euclide
Elem. II, 6**

Se si divide un segmento in parti uguali e ad una parte si aggiunge un altro segmento, il rettangolo costruito con l'intero segmento più il secondo segmento e con il secondo segmento insieme con il quadrato della metà è uguale al quadrato costruito sul secondo segmento più metà del primo.

- Quando census et radices equantur numero

Censo e radici uguali a numero – costruzione geometrica 2



Elem. II, 6

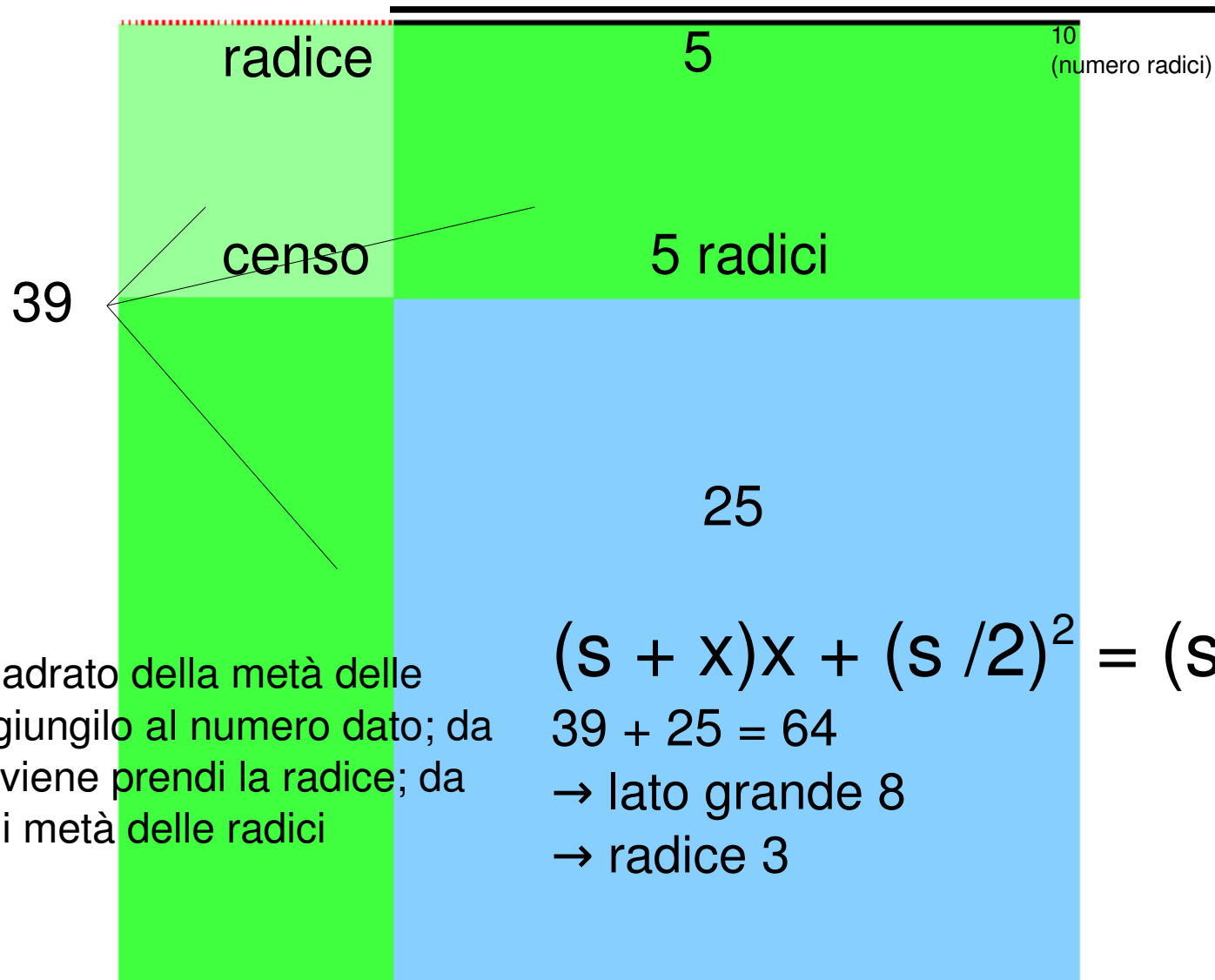
$$(s + x)x + (s / 2)^2 = (s / 2 + x)^2$$

Se si divide un segmento in parti uguali e ad una parte si aggiunge un altro segmento, il rettangolo costruito con l'intero segmento più il secondo segmento e con il secondo segmento insieme con il quadrato della metà è uguale al quadrato costruito sul secondo segmento più metà del primo.

• Quando census et radices equantur numero

Censo e radici uguali a numero – costruzione geometrica 1

un censo e 10 radici siano uguali a 39



prendi il quadrato della metà delle radici e aggiungilo al numero dato; da quello che viene prendi la radice; da questa togli metà delle radici

$$(s + x)x + (s / 2)^2 = (s / 2 + x)^2$$

$$39 + 25 = 64$$

→ lato grande 8

→ radice 3

• Quando radices et numerus equantur censui

Censo uguale a radici e numero

$$x^2 = bx + c$$

• Tunc quadratum medietatis radicum addes super numerum; et super radicem eius, quod provenerit, adde numerum medietatis radicum; et habebis radicem quesiti census.

○ Allora aggiungi il quadrato di metà radici al numero; alla sua radice aggiungi il numero di metà radici; avrai la radice del censo cercato.

$$x^2 + bx + c = 0$$

soluzioni

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$x^2 = bx + c$$

soluzione

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + \frac{b}{2}$$

• Quando radices et numerus equantur censui

Censo uguale a radici e numero

$$x^2 = bx + c$$

• Tunc quadratum medietatis radicum addes super numerum; et super radicem eius, quod provenerit, adde numerum medietatis radicum; et habebis radicem quesiti census.

• Allora aggiungi il quadrato di metà radici al numero; alla sua radice aggiungi il numero di metà radici; avrai la radice del censo cercato.

$$x^2 = 10x + 39$$

$$x^2 - 10x - 39 = 0$$

$$x = + 5 \pm \sqrt{5^2 + 39}$$

$$x = + 5 \pm \sqrt{25 + 39}$$

$$x = + 5 \pm \sqrt{64}$$

$$x = + 5 \pm 8$$

$$x = - 3 \quad \text{o} \quad x = +13$$

Esempio: un censo sia uguale a dieci radici e 39 denari. Aggiungi dunque il quadrato di metà radici, cioè 25, a 39; farà 64; alla cui radice, che è 8, aggiungi 5, cioè metà radici; verrà 13 che dà la radice del censo richiesto. Quindi il censo è 169.

• Quando census et numerus equantur radicibus

Censo e numero uguale a radici

$$x^2 + c = bx$$

- Et cum occurrerit quod census et numerus equentur radicibus scias hoc fieri non posse nisi numerus fiat equalis vel minor quadrato medietatis radicum: qui si equalis fuerit habebitur pro radice census numerus medietatis radicum; et si numerus qui cum censu equatur radicibus fuerit minus quadrato medietatis radicum, extrahe ipsum numerum ex ipso quadrato et eius quod remanserit radicem extrahe ex numero medietatis radicum; et si quod remanserit non erit radix quesiti census tunc addes id quod extraxisti super numerum de quo extraxisti et habebis radicem quesiti census.

• Quando census et numerus equantur radicibus

Censo e numero uguale a radici

$$x^2 + c = bx$$

E se capitasse che censo e numero siano uguali a radici sappi che questo non può essere a meno che il numero sia minore o uguale al quadrato di metà radici.

Se fosse uguale si avrebbe per radice del censo il numero di metà radici.

E se il numero che con il censo è uguale a radici fosse meno del quadrato di metà radici, sottrailo da quel quadrato e sottrai la radice di ciò che resta dal numero di metà radici.

$$x^2 + bx + c = 0$$

soluzioni

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}}{2}$$

$$x^2 + c = bx$$

soluzione

$$x = \frac{b - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}}{2}$$

$$x = \frac{b + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}}{2}$$

• Quando census et numerus equantur radicibus

Censo e numero uguale a radici

$$x^2 + c = bx$$

Esempio: un censo e 40 uguale a 14 radici.

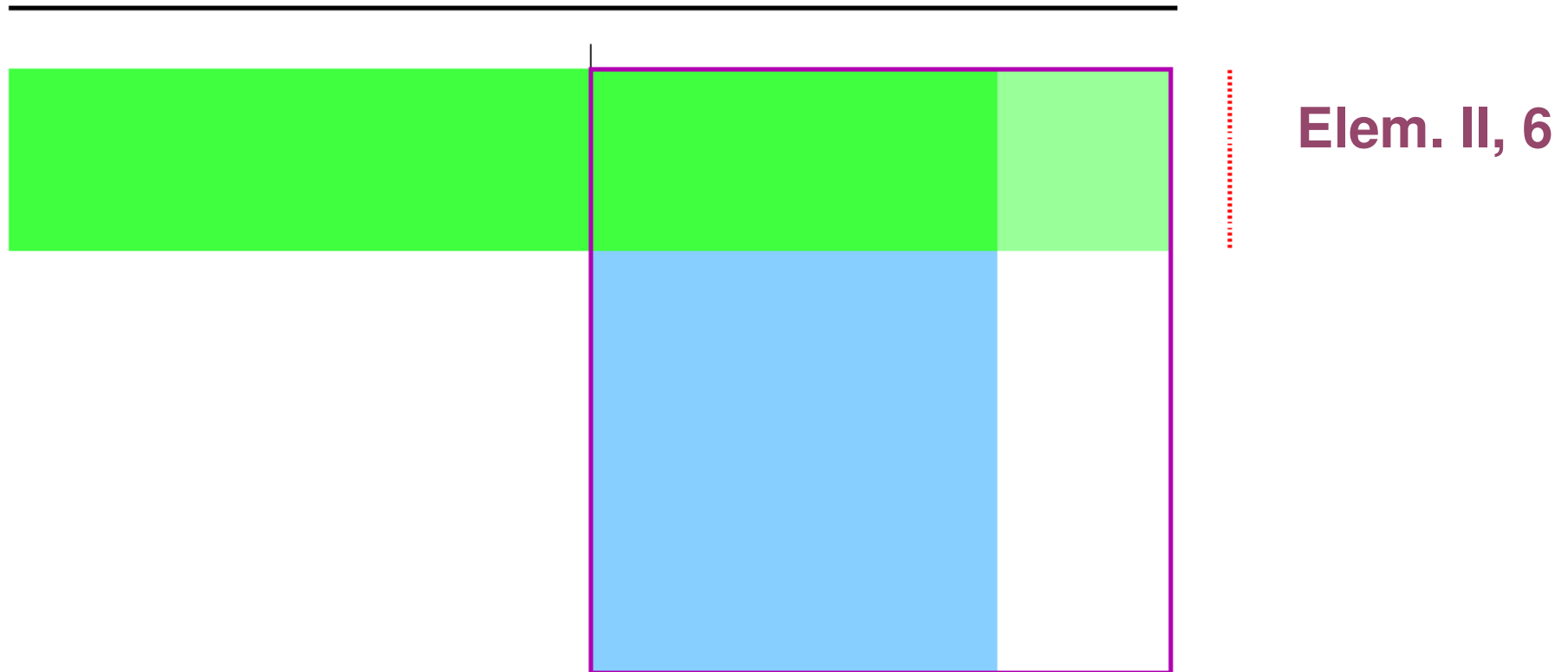
Dimezzando le radici si ha 7, dal loro quadrato, cioè 49, toglì 40, rimane 9; sottrai la sua radice, cioè 3, da metà delle radici, cioè 7; rimarrà 4 come radice del censo cercato e il censo è 16; questo sommato con 40 fa 56 che sono 14 radici dello stesso censo, poiché moltiplicando la radice di 16 per 14 viene 56.

Oppure somma la radice di 9 con 7, verrà 10 come radice del censo cercato; e così il censo sarà 100 che sommato a 40 fa 140 che sono 14 radici di 100 poiché dal prodotto della radice di 100 per 14 viene 140. E così se non si resolvesse la questione con la sottrazione, si risolverà senza dubbio con l'addizione.

• Quando census et numerus equantur radicibus

$$x^2 + c = bx$$

Censo e numero uguale a radici -costruzione geometrica

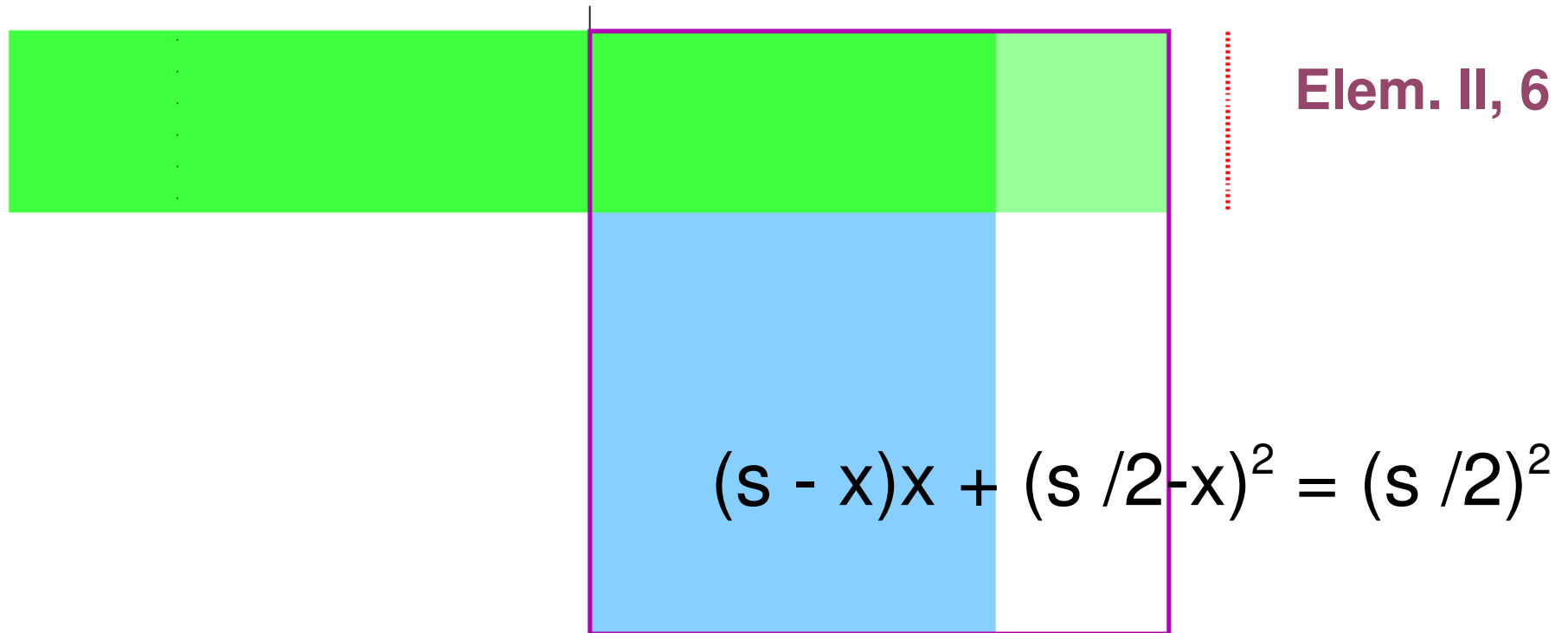


Se si divide un segmento in parti uguali e in parti disuguali, il rettangolo delle parti disuguali, più il quadrato della differenza tra la parte maggiore e la metà della linea, è uguale al quadrato della metà.

• Quando census et numerus equantur radicibus

$$x^2 + c = bx$$

Censo e numero uguale a radici -costruzione geometrica



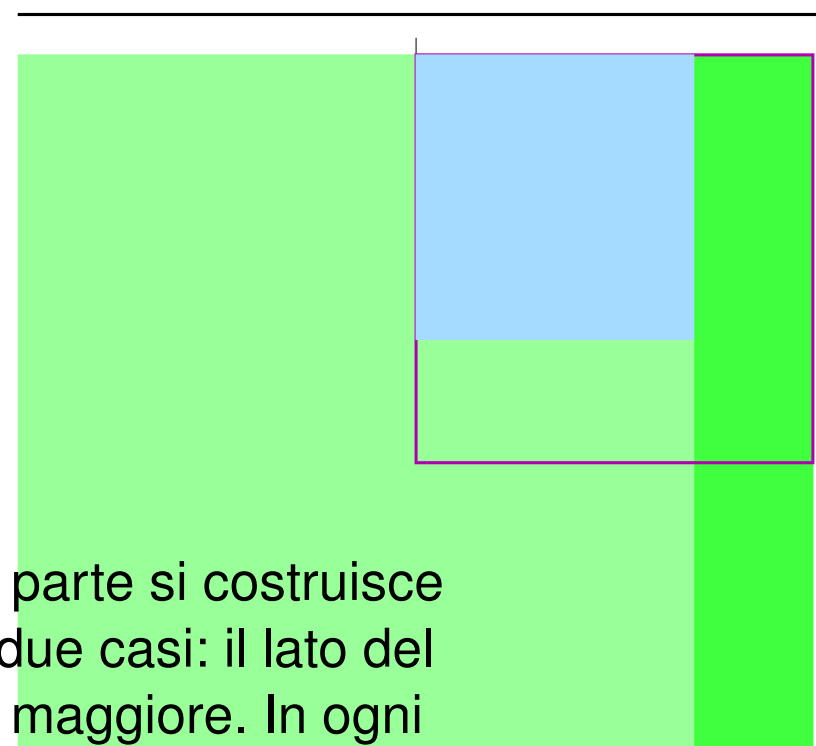
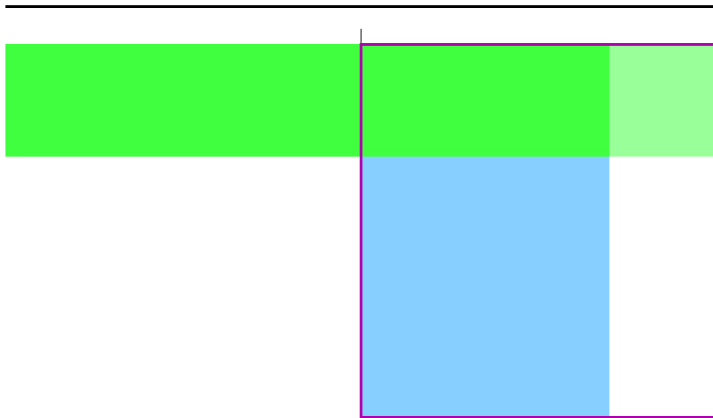
Se si divide un segmento in parti uguali e in parti disuguali, il rettangolo delle parti disuguali, più il quadrato della differenza tra la parte maggiore e la metà della linea, è uguale al quadrato della metà.

• Quando census et numerus equantur radicibus

$$x^2 + c = bx$$

Censo e numero uguale a radici -costruzione geometrica

un censo e 40 uguale a 14 radici



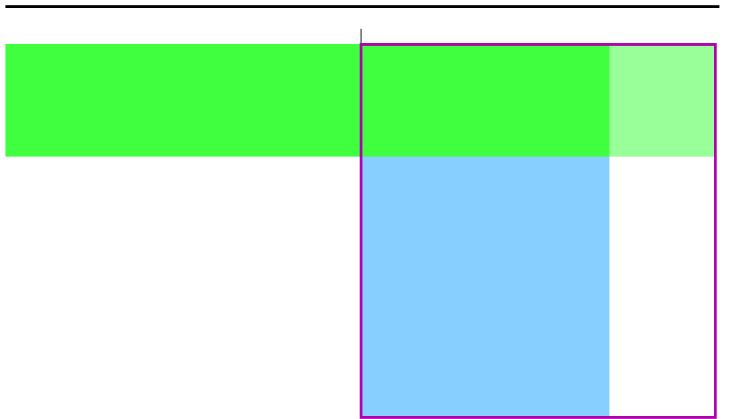
Si traccia un segmento lungo 14 e su una parte si costruisce il censo (quadrato verde chiaro). Ci sono due casi: il lato del censo è minore della metà di 14 oppure è maggiore. In ogni caso si completa il rettangolo che ha come lati 14 e il lato del censo (parte in verde scuro e verde chiara). Questo rettangolo sarà pari a 14 radici. Poiché il quadrato verde chiaro è il censo, la parte rimanente (verde scuro) sarà 40. Questa sommata al quadrato azzurro è, per la prop. V del libro II, uguale al quadrato con il bordo viola, cioè 49. Dunque il quadrato azzurro è 9 e il suo lato è 3.

• Quando census et numerus equantur radicibus

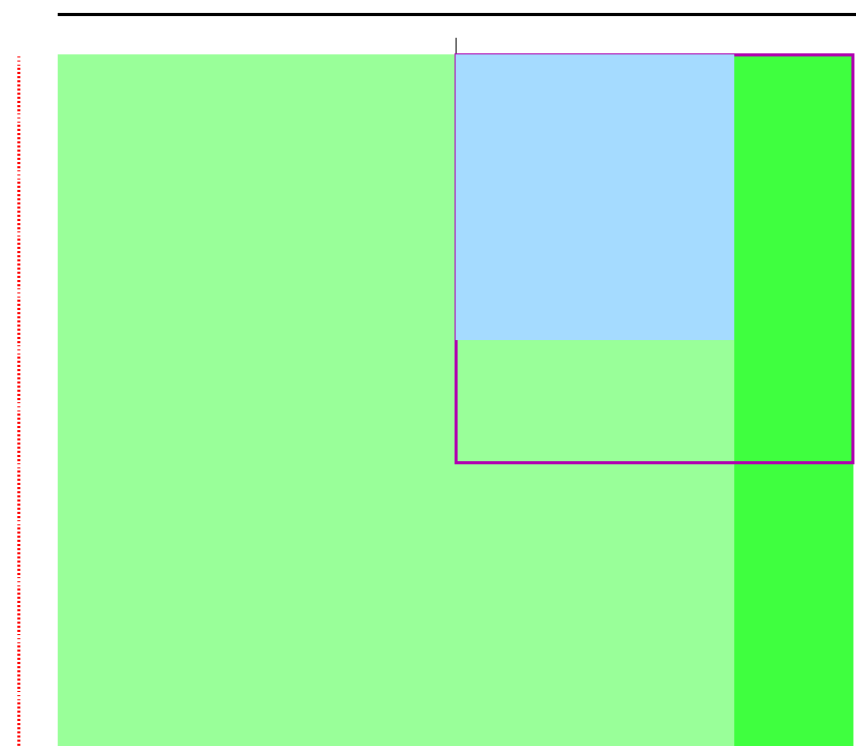
$$x^2 + c = bx$$

Censo e numero uguale a radici -costruzione geometrica

un censo e 40 uguale a 14 radici



Primo caso:
Per ottenere il lato del
censo da 7 tolgo 3.



Secondo caso:
Per ottenere il lato del
censo a 7 aggiungo 3.

• **Expliciunt introductiones algebre et almuchabale**

Incipiunt questiones eiusdem

- Divisi in duas partes 12 et multiplicavi unam earum per 27; et quod provenit fuit equale quadrato alterius partis.

- Ho diviso in due parti 12 e ho moltiplicato una delle due parti per 27; quel che è venuto era uguale al quadrato dell'altra parte.

Passo 1: equazione

Fa' così: prendi la cosa come una delle due parti; rimarranno 12 meno la cosa per l'altra; moltiplicati questi per 27 viene 324 meno 27 cose; moltiplica la cosa per la cosa, cioè la prima parte per se stessa; viene il censo che è uguale a 324 denari meno 27 cose.

• **Expliciunt introductiones algebre et almuchabale**

Incipiunt questiones eiusdem

- Divisi in duas partes 12 et multiplicavi unam earum per 27; et quod provenit fuit equale quadrato alterius partis.

- Ho diviso in due parti 12 e ho moltiplicato una delle due parti per 27; quel che è venuto era uguale al quadrato dell'altra parte.

Passo 1: equazione

Fa' così: prendi la cosa come una delle due parti; rimarranno 12 meno la cosa per l'altra; moltiplicati questi per 27 viene 324 meno 27 cose; moltiplica la cosa per la cosa, cioè la prima parte per se stessa; viene il censo che è uguale a 324 denari meno 27 cose.

x
12-x
27(12-x)
324-27x
x²
x²=324-27x

• **Expliciunt introductiones algebre et almuchabale**

Incipiunt questiones eiusdem

- Divisi in duas partes 12 et multiplicavi unam earum per 27; et quod provenit fuit equale quadrato alterius partis.

- Ho diviso in due parti 12 e ho moltiplicato una delle due parti per 27; quel che è venuto era uguale al quadrato dell'altra parte.

censo uguale a 324 meno 27 cose.

Passo 2: restauratio (algebra)

$$x^2=324-27x$$

$$x^2+27x=324$$

Aggiungendo queste (27) cose da entrambe le parti viene che il censo e 27 cose sono uguali a 324 denari; e così questa questione si è ridotta a una delle tre regole composte, a quella cioè in cui censo e radici sono uguali a numero.

• **Expliciunt introductiones algebre et almuchabale**

Incipiunt questiones eiusdem

- Divisi in duas partes 12 et multiplicavi unam earum per 27; et quod provenit fuit equale quadrato alterius partis.

- Ho diviso in due parti 12 e ho moltiplicato una delle due parti per 27; quel che è venuto era uguale al quadrato dell'altra parte.

censo e 27 cose uguali a
324

Passo 3: regola

$$x^2+27x=324$$

Dunque per procedere secondo quella regola moltiplica $13 + \frac{1}{2}$, cioè metà radici, in sé, saranno $182 + \frac{1}{4}$; sommale con 324, saranno $506 + \frac{1}{4}$, la cui radice trovata così fanne quarti, saranno 2025, e a questo numero trova la radice, sarà 45; dividila per la radice di 4, che sta sotto il segno di frazione, cioè per 2, verrà $22 + \frac{1}{2}$, di questo estrai la metà delle radici, rimarrà 9 per la radice del censo che è una parte; a questa arrivare a 12 manca 3, che è la seconda parte.

