FIRENZE 2009
WORKSHOP on
CALCULUS of VARIATIONS and PDEs

Lista abstracts

- **Lucio Boccardo** (Università 'La Sapienza' Roma), *"Altri sviluppi di quel che Guido Stampacchia ha insegnato a Paolo e a me: una teoria tipo Calderon-Zygmund per 'minimi' di energia infinita di alcuni funzionali integrali"*.

  `Abstract:` Per problemi di Dirichlet lineari in Ω, aperto limitato di $\mathbf{R}^N$, $N > 2$, con termini noti funzioni misurabili $f(x)$

  $$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)Du) = f(x) \\ u = 0 \end{cases}$$

  Guido Stampacchia ha provato proprietà di sommabilità delle soluzioni di energia finita ($f \in L^m(\Omega)$, $2N/(N+2) < m < N/2$). Tali risultati sono stati estesi al caso non lineare, verso la fine del secolo scorso, da Giachetti-Boccardo. Gli stessi autori hanno studiato (e presentato a Cortona-2007 [1], come regalo matematico a Paolo per i suoi 60 anni) la sommabilità dei minimi (di energia finita) di alcune classi di funzionali integrali del tipo

  $$\int_\Omega j(x, v, Dv) - \int_\Omega fv, \ v \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{1}$$

  Se la sommabilità del dato è modesta: $f \in L^m(\Omega)$, $1 \leq m < 2N/(N+2)$, l'esistenza di soluzioni distribuzionali per problemi di Dirichlet lineari o non lineari è dovuta a Gallouet-Boccardo (teoria di Calderon-Zygmund per soluzioni di energia infinita).

  In questo contesto è doveroso segnalare i risultati ottenuti da R. Mingione.

  Sempre se $f \in L^m(\Omega)$, $1 \leq m < 2N/(N+2)$, il problema della "minimizzazione" di funzionali del tipo (1) può essere studiato grazie a una opportuna definizione di minimo (T–minimi), introdotta in un lavoro dedicato a Ennio De Giorgi. Una definizione parallela (Minimi deboli) è stata introdotta da Iwaniec-Sbordone (vedere anche un lavoro di L. Orsina).

[1] Alcuni sviluppi di quel che Guido Stampacchia ha insegnato a Paolo e a me.

Verranno esposti i risultati presentati in novembre in una Conferenza dell'Accademia dei Lincei, dedicata al ricordo di Guido Stampacchia nel trentennale della scomparsa.

Teorema 0.1 (Calderon-Zygmund per funzionali 1) *Se $f \in L^m(\Omega)$, $1 < m < 2N/(N+2)$, allora esiste una costante strettamente positiva $C_m(f)$ tale che per il T–minimo u di*

$$\int_\Omega j(x, Dv) - \int_\Omega f v$$

si hanno le stime

$$\|u\|_{L^{m^{**}}(\Omega)} \leq C_m(f)$$
$$\|\nabla u\|_{L^{m^*}(\Omega)} \leq C_m(f)$$

Teorema 0.2 (Calderon-Zygmund per funzionali 1) *Se ci sarà tempo, verrà discusso il caso di temini noti in spazi di Marcinkiewicz (da Stampacchia ad oggi).*

- **Menita Carozza** (Università degli Studi del Sannio), *"Vector valued minimizers of anisotropic functionals: fractional differentiability and estimate for the singular set"*.

  `Abstract:` Let us consider the variational integral

  $$\int_\Omega f(x, Dv(x))dx \tag{2}$$

  where Ω is a bounded open subset of $\mathbf{R}^n$ and $v : \Omega \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^N$; moreover $f : \Omega \times \mathbf{R}^{N\times n} \to [0, +\infty)$ and $x \to f(x, \xi)$ is measurable, $\xi \to f(x, \xi)$ is continuous. We assume anisotropic growth: each component $D_i v = \frac{\partial v}{\partial x_i}$ of the gradient $Dv = (D_1 v, D_2 v, ..., D_n v)$ has its own exponent $p_i > 1$ in such a way that, for some constants $c_1, c_3 \in (0, +\infty)$ and $c_2, c_4 \in [0, +\infty)$, it results that

  $$c_1 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p_i} - c_2 \leq f(x, \xi) \leq c_3 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p_i} + c_4 \tag{3}$$

  for every $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbf{R}^{N\times n}$ and for almost every $x \in \Omega$, where $\xi_1, ..., \xi_n$ are the columns of the $N \times n$ matrix ξ.

  In the vectorial setting we consider the regular set Ω_u, u minimizer of the functional, as the collection of points x_0 for which Du is Hölder continuous in a neighbourhood of x_0. We prove "fractional" higher differentiability for Du and this allows us to give an estimate for the Hausdorff dimension of the singular set S_u.

- **Arrigo Cellina** (Università di Milano-Bicocca), *"A special case of constructing a barrier"*.

- **Bernard Dacorogna** (EPFL Lausanne), *" Two generalizations of Darboux theorem"* (joint work with S. Bandyopadhyay)

  `Abstract:` Let $\Omega \subset \mathbf{R}^{2m}$ be an open set and $p \in \Omega$. Let ω_0 be the standard symplectic form
  $$\omega_0 = \sum_{i=1}^{m} dx^i \wedge dx^{m+i}$$
  and ω be a closed two form such that
  $$\omega(p) = \omega_0 \text{ and } d\omega = 0.$$
  We discuss the existence and regularity of a diffeomorphism $\varphi : \mathbf{R}^{2m} \to \mathbf{R}^{2m}$ satisfying
  $$\varphi^*(\omega_0) = \omega \text{ and } \varphi(p) = p.$$
  We also consider Dirichlet type problems.

- **Guido De Philippis** (Università di Firenze), *"Una dimostrazione della minimalit del cono di Simons"*.

  `Abstract:` Nel 1969 Bombieri, De Giorgi, Giusti dimostrando la minimalità del cono di Simons hanno costruito il primo esempio di superficie minima singolare. Tra le varie dimostrazioni di questo risultato quella presentata si basa sul metodo delle sotto-calibrazioni, una semplificazione del metodo di calibrazione, e sul concetto di sub-minimo.

- **Agnese Di Castro** (Università 'La Sapienza' Roma), *"Elliptic problems for some anisotropic operators"*.

  `Abstract:` I present some existence and regularity results for nonlinear elliptic problems in a bounded domain of $\mathbf{R}^N$, with Dirichlet boundary conditions, associated to a class of anisotropic operators, whose model is
  $$-\sum_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \right].$$
  In particular I talk about existence, nonexistence and multiplicity result for positive solutions to a semilinear problem, similar in some sense to an eigenvalue problem, for the above operator.

- **Alessandro Ferriero** (Universidad Autónoma de Madrid), *"Perimetro minimo e convessità per insiemi del piano"*.

- **Flavia Giannetti** (Università di Napoli 'Federico II'), *"Regularity results for Jacobian determinants"*.

  `Abstract:` Presentiamo alcuni risultati di regolarità dei determinanti Jacobiani di mappe a distorsione finita. In particolare diamo una generalizzazione nell'ambito degli spazi di Orlicz della cosiddetta "self improving property".

- **Nguyen Tien Khai** (Università di Padova), *"Quantitative Isoperimetric and Sobolev inequalities for a class of nonconvex sets and functions"*.

  `Abstract:` Quantitative versions (i.e, taking into account a suitable deviation of a set from being a sphere) of the isoperimetric inequality are obtained for a class of not necessarily convex sets called phi-convex sets. As an application, a quantitative version of the Sobolev inequality for a class of BV functions is given. Our work is based on geometrical results on phi-convex sets, obtained using methods of both nonsmooth analysis and geometric measure theory.

- **Chiara Leone** (Università di Napoli 'Federico II'), *"Partial regularity for polyconvex functionals depending on the Hessian determinant"*.

  `Abstract:` Westudy a $C^{2,\alpha}$ partial regularity result for local minimizers of variational integrals of the type

  $$I(u) = \int_{\Omega} f(D^2u(x))dx,$$

  when f is a polyconvex energy function.

- **Paolo Maria Mariano** (Università di Firenze), *"Ground states of quasicrystals with magnetic order"*.

  `Abstract:` Quasicrystals are alloys characterized by quasi-periodic distribution of atoms. Their structure is made of prevailing atomic clusters having incompatible symmetry with the periodic tiling of the ambient space and of sparse additional atomic structures. The latter structures, the so-called *worms*, are generated by local rearrangements of the atomic clusters. They assure the complete tiling of the ambient space, generating in this way the characteristic quasi-periodicity. The natural point of view in describing the mechanical behavior of quasicrystals is based on the general model-building framework of the mechanics of complex bodies. Creation and annihilation of worms constitute the scenario of substructural events which alter locally the crystalline phase and are called here the *phason activity.* The degrees of freedom exploited within the material elements by the atoms for reorganizing themselves are collected at every point in a vector ν_w. Moreover, in some cases, quasicrystals admit magnetic order. Heisenberg spins ν_s describe locally the magnetization. Three fields over a fit region $\mathcal{B}$ in $\mathbf{R}^3$ represent then the changes of global and local morphology of the a quasicrystal with magnetic order in time: the transplacement field $x \to u(x) \in \mathbf{R}^3$, the morphological descriptor field of the phason activity $x \to \nu_w \in \tilde{\mathbf{R}}^3$ and the field of Heisenberg spins $x \to \nu_s \in \mathbf{S}^2$. An appropriate energy for quasicrystals with magnetic order has the following expression:

  $$\mathcal{E}(u, \nu_w, \nu_s) = \int_{\mathcal{B}} e(x, u, Du, D\nu_w, D\nu_s)dx + \frac{1}{2}c \int_{\mathcal{B}} |D\nu_s|^2 dx + 4\pi\mathbf{M}(L_T),$$

  where $4\pi\mathbf{M}(L_T)$ is a term of pure configurational nature: the energy of a possible line defect, actually a disclination, associated with the natural decomposition of

the Cartesian currents of $\mathbf{S}^2$-valued maps. Essentially, $\mathbf{M}(L_T)$ is the mass of the integer rectifiable current $L_T \in \mathcal{D}^1(\mathcal{B})$ such that for $T \in cart^{2,1}(\mathcal{B} \times \mathbf{S}^2)$ the decomposition $T = G_{\nu_s} + L_T \times \mathbf{S}^2$, where G_{ν_s} is the current inegration over the graph of the spin field $\nu_s \in W^{1,2}(\mathcal{B}, \mathbf{S}^2)$, is uniquely defined.

Here I discuss the conditions in which this energy admits minimizers in

$$dif^{r,1}(\mathcal{B}, \mathbf{R}^3) \times W^{1,2}(\mathcal{B}, \tilde{\mathbf{R}}^3) \times cart^{2,1}(\mathcal{B} \times \mathbf{S}^2),$$

with $r, s > 1$, under Dirichlet boundary conditions. I analyze also the nature of balance equations arising from the first variation.

- **Marco Mazzola** (Università di Milano-Bicocca), *"Necessary conditions for solutions to variational problems"*.

  `Abstract:` We prove necessary conditions for a solution u to the problem of minimizing
  $$\int_\Omega \left[f\left(\|\nabla v\left(x\right)\|\right) + g\left(x, v\left(x\right)\right)\right] dx$$
  in the form of a Pontryagin Maximum Principle, for f convex and satisfying a growth assumption, but without assuming differentiability.

- **Giuseppe Rosario Mingione** (Università di Parma), *"Aspetti non-lineari della teoria di Calderon-Zygmund"*.

  `Abstract:` Stime integrali e formule di rappresentazione sono aspetti classici della teoria di Calderon-Zygmund per problemi lineari. Vorrei presentare qualche analogo per problemi non-lineari.

- **Luisa Moschini** (Università 'La Sapienza' Roma), *"Improving L^2 estimates to Harnack inequalities"*.

  `Abstract:` We consider operators of the form $E = L + V$, where L is an elliptic operator and V is a singular potential, defined on a smooth bounded domain $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ with Dirichlet boundary conditions. We allow the boundary of Ω to be made of various pieces of different codimension. We assume that E has a generalized first eigenfunction of which we know two sided estimates. Under these assumptions we prove optimal Sobolev inequalities for the operator E, we show that it generates an intrinsic ultracontractive semigroup and finally we derive a parabolic Harnack inequality up to the boundary as well as sharp heat kernel estimates.

- **Carlo Sbordone** (Università di Napoli 'Federico II'), *"Omeomorfismi di Sobolev e sistemi di equazioni a derivate parziali di tipo ellittico"* .

  `Abstract:` La stretta connessione tra sistemi di equazioni a derivate parziali di tipo ellittico e la teoria delle Funzioni è classica

  Recentemente, facendo seguito ad una serie di lavori sulle mappe a distorsione finita (tra cui uno importante di Hencl-Koskela), è stata introdotta in un lavoro di Hencl-Moscariello Passarelli- Sbordone una classe di omeomorfismi di Sobolev tra aperti di $\mathbf{R}^n$, svincolata a priori dalla nozione di distorsione che gode di notevoli proprietà. Una proprietà interessante è la seguente: il requisito minimo affinché una coppia di funzioni reali di due variabili $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ costituisca la soluzione locale debole di un sistema lineare ellittico (degenere) non banale è che la mappa $f = (u, v)$ sia bisobolev, cioè sia un omeomorfismo di classe $W^{1,1}$ con la sua inversa. Le mappe bisobolev hanno notevoli proprietà anche se non godono della N-property di Lusin, (che è quella che assicura che l'immagine di insiemi di misura nulla ha misura nulla) e per esse non sussiste la formula dell'area, (che vale solo con un minore o uguale). Ad esempio, una proprietà notevole ed inattesa è che, pur potendo accadere che lo Jacobiano di f sia nullo su un insieme di misura positiva, su tale insieme deve annullarsi anche la matrice Jacobiana. Ciò consente di associare a f un operatore ellittico degenere detto di Beltrami . In casi speciali in cui f è $W^{1,2}$ con l'inversa, è stato provato da Spagnolo che l'operatore di Beltrami dipende con continuità da f nel senso della G-convergenza. Un primo lavoro che tratta il caso n-dimensionale ed in cui si considerano anche successioni di mappe è Fusco-Moscariello-Sbordone, Calc. Var. (2008).

- **Anna Verde** (Università di Napoli 'Federico II'), *"Everywhere regularity of functionals with ϕ-growth"*.

  `Abstract:` We prove $C^{1,\alpha}$-regularity for local minimizers of functionals with ϕ-growth, giving also the decay estimate. In particular we present a unified approach in the case of power type functions. As an application of the excess decay estimate, we prove: Lipschitz continuity for local minimizers of asymptotically convex problems; Calderon-Zygmund estimates for ϕ-harmonic systems.