Benvenuti a “Oltre il compasso. La geometria delle curve”, una mostra che ha avuto numerosi allestimenti nelle maggiori città italiane, con oltre 350 mila visitatori. Nel corso della visita, faremo conoscenza con un certo numero di curve –dalle più semplici, la retta e la circonferenza, alle più complesse e sorprendenti– e ne scopriremo le più importanti proprietà matematiche, in particolare quelle che ne regolano le applicazioni alla scienza, alla tecnica, e talvolta alla pratica della vita di tutti i giorni.

Prima di cominciare, rilassatevi: non dovrete imparare nessuna formula né risolvere nessun esercizio. Scopriremo insieme come sia possibile avvicinarsi alle idee e ai metodi della matematica in maniera indolore e, speriamo, divertente.

1. Rette e cerchi.

Cosa si può fare con un pezzo di spago?

La visita comincia da una matita e un semplice pezzo di filo, con i quali siete invitati a disegnare una retta e una circonferenza.

Camminando per strada, a volte si possono vedere degli operai che per scavare un canale ne tracciano prima i contorni tirando uno spago tra due picchetti. Anche noi possiamo tirare una retta (notate il verbo tirare) tirando il filo con due dita e cercando di seguirlo con la matita. Se invece vogliamo disegnare un cerchio, arrotoleremo il filo attorno alla matita, e lo faremo girare fissandone l’altra estremità al tavolo con un dito.

Il risultato nei due casi è molto diverso: mentre in genere gli archi di cerchio che riusciamo a disegnare (archi di cerchio; per disegnare tutto il cerchio ci vuole qualche accorgimento in più) vengono abbastanza bene, i segmenti di retta sono in genere una delusione.

Disegnare una retta e un cerchio con un filo e una matita

La ragione di questo comportamento così differente sta nella diversa funzione del filo: nel caso del cerchio è uno strumento, per la retta è un profilo. Con un profilo si disegna quello che c’è già: possiamo disegnare una retta perché il filo tirato dalle dita si dispone lungo una linea retta. La bontà del risultato dipende in questo caso dalla precisione del profilo e dalla possibilità di seguirlo con la matita, ed è proprio quest’ultima operazione che è difficile nel nostro caso.

Al contrario, nel tracciare un cerchio il filo non prende una forma circolare da seguire con la matita, ma sfruttiamo una proprietà matematica della circonferenza, quella cioè di avere tutti i punti alla stessa distanza dal centro. Il filo teso tra la matita e l’estremità fissata alla tavola garantisce appunto questa equidistanza.

Lo stesso avviene se invece di usare un filo ci serviamo di oggetti più adeguati, come la riga e il compasso. La precisione migliora notevolmente, sia per l'una che per l'altro, ma la sostanza è sempre la stessa: la riga è un profilo, il compasso uno strumento. E anche se le rette disegnate con la riga sono molto migliori di quelle fatte con lo spago (ma anche i cerchi sono più rotondi), la precisione di uno strumento sarà sempre, a parità di complessità, migliore di quella di un profilo.

Come disegnare una retta, e perché.

Ma a che serve disegnare una retta? Non conviene fare i disegni con un computer, senza utilizzare né righe né compassi? La domanda è pertinente, e tracciare rette sarebbe ormai inutile se si trattasse solo di disegni. Ma non è solo questo il problema.

Guardiamo una qualsiasi macchina, una bicicletta per esempio, o un frullatore. In essa, ci sono dei pezzi mobili, come il pedale o le ruote della bicicletta, o le alette del frullatore, che devono percorrere delle traiettorie prestabilite, ad esempio girare attorno a un punto. In questo caso non ci sono difficoltà: basta imperniare il pezzo sul centro della rotazione, in modo che non possa far altro che ruotarvi attorno. Ogni punto del pezzo descrive così una circonferenza, intorno a un perno che si comporta come il dito che fissava lo spago al tavolo.

Se invece la traiettoria della parte mobile non è circolare, le cose diventano più difficili. Cosa possiamo fare perché il pezzo si muova in linea retta, come ad esempio nel caso dell'asta che vediamo uscire dal tavolo, o l'asse del pistone nella foto appesa al muro? Potremmo certo fissare una riga, e costringere l'asta a strisciarvi addosso, o meglio a passare attraverso due anelli fissati al muro (e in questo caso sarebbe la stessa asta a fungere da profilo), ma il movimento genererebbe tanto attrito da rendere impossibile il funzionamento.

In questa situazione, forse più ancora che nel disegno, la differenza tra uno strumento e un profilo è capitale: se vogliamo che il meccanismo funzioni, non possiamo ricorrere a profili, che hanno sempre parti striscianti, ma dobbiamo generare il moto rettilineo con uno strumento.

Quello che si vede è stato proposto da James Watt. È un semplicissimo quadrilatero articolato, fatto in modo che il punto di mezzo del lato più piccolo, e dunque l'asta che vi è fissata, si muova su e giù lungo una traiettoria rettilinea.

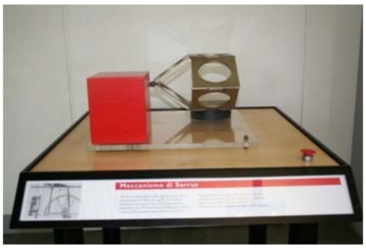
Il meccanismo di Watt

Una versione da tavolo mostra che la retta è solo approssimata

Ma è proprio una retta? Una versione da tavolo dello stesso meccanismo mostra il contrario: il punto di mezzo descrive una curva a forma di otto, con due parti "quasi" rettilinee, o almeno tanto diritte quanto basta per le applicazioni. Il meccanismo di

Watt sfrutta queste parti della curva per mantenere l'asta sempre in posizione verticale.

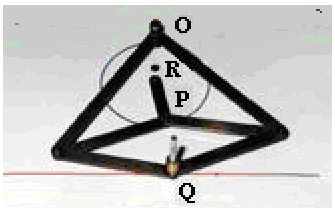
Altri strumenti per tracciare rette.



Il meccanismo di Watt, che per la sua estrema semplicità è usato ancora oggi, risolve in pratica il problema di tracciare una retta, o quanto meno una curva così vicina a una retta da essere praticamente indistinguibile nelle applicazioni. Dopo Watt, sono stati trovati altri strumenti, per la verità più complicati, che tracciano delle rette approssimate, alcuni dei quali si possono vedere e manovrare. Uno di questi, inventato dal famoso matematico russo Pafnuty Čebičev, differisce da quello di Watt solo per le differenti lunghezze delle aste, e può essere applicato a una sega per mantenere il taglio sempre rettilineo.

Resta però aperto il problema teorico: è possibile costruire uno strumento che disegni una retta vera, e non solo approssimata? Una prima risposta positiva è data dal meccanismo di Sarrus, nel quale i punti della lastra superiore si muovono tutti lungo rette verticali. Si tratta però di una macchina che non è né pratica (il meccanismo di Watt è molto più semplice e affidabile) né soddisfacente dal punto di vista teorico, dato che opera nello spazio tridimensionale e non sul piano. Da un punto di vista tecnico, questo significa che occupa molto spazio.

La soluzione esatta del problema è costituita da un meccanismo inventato nel 1864 da A. Peaucellier, e basato sulle proprietà di una particolare trasformazione matematica: l'inversione rispetto a una circonferenza. Il meccanismo è costituito da una serie di aste incernierate in modo tale che, comunque le si sposti, il prodotto delle distanze dei punti P e Q da O sia sempre lo stesso. Usando un linguaggio più tecnico, i punti P e Q si corrispondono mediante l'inversione rispetto a un cerchio di centro O.



Una delle proprietà dell'inversione è che quando il punto P descrive una circonferenza, il suo corrispondente Q descrive anch'esso una circonferenza.

Fa eccezione un solo caso, che è quello che fa per noi: quando la circonferenza descritta da P passa per il centro O, il punto Q corrispondente non descrive più una circonferenza, ma una retta. Si capisce allora il ruolo dell'asta PR, con l'estremo R fissato al tavolo. Essa non ha niente a che fare con l'inversione, ma assicura

Il meccanismo di Čebičev

Due meccanismi di Čebičev regolano la sega

Il meccanismo di Sarrus

Il meccanismo di Peaucellier

che il punto P, che ora può solo ruotare attorno a R, descriva una circonferenza. Prendendo PR uguale a RO, questa circonferenza passerà per il centro O, e dunque il punto Q corrispondente descriverà una retta, o più precisamente un segmento.

Quadrilateri articolati.

Fra i molti meccanismi di aste articolate che risolvono problemi di interesse pratico, il più semplice è il quadrilatero articolato, che proprio per la sua estrema semplicità e per la sua grande versatilità è alla base di molti semplici strumenti che ci troviamo ogni giorno sotto gli occhi, alcuni dei quali si possono vedere nel pannello, dalle bilance alle tende alla veneziana, ai tergicristalli, alle gru, ma anche a meccanismi più sofisticati come alcune protesi per amputati.

Quattro lati sono il minimo per avere un meccanismo mobile. Infatti un triangolo è una struttura rigida e non deformabile, che proprio per questa sua fissità è usato per la costruzione di strutture stabili, come tralicci, ponti, tetti. Al contrario, un quadrilatero conserva una certa libertà di movimento anche se se ne fissa un lato, una libertà che ne fa uno strumento molto efficace per disegnare curve, o se si vuole per far muovere un pezzo lungo una traiettoria prestabilita.

Normalmente uno dei lati del quadrilatero è fissato, ad esempio al tavolo, e resta immobile; così si può fare a meno di metterlo, e come nei meccanismi di Watt e di Čebičev il quadrilatero si riduce a tre aste incernierate tra loro, di cui la prima e l'ultima sono fissate al tavolo per un estremo, attorno al quale possono solo ruotare.

Nonostante l'estrema semplicità del meccanismo, i quadrilateri articolati sono molto versatili, e hanno numerose applicazioni. In particolare, essi sono molto utili per convertire un movimento oscillante in uno circolare e viceversa, come avviene ad esempio nella bicicletta, dove il movimento alternato delle gambe del ciclista genera il moto circolare dei pedali, o nella macchina da cucire, dove il moto oscillante del pedale fa girare la ruota della macchina.

Se poi si aggiungono al quadrilatero due altre aste, che formano un triangolo con quella centrale, è possibile tracciare moltissime curve, anche piuttosto irregolari, regolando opportunamente la lunghezza delle aste aggiunte. Nella macchina esposta, uno dei lati del quadrilatero è prolungato, e la sua punta descrive una traiettoria che fa girare la ruota sempre dello stesso angolo.

Il quadrilatero articolato nel pedale di una macchina da cucire

Una applicazione del quadrilatero articolato

2. Sezioni coniche.

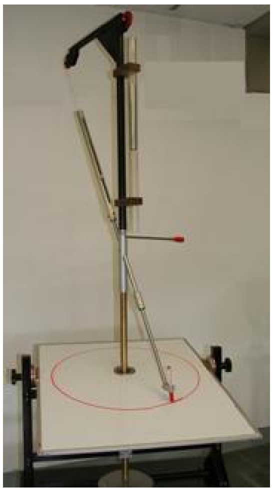
Una luce nell'ombra.

Se illuminiamo un muro con una torcia elettrica tenendola perpendicolare alla parete, la parte illuminata è all'incirca circolare. Cominciamo ora a inclinare la torcia verso l'alto; il cerchio si deforma e assume una forma allungata, come un vassoio o uno stadio: è un'ellisse.

Se continuiamo a inclinare la torcia, l'ellisse si allunga sempre di più. Mentre una delle estremità resta davanti a noi, l'altra va via via allontanandosi; se la parete fosse infinita, l'area illuminata diventerebbe sempre più grande, finché per una certa inclinazione della torcia diventerebbe infinita. La figura così ottenuta è una parabola.

Se incliniamo la torcia ancora di più, l'area illuminata aumenta ancora, e assume la figura di un'iperbole.

Le tre figure che si ottengono successivamente, o meglio le curve che le delimitano, prendono il nome comune di sezioni coniche, dato che si ottengono sezionando un cono (nel nostro caso il cono della luce proiettata dalla torcia) con un piano (la parete).



Le sezioni coniche si trovano spesso nelle situazioni più comuni: un lume da tavolo disegna sulla parete due iperboli, l'ombra di una palla è un'ellisse, un sasso lanciato da una fionda descrive una parabola. In passato la teoria delle sezioni coniche era essenziale per la costruzione delle meridiane. Infatti nel suo moto apparente il sole descrive una circonferenza; i raggi che passano per la punta dello stilo della meridiana formano allora un cono, che tagliato dalla parete dà origine a una sezione conica, alle nostre latitudini un'iperbole, sulla quale si muove l'ombra della punta dello stilo.

Si può disegnare un'ellisse servendosi del grande compasso tridimensionale, al quale i geometri arabi avevano dato il nome di "compasso perfetto". L'asta inclinata che ruota attorno all'asse verticale descrive un cono, che viene tagliato dal piano del disegno. A seconda dell'inclinazione di quest'ultimo si ottiene una circonferenza (quando il piano è orizzontale) o un'ellisse, tanto più allungata quanto più si inclina il piano. Se si potesse aumentare indefinitamente l'inclinazione del piano, si otterrebbe prima una parabola e poi un'iperbole.

Le sezioni coniche: cerchio, ellisse, parabola, iperbole

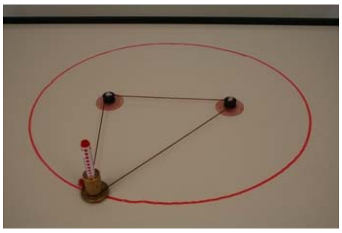
Il compasso perfetto

Altri compassi ellittici si possono costruire utilizzando le diverse proprietà di questa curva; se ne trovano anche in commercio. Una parabola o un'iperbole sono più difficili da disegnare.

Echi e riflessi.

Il modo più semplice per tracciare un'ellisse è con un pezzo di spago, un po' come per la circonferenza che abbiamo disegnato all'ingresso.

Una circonferenza ha tutti i punti alla stessa distanza dal centro, e quindi si può disegnare con uno spago, tenendone fissa un'estremità e facendo ruotare l'altra con il pennarello. Quando la circonferenza si allunga e diventa un'ellisse, il centro per così dire si sdoppia in due punti: i fuochi. Questi hanno una proprietà caratteristica: se si prende un punto qualsiasi sull'ellisse e lo si congiunge con i due fuochi, la somma delle lunghezze dei due segmenti è sempre la stessa.



Questa proprietà può essere usata per disegnare un'ellisse sul terreno: si fissano due paletti ai due fuochi e vi si legano gli estremi di una cordicella. Se ora si fa girare una matita in modo da percorrere la cordicella tenendola sempre tesa, la curva disegnata è un'ellisse, che viene chiamata "ellisse del giardiniere" perché questo metodo viene usato spesso per disegnare delle aiuole ellittiche.

La stessa proprietà può essere usata per costruire degli ingranaggi ellittici. Se si prendono due ellissi uguali, disposte in modo che ognuna di esse possa ruotare attorno a uno dei suoi fuochi, e se la distanza dei perni è uguale alla lunghezza della cordicella che descrive l'ellisse, le due ellissi restano sempre tangenti, e la rotazione di una trascina l'altra. Inoltre, se la prima ruota uniformemente, la seconda ha velocità variabile, tanto più grande quanto più il punto di tangenza è vicino al fuoco fisso.

Una seconda proprietà importante dell'ellisse è che la retta perpendicolare all'ellisse in un suo punto qualsiasi divide l'angolo formato dalle cordicelle (cioè dalle rette che uniscono il punto ai fuochi) in due parti uguali. Questa proprietà ha a che fare con la riflessione della luce. Infatti quando un raggio di luce si riflette su uno specchio, sia piano che curvo, la perpendicolare allo specchio fa angoli uguali con il raggio incidente e con quello riflesso, cioè con il raggio che arriva e con quello che parte. Ma allora un raggio di luce che parte da un fuoco si comporta come la cordicella dell'ellisse del giardiniere: dopo essersi riflesso sull'ellisse andrà a colpire l'altro fuoco.

Lo stesso vale per qualsiasi tipo di raggi: luminosi, sonori, calorifici. In ogni caso, tutti i raggi che partono da un fuoco, dopo una riflessione sull'ellisse vanno a concentrarsi nell'altro. Di qui la ragione del nome "fuochi"; se si mette una fonte di calore in uno dei fuochi, il calore si concentra nell'altro e può incendiare un pezzo di carta o un materiale infiammabile.

L' ellisse del giardiniere

Ingranaggi ellittici

Una teglia ellittica

Una semplice teglia (di forma approssimativamente ellittica) con il fondo coperto d'acqua può servire per illustrare il fenomeno. Se si tocca l'acqua con un dito in corrispondenza di uno dei fuochi, segnati con un pallino sul fondo, si formano delle onde concentriche che dopo essersi riflesse sulla parete della teglia vanno a concentrarsi sull'altro fuoco.

Specchi ustori.

Via via che il piano che la genera si inclina sempre di più, l'ellisse diventa sempre più allungata e il secondo fuoco si allontana dal primo. Quando si trasforma in una parabola, il secondo fuoco sparisce (a volte si dice che è andato all'infinito) e non ne resta che uno. E mentre in uno specchio ellittico i raggi che provenivano da un fuoco andavano a finire nell'altro, in uno specchio parabolico i raggi che partono dell'unico fuoco rimasto si riflettono parallelamente all'asse, e viceversa i raggi paralleli all'asse che si concentrano nel fuoco.

Quest'ultima proprietà della parabola può essere usata per costruire uno specchio ustorio, ossia uno specchio che concentra i raggi solari (che si possono considerare paralleli data la grande distanza del Sole) nel fuoco, dove possono incendiare del materiale infiammabile.

Noi abbiamo costruito uno specchio ustorio da interni, rimpiazzando i raggi solari con quelli provenienti da una lampada alogena. Abbiamo messo la lampada nel fuoco di un secondo specchio parabolico, dal quale i raggi luminosi escono paralleli dopo una riflessione; una seconda riflessione sul primo specchio li concentra nel fuoco, dove accendono in breve tempo un fiammifero.

Le parabole si trovano spesso come soluzioni di problemi scientifici e tecnici. Un sasso lanciato obliquamente descrive una parabola; come pure assume la forma di una parabola il cavo di sostegno di un ponte sospeso.

Un miraggio.

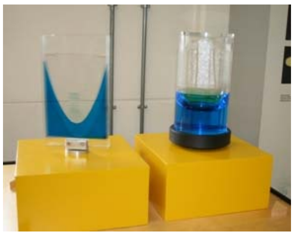
Utilizzando due parabole uguali si realizza un interessante fenomeno. Quello che si vede, è una specie di scatola nera a forma di disco, con un foro piatto sul quale è posato un dado. Questo dado si può illuminare con una torcia, e a prima vista ha tutte le proprietà di un oggetto reale.

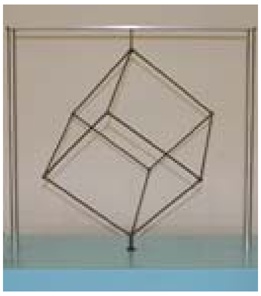
Quando però si cerca di prenderlo o di toccarlo, ci si accorge che il dado non c'è: si tratta solo di un'illusione ottica.

Specchi ustori

Un miraggio

Il funzionamento di questo miraggio è presto spiegato. La scatola è in realtà costituita di due specchi parabolici uguali e sovrapposti, ciascuno dei quali ha il fuoco più o meno nel vertice dell'altro. Sul fondo dello specchio inferiore sta il dado, mentre lo specchio superiore ha un foro attraverso il quale si può guardare nell'interno. Quando si guarda attraverso questo foro, o si illumina con una torcia, il raggio luminoso compie due riflessioni prima di colpire il dado, e quindi ne forma un'immagine reale del tutto simile all'originale.





Parabola e paraboloide

Camera ellissoidale

Grandi paraboloidi che concentrano la voce

Iperboloidi di rotazione

Un cubo che ruota

Ruotando.

A ben vedere, gli specchi ustori e il miraggio sono realizzati non con delle parabole, ma con le superfici che si ottengono facendo ruotare queste ultime attorno al loro asse. Queste superfici si chiamano *paraboloidi di rotazione*. Si ottiene un paraboloide facendo girare abbastanza velocemente del liquido in un recipiente cilindrico. Se invece il liquido è messo tra due piani vicini, si ottiene una parabola.

Analogamente, se facciamo ruotare un'ellisse o un'iperbole, otteniamo un *ellissoide* o un *iperboloide di rotazione*.

Anche queste superfici hanno proprietà di riflessione simili a quelle del paraboloide. Noi abbiamo costruito una camera ellittica, ottenuta ruotando una mezza ellisse attorno all'asse. In essa avviene un fenomeno simile allo specchio ustorio: se ci mettiamo in uno dei due fuochi e parliamo verso la parete ellittica anche a voce molto bassa, chi sta nell'altro fuoco riceve la voce distintamente, mentre chi sta tra i due non sente quasi nulla.

Un fenomeno simile avviene se si usano due parabole: come negli specchi ustori e nel miraggio esse concentravano la luce, così le due grandi parabole agli estremi del corridoio concentrano le onde sonore: parlando molto piano nel fuoco di una si è uditi distintamente in quello dell'altra. Ambedue questi oggetti si trovano nella sala accanto.

Sempre sfruttando le proprietà focali della parabola si costruiscono i grandi radiotelescopi e le antenne paraboliche della TV satellitare.

L'iperboloide di rotazione ha la notevole caratteristica di essere una superficie *rigata*, cioè di essere costituita di rette, come si può vedere nell'iperboloide ottenuto con dei fili.

Questo fatto dà luogo a un fenomeno inaspettato: facendo girare una retta opportunamente inclinata, si riesce a farla passare attraverso una fessura a forma di iperbole. Infatti l'asta, ruotando, descrive un iperboloide, che tagliato con un piano ha come tracce le due fessure attraverso le quali passa senza difficoltà.

La stessa superficie si ottiene facendo girare un cubo. Mentre gli spigoli superiori e inferiori, che incontrano l'asse di rotazione, descrivono un cono, quelli intermedi, che non incontrano l'asse, generano un iperboloide, che si vede a causa della persistenza delle immagini sulla retina.

Due proprietà dell'ellisse e della parabola.

Una proprietà dell'ellisse e della parabola

Abbiamo voluto riservare un tavolo a due interessanti proprietà dell'ellisse e della parabola.

Supponiamo di aver disegnato una di queste curve (per esempio l'ellisse) su un piano e guardiamo da punto del piano; vedremo l'ellisse sotto un certo angolo, che varia a seconda di dove abbiamo messo l'occhio. Chiediamoci ora: da quali punti si vede l'ellisse sotto un angolo retto? L'oggetto che si vede sul tavolo mostra che questi punti formano una circonferenza. In linguaggio leggermente più tecnico: il luogo dei punti da cui si vede un'ellisse sotto un angolo retto è una circonferenza.

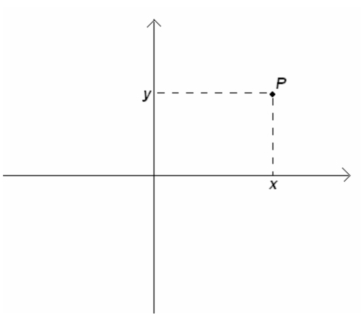
La stessa domanda per la parabola ha come risposta: una retta.

3. Altre curve.

La geometria analitica.

Neanche le sezioni coniche possono soddisfare tutte le necessità della scienza e della tecnica. È allora necessario andare al di là delle sezioni coniche, e considerare curve ancora più complesse.

Un modo molto efficace per rappresentare queste curve sul piano consiste nel servirsi della loro *equazione.*



Le coordinate cartesiane

Se si tracciano sul piano due rette perpendicolari, è possibile individuare ogni punto mediante le sue *coordinate cartesiane*, che rappresentano grosso modo le distanza del punto dai due assi. Esse sono chiamate così in onore di Réné Descartes (Cartesio), che per primo se ne è servito costantemente proprio per la descrizione delle curve.

Le due coordinate si indicano per lo più con x e y. A ogni valore della coppia (x,y) corrisponde un punto del piano. Quando x e y variano in tutti i modi possibili, il punto corrispondente descrive tutto il piano; se invece le coordinate sono soggette a un'equazione, il punto che esse rappresentano è vincolato a muoversi su una curva, di cui l'equazione costituisce la rappresentazione analitica.

Ad esempio, se si fissa la x, ad esempio mediante l'equazione $x=1$, la curva corrispondente è una retta verticale; mentre l'equazione $y=3$ rappresenta una retta orizzontale. Più in generale, un'equazione di primo grado (cioè un'equazione in cui le variabili *x* e *y* compaiono alla prima potenza) rappresenta una retta, mentre un'equazione di secondo grado dà luogo a una delle sezioni coniche (compresa la circonferenza).

Si possono studiare curve con equazione di terzo grado, o di quarto, o via via di grado sempre più alto. Per queste, troviamo nell'*Encyclopedie* di Diderot e D'Alembert una macchina universale che consente, aggiungendo ogni volta uno strato, di tracciare curve di grado sempre più alto. Quella che è stata realizzata ha tre livelli sovrapposti, e quindi traccia curve di terzo grado. Si tratta di una macchina piuttosto "pesante", la cui complessità è dovuta soprattutto alla necessità di ridurre al minimo gli attriti che altrimenti ne impedirebbero il funzionamento.

La cicloide.

Altre curve hanno un'equazione che non ha nessun grado (o meglio, non sono esprimibili con un polinomio); alcune di esse si distinguono dalle altre per alcune proprietà speciali, che le rendono particolarmente utili e interessanti. Una di queste è la *cicloide*, cioè la curva descritta da un punto su una circonferenza che rotola.

La cicloide si può vedere fissando una lampadina alla ruota di una bicicletta, meglio se al buio, o anche facendo ruotare un cerchio su cui abbiamo segnato un punto, come si può vedere in quella sulla parete.

Nonostante la semplicità della sua descrizione, la cicloide è una curva relativamente moderna. Tra i primi, se non il primo, a prenderla in esame fu Galileo, che osservò come essa potesse descrivere in maniera elegante l'arcata di un ponte. Durante tutto il Seicento, la cicloide fu oggetto di studio da parte dei maggiori matematici, che ne determinarono la lunghezza, l'area racchiusa (che per primo Galileo aveva congetturato essere il triplo del cerchio generatore, come fu dimostrato più tardi in modo indipendente da molti geometri, tra cui Torricelli), il baricentro e altre quantità connesse.

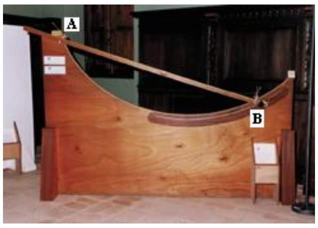
Ma le sorprese dovevano aspettare la fine del secolo, quando la cicloide si affermò come soluzione di due importanti problemi matematici.

Il primo è relativo alla caduta dei gravi, e segna la nascita di una branca totalmente nuova della matematica: il calcolo delle variazioni.

Una macchina per tracciare curve

Generazione della cicloide

Supponiamo di voler far andare una pallina da un punto A a un punto B posto più in basso, ma non sulla verticale. Possiamo immaginare di costruire un profilo che congiunge i punti A e B, e di far scivolare la pallina lungo di esso. Naturalmente di questi profili ce ne sono infiniti; ci chiediamo allora: ce ne sarà uno che rende minimo il tempo di caduta?



A prima vista si potrebbe pensare che la soluzione sia la retta che congiunge A e B. se però ci riflettiamo meglio, vediamo che la retta è sì la linea più breva tra i due punti, ma non necessariamente quella di tempo minimo; potrebbe infatti convenire far partire la pallina più verticalmente, in modo da farle acquistare subito una velocità così elevata da compensare la maggiore lunghezza del cammino da percorrere.

Questo problema della curva *brachistocrona*, o di tempo minimo (dal greco brachistos, minimo e chronos, tempo) fu posto da Johann Bernoulli come una sfida ai matematici del tempo, e fu risolto tra gli altri da Newton e da Leibniz: la curva che dà il tempo minimo è una cicloide. Bernoulli era così orgoglioso della sua scoperta, da mettere nel frontespizio delle sue Opere la vignetta di un cane che tenta invano di raggiungere una cicloide, con il motto: "Supra invidiam", sopra l'invidia.

Noi abbiamo messo a confronto la cicloide con la retta: lasciando cadere allo stesso tempo due palline lungo queste due curve, si vede come il tempo per la cicloide sia considerevolmente minore di quello per la retta.

Il pendolo cicloidale.

La cicloide entra anche in un secondo problema, stavolta di natura più tecnica. Sempre Galileo aveva osservato come le oscillazioni di un pendolo avvengano approssimativamente nello stesso tempo, e ciò indipendentemente dall'ampiezza delle oscillazioni. A partire da questa osservazione di Galileo presero origine i primi orologi a pendolo.

In realtà le oscillazioni del pendolo non sono esattamente isocrone: il tempo che occorre per compiere un'oscillazione completa dipende dall'ampiezza dell'oscillazione, ed è tanto maggiore quanto più ampia è l'oscillazione. Solo per oscillazioni molto piccole il tempo si può considerare essenzialmente costante, e sono queste oscillazioni piccole che si sfruttano per gli orologi a pendolo.

Ci si può chiedere allora: come deve essere fatto un pendolo perché le oscillazioni richiedano tutte esattamente lo stesso tempo, o in una parola (anche questa derivata dal greco: isos, lo stesso, e chronos, tempo) siano rigorosamente *isocrone*?

Vediamo le cose da un punto di vista leggermente diverso. In un pendolo normale il peso oscilla liberamente attaccato a un punto, e quindi lungo una circonferenza. Le sue oscillazioni sono isocrone

La brachistocrona

solo approssimativamente, e richiedono tanto più tempo quanto è più grande l'arco di circonferenza descritto. In questo contesto la domanda diventa: lungo che tipo di curva bisogna fare oscillare un corpo in modo che le oscillazioni siano perfettamente isocrone?

La risposta è ancora una volta: la cicloide. Se mettiamo due palline in due punti sulla cicloide, e le lasciamo cadere contemporaneamente, esse si urteranno esattamente nel punto più basso, anche se sono partite una molto vicina e l'altra molto lontana da questo punto. In altre parole, la pallina impiega lo stesso tempo a percorrere l'arco grande e quello piccolo, segno che le oscillazioni sono isocrone. Nella circonferenza ciò non avviene: la pallina che cade da più vicino arriva prima.

Se vogliamo allora costruire un orologio a pendolo esattamente isocrono, occorre che il peso oscilli lungo una cicloide. Ma come è possibile obbligare il peso a muoversi lungo questa curva senza farlo strisciare, cioè senza usare un profilo cicloidale? La situazione è analoga a quella della prima stanza, quando volevamo disegnare una retta senza usare un profilo. Lì avevamo usato un meccanismo abbastanza complesso, il meccanismo di Peaucellier. Qui ci serviremo di un altro trucco: invece di lasciare il peso libero di oscillare (in questo caso descriverebbe una circonferenza) ne condizioneremo la traiettoria facendo adagiare il filo su due profili.

Il problema diventa allora: come devono essere sagomati questi profili se vogliamo che il peso percorra una cicloide? La risposta è: devono essere degli archi di cicloide. In questo caso (e solo in questo caso) il pendolo oscillerà su una cicloide, e quindi sarà isocrono.

Abbiamo messo a confronto due pendoli: uno libero, che si muove su una circonferenza, e uno cicloidale, ottenuto con i profili in alto. Due fotocellule misurano i periodi, che vengono visualizzati sui computer. Come si vede, mentre il periodo del pendolo ordinario diminuisce con l'ampiezza delle oscillazioni, quello del pendolo cicloidale è rigorosamente costante.

Le spirali.

Una formica parte dal centro del piatto di un giradischi, e si dirige verso l'esterno, percorrendo una linea retta. Se però nel momento in cui la formica parte il piatto comincia a girare, e tutti e due, la formica e il giradischi, vanno sempre alla stessa velocità, la formica percorrerà una curva a spirale, che si chiama di Archimede perché è stata studiata per primo dal matematico siracusano.

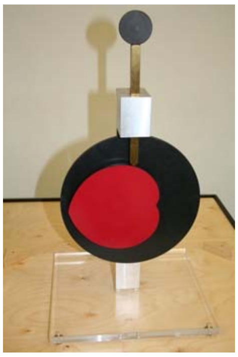
Possiamo sostituire la formica con un pennarello, che muoviamo dal centro verso l'esterno con velocità il più possibile costante;

Il profilo cicloidale

I pendoli a confronto

La spirale di Archimede

vedremo allora disegnarsi la spirale di Archimede, che si avvolgerà tante più volte quanto più lentamente muoveremo il pennarello.



Un'interessante applicazione della spirale si trova nelle macchine da cucire, nella parte che serve per avvolgere il filo attorno al rocchetto. Il filo che viene dalla matassa viene tenuto teso, e si avvolge sul rocchetto che ruota e oscilla avanti e indietro, in modo da permettere una distribuzione uniforme del filo. È proprio qui che entra la spirale. Infatti perché il filo si avvolga uniformemente su tutte le parti del rocchetto, occorre che il movimento di oscillazione avvenga sempre con la stessa velocità. Se infatti, come accadrebbe se non si prendessero opportune precauzioni, il movimento di oscillazione fosse più veloce al centro e più lento agli estremi, quando cioè il rocchetto deve cambiare direzione, il filo non si avvolgerebbe in modo uniforme, ma si addenserebbe alle estremità del rocchetto.

Occorre in definitiva un meccanismo che faccia oscillare il rocchetto sempre con la stessa velocità. Questo è ottenuto facendo regolare l'oscillazione del rocchetto da un profilo costituito da due archi di spirale accoppiati. Qui vediamo il particolare meccanismo della macchina da cucire, e una sua riproduzione ingrandita e funzionante. L'asta verticale si muove alternativamente su e giù, sempre alla stessa velocità.

Le caustiche.

Abbiamo visto come le sezioni coniche, e in particolare la parabola, abbiano la capacità di concentrare i raggi luminosi in un punto. Le altre curve non hanno in generale questa proprietà. Questo non significa però che i raggi riflessi si sparpaglino completamente, illuminando più o meno uniformemente lo spazio; molto spesso essi si concentrano non in un punto, ma su una curva: la *caustica*. Come il fuoco delle sezioni coniche, anche il nome di questa curva deriva dal bruciare; infatti l'aggettivo "caustico" significa "che brucia". In realtà al nome non corrisponde un'effettiva capacità di accendere il fuoco, almeno nel caso che la sorgente luminosa sia di potenza moderata, come una lampadina.

Una macchina da cucire

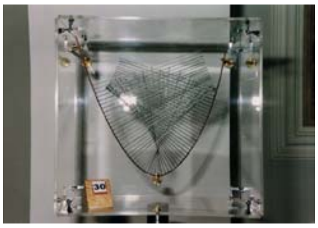
Il meccanismo di avvolgimento a doppia spirale e il suo modello ingrandito

Una caustica di riflessione

Le caustiche si osservano spesso nella vita quotidiana; ad esempio quando una teglia viene illuminata obliquamente, i raggi che si riflettono sulla parete verticale disegnano sul fondo una curva, che si chiama caustica di riflessione, perché si ottiene facendo riflettere dei raggi luminosi.

Le caustiche si possono ottenere anche per rifrazione, quando i raggi provenienti da un punto penetrano in un mezzo di differente densità.

Inviluppi.



I raggi riflessi o rifratti sono tutti tangenti alla caustica che essi formano. Più in generale, se si prende una famiglia di rette (come erano nelle caustiche i raggi riflessi o rifratti), queste possono distribuirsi uniformemente nel piano, come avviene ad esempio quando sono parallele, ma si possono anche addensare su una curva, alla quale risultano tutte tangenti. Questa curva si chiama *inviluppo* delle rette. Così una caustica di riflessione è l'inviluppo dei raggi riflessi da uno specchio. Si possono ottenere degli inviluppi di rette tendendo dei fili tra vari punti del piano o dello spazio. La ruota di bicicletta sopra la vostra testa, le rette perpendicolari alla parabola, mostrano curve ottenute come inviluppi di rette.

Notiamo che le caustiche, e in generale gli inviluppi, non sono curve presenti fisicamente. Quello che esiste sono i raggi di luce, o in generale le rette della famiglia; la curva che esse inviluppano appare solo perché queste si addensano su di essa. Così i raggi di luce che si addensano sulla caustica illuminano maggiormente la parte del piano corrispondente alla curva, e la disegnano. Lo stesso avviene per le rette normali alla parabola; esse disegnano una curva che si vede, anche se non c'è: infatti ci sono soltanto le rette che la inviluppano.

In alcuni casi, è importante evitare la formazione di caustiche, e avere una luce il più possibile uniforme. Ad esempio in fotografia l'uniformità dell'illuminazione è essenziale. La lampada Fortuny, ancora in uso, grazie alla forma della superficie riflettente, fornisce una densità luminosa costante in qualsiasi punto.

Curvatura e dintorni.

Come tra tutte le rette che passano per un punto P di una curva, la tangente è quella che approssima meglio la curva, così tra tutti i cerchi passanti per P ce n'è uno che si adatta meglio alla forma della curva vicino a P. Questo cerchio, il cui centro sta sulla perpendicolare alla curva (o, che è lo stesso, alla sua tangente in P), si chiama cerchio osculatore.

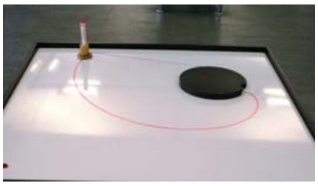
Possiamo così misurare la curvatura di una curva. La tangente ci permette di determinare la direzione di una curva C. Se immaginiamo un punto che si muove su C, possiamo pensare che in ogni istante il punto si muove nella direzione della tangente. Analogamente, la curvatura di C sarà data da quella del suo cerchio osculatore. E siccome un cerchio è tanto più curvo quanto minore è il suo raggio, possiamo misurare la curvatura di C mediante l'inverso del raggio del cerchio osculatore, che è chiamato raggio di curvatura.

I fili tesi inviluppano una curva simile a una caustica

L'inviluppo delle normali a una parabola

La lampada Fortuny

Quando il punto *P* varia sulla curva, i centri di curvatura (cioè i centri dei cerchi opsculatori) descrivono una seconda curva, che è chiamata l'evoluta della prima. Questa curva è anche l'inviluppo delle rette perpendicolari alla curva data.



Reciprocamente, la prima curva è l'evolvente della seconda. L'evolvente di una curva si può disegnare attaccando una cordicella al profilo della curva e quindi staccandola lentamente, facendo attenzione di tenere la parte staccata sempre tesa. L'estremo libero della cordicella descrive allora l' evolvente. Sul tavolo si può tracciare l' evolvente del cerchio.

Nuove tendenze.

Uno dei caratteri del cammino che abbiamo percorso fin qui è il passaggio dal semplice al complesso. Via via che si affinavano le tecniche e aumentavano le conoscenze, diventava possibile studiare curve più complesse, di cui ci si serviva per affrontare problemi altrimenti insolubili. Allo stesso tempo, si assisteva a un analogo passaggio dal particolare al generale: invece di studiare la genesi e le proprietà di questa o quella curva, ci si interessava di intere classi di curve, e si elaboravano concetti che potessero servire indifferentemente per tutte.

La geometria moderna ha proseguito e reso ancora più evidente questo processo, in ambedue le direzioni: maggiore generalità, maggiore complessità. In corrispondenza, le tecniche matematiche sono diventate sempre più astratte, al punto da rendere difficile, se non impossibile, una descrizione anche approssimata.

Non volendo rinunciare del tutto a dare un'idea degli sviluppi moderni della geometria delle curve, abbiamo scelto due esempi rappresentativi delle due tendenze: le geodetiche e i frattali.

Su una superficie piana, ad esempio in una piazza, il cammino più breve tra due punti è la linea retta. Se però ci muoviamo su una superficie curva, come può essere la superficie della terra, non è più possibile andare in linea retta, e al suo posto abbiamo una curva, detta *geodetica*, la cui lunghezza è la minima tra tutte le curve che uniscono i suoi estremi. Come all'inizio della nostra visita tiravamo una corda per avere una retta, potremo trovare le geodetiche di una superficie convessa tirando uno spago tra due punti. Nel caso della Terra, che è all'incirca una sfera, le geodetiche sono i cerchi massimi, quelli cioè che dividono la sfera in due parti uguali. Per andare da un punto a un altro conviene allora muoversi sul cerchio massimo che passa per i due punti.

Questa è la ragione delle rotte polari nei viaggi aerei intercontinentali: sulle carte sembrano molto lunghe, perché sono riportate in piano, ma basta tendere un elastico su un

L'evolvente del cerchio

Una rotta polare

mappamondo per vedere come in realtà la strada più breve tra Pisa e Los Angeles passa vicino al polo nord.

Il secondo esempio riguarda lo stesso concetto di curva. Quelle che abbiamo visto finora corrispondono all'idea intuitiva di curva che tutti abbiamo; sono cioè degli oggetti a una dimensione, che si possono pensare ottenuti piegando un filo. Se hanno dei punti singolari, come nel caso del bordo di un poligono, questi sono in numero finito e isolati. Verso la fine dell'Ottocento, cominciano ad affacciarsi delle curve "patologiche" dalle proprietà sorprendenti. Una di queste è la curva di Peano, che riempie un quadrato e pone il problema del significato della dimensione; un'altra è la curva di Koch, che non ha tangente in nessun punto. Infine, in anni più recenti, sono emersi alcuni nuovi oggetti, i frattali, che hanno una dimensione frazionaria e la proprietà sorprendente che ogni loro parte, comunque piccola, è simile all'intero. Queste forme, la cui generazione è relativamente semplice, danno immagini di notevole bellezza; immagini con le quali concludiamo la nostra visita nel mondo delle curve.