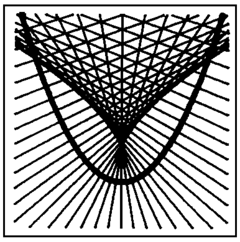
OLTRE IL COMPASSO
La geometria delle curve



Il meccanismo di Peaucellier

Uno dei problemi che, alla fine del '700 ed in parte dell' '800, ha impegnato gli ingegneri è stato quello di trovare un sistema utile per guidare l'asta del pistone di una macchina a vapore in un moto rettilineo alternato.
Senza un tale meccanismo, infatti, la biella AB che connette l'asta del pistone con la ruota che raccoglie il movimento, spingerebbe tale asta fuori della verticale, danneggiando rapidamente la boccola S. (figura l)
In molte altre macchine occorre che un dato punto si muova in direzione rettilinea con il minimo attrito possibile e questo fatto giustifica l'interesse che è stato dedicato al problema di tracciare una retta per mezzo di un sistema di aste articolate.

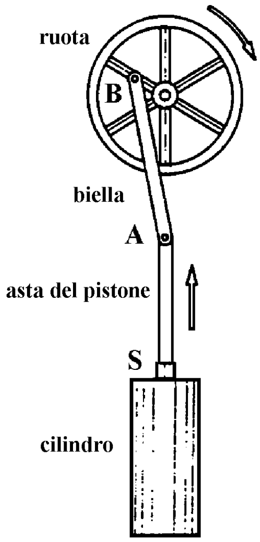


fig. 1

Nel 1784 Watt, l'inventore della macchina a vapore, ha ottenuto una soluzione approssimata di questo problema. Essa consiste in una combinazione di tre aste incernierate, due delle quali AD e BC, di egual lunghezza e una AB molto più corta. (figura 2)

Se C e D sono punti fissati (ad altezze opportune diverse tra loro) allora muovendo l'asta AB il suo punto medio P sembra descrivere per un tratto considerevole un segmento rettilineo verticale. In realtà, il movimento completo del sistema articolato fa descrivere al punto P una curva a forma di otto.

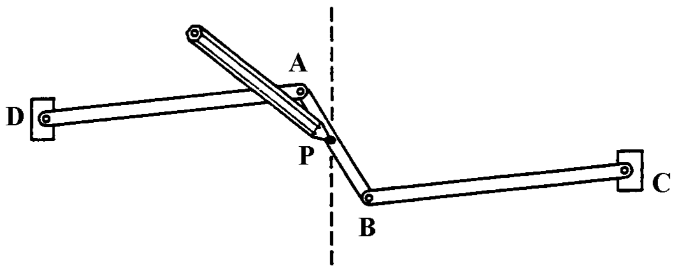


fig.2

Anche se la soluzione dell'illustre ingegnere era sufficiente ai bisogni ordinari della tecnica (il suo meccanismo continua ad essere usato), molti dopo di lui cercarono, senza successo, di trovare una soluzione esatta al problema. Essa fu trovata nel 1864 da A. Peaucellier.

Il meccanismo inventato da Peaucellier è costituito da sette aste incernierate. Quattro di esse della stessa lunghezza formano un rombo, due più lunghe sono incernierate a due vertici opposti del rombo e fra loro in un punto fisso O, la settima asta costringe il punto P a muoversi su una circonferenza passante per O. Al variare di P su tale circonferenza il punto Q si muove lungo una retta.(figura 3)
E' ovvio che i punti O, P, Q sono sempre allineati al variare di P sulla circonferenza passante per O.

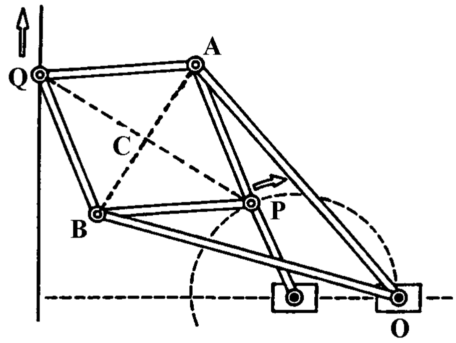


fig. 3

Dimostriamo ora che vale la relazione $OP \cdot OQ = OA^2 - AP^2$ = costante
Indichiamo con C il punto d'incontro, delle diagonali PQ ed AB del rombo APBQ.
Le due diagonali si dividono scambievolmente per metà. Inoltre l'angolo ACP è retto.
Poiché O, P, Q sono allineati si ha:

$$OP = OC - PC \qquad OQ=OC+CQ=OC+PC$$

Così:

$$OP \cdot OQ = OC^2 - PC^2$$

Ma, per il teorema di Pitagora si ha:

$$OC^2 = OA^2 - AC^2 \qquad PC^2 = AP^2 - AC^2$$

Quindi:

$$OP \cdot OQ = OA^2 - AP^2 = \text{costante } K$$

Fatte queste premesse dimostriamo che al variare di P sulla circonferenza passante per O il punto Q descrive Q una retta.

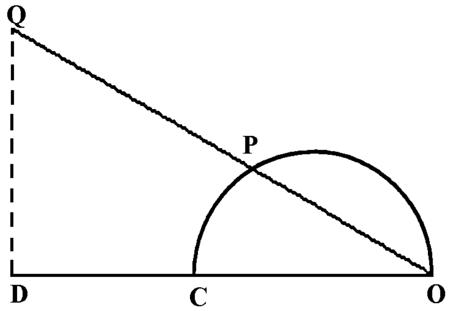


fig. 4

Sia C il punto della circonferenza diametralmente opposto ad O e sia P un generico punto della circonferenza diverso da C e da O.
Indichiamo con Q e D le posizioni assunte da un vertice del rombo (del meccanismo) quando il vertice opposto coincide rispettivamente con P e C. (figura 4).
Per quanto osservato precedentemente valgono le seguenti relazioni:

$$OC \cdot OD = K \qquad OP \cdot OQ = K$$

Consideriamo i triangoli OPC e ODQ: essi sono simili e quindi siccome l'angolo OPC è retto lo sarà anche l'angolo ODQ. Poiché il punto P è stato arbitrariamente scelto sulla circonferenza passante per O, quanto detto varrà per ogni punto del cerchio. Così al variare di P sulla circonferenza il punto Q si sposta lungo una retta.