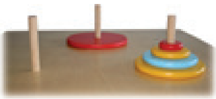
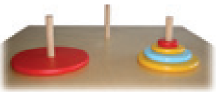
LA TORRE DI HANOI ...

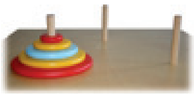
Narra una leggenda indiana che in un monastero del Tibet i monaci siano impegnati da tempo immemorabile a spostare 64 dischi d'oro massiccio. All'inizio tutti i dischi erano su un piolo; alla fine dovranno andare su uno degli altri due. I monaci spostano un disco alla volta, senza mai mettere un disco più grande sopra uno più piccolo. Quando avranno finito il mondo cadrà in cenere.

Riusciranno i monaci a portare a termine il loro compito? Ed è sempre possibile farlo, quale che sia il numero dei dischi? La risposta è positiva, e si può dimostrarlo così.



Supponiamo di saper spostare un certo numero di dischi, diciamo 36. Se ora abbiamo una torre di 37 dischi, possiamo prima spostare i primi 36, senza toccare il più grande; poi spostiamo questo su un piolo vuoto, e infine risistemiamo i primi 36 sopra di lui. Naturalmente che i dischi siano 36 o 55 o 12 è irrilevante: se sappiamo spostare un certo numero di dischi, ne sappiamo spostare anche uno in più.
D'altra parte è chiaro che sappiamo spostare un disco: basta prenderlo e metterlo su un altro piolo. Ma se sappiamo spostare un disco ne sappiamo spostare due, se ne sappiamo spostare due ne sappiamo spostare tre, poi quattro, poi cinque, eccetera, fino al numero di dischi che vogliamo.





... E IL PRINCIPIO DI INDUZIONE

Il metodo di dimostrazione che abbiamo usato è noto come principio di induzione: se una affermazione è vera per il numero 1, e se ogni volta che vale per un certo numero vale anche per il numero seguente, allora è vera per tutti i numeri. Nel nostro caso, l'affermazione è: si possono spostare N dischi.

È anche possibile calcolare quante mosse ci vogliono. Infatti ogni volta che si aggiunge un disco bisogna spostare prima quelli che c'erano già, poi quello aggiunto e poi di nuovo quelli che c'erano; in totale si raddoppiano le mosse e se ne aggiunge una. Siccome per un disco basta una sola mossa, per due dischi ce ne vogliono 3, per tre ne occorrono 7, per quattro avremo bisogno di 15 mosse, per cinque di 31, eccetera. Sempre usando il principio di induzione si può dimostrare che per spostare N dischi occorrono 2^N-1 mosse. Per 64 dischi le mosse saranno allora allora 2^{64}-1, cioè

18.446.744.073.709.551.615.

Se i monaci spostassero un disco al secondo, calcolando 24 ore al giorno per 365 giorni all'anno, ci vorrebbero 584.942.417.355 anni. Si può stare tranquilli: se veramente dipende dai monaci, la fine del mondo è ancora lontana.

$$0 \in N$$

$$\forall n \in N \Rightarrow \sigma(n) \in N$$

$$0 \notin \sigma(N)$$

$$\forall n,k \in N, \sigma(n) = \sigma(k) \Rightarrow n = k$$

$$\forall A \subseteq N, \{0\} \cup \sigma(A) \subseteq A \Rightarrow A = N$$

ARITHMETICES PRINCIPIA

NOVA METHODO EXPOSITA

A

IOSEPH PEANO

in R. Academia militari professore

Analysin infinitorum in R. Taurinensi Athenæo docente.

AUGUSTAE TAURINORUM

EDIDERUNT FRATRES BOCCA

REGIS BIBLIOPOLAE

ROMAE
Via del Corso, 216-217.

FLORENTIAE
Via Cerretani, 8.

1889

$$d(x,y) = d(y,x)$$

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y$$

LA DISTANZA ...

Come si misura la distanza tra due punti? A prima vista sembra facile: basta unire i punti con un segmento, la cui lunghezza sarà la distanza cercata. Ma che succede se i due punti sono due città e noi stiamo andando in macchina da una all'altra? O se tra i due punti c'è un ostacolo e dobbiamo aggirarlo? O se un aereo cerca la rotta più corta, tenendo conto della rotondità della terra? O se in tassì vogliamo fare la strada più breve per pagare di meno? Insomma, di distanze possibili tra due punti ce ne sono molte, e la scelta di una o dell'altra dipende da quello che vogliamo misurare.
Per disegnare le carte topografiche serve la distanza in linea d'aria, il tassametro del tassì misura la distanza stradale, le rotte degli aerei seguono la distanza misurata sulla sfera.

Le tre cartine mostrano l'Italia come è, e come sarebbe se si prendesse come distanza quella stradale (cartina in basso) o il tempo di percorrenza in treno (cartina a destra).

... E LE DISTANZE

Ma si può prendere qualsiasi cosa per distanza?
Non esattamente; infatti una distanza deve verificare alcune semplici proprietà.
In primo luogo, la distanza tra due punti non può essere un numero negativo: deve essere sempre maggiore o uguale a zero, e quest'ultima eventualità si presenta solo quando i due punti coincidono. In secondo luogo, la distanza non dipende da dove si parte e dove si arriva; in altre parole la distanza tra x e y deve essere uguale alla distanza tra y e x. Infine, le deviazioni aumentano la distanza: se per andare da x a y scelgo di passare per z, la strada aumenta o comunque non diminuisce.
Più precisamente, la distanza tra x e y è minore o al più uguale alla somma delle distanze tra x e z e tra z e y.
Se queste tre condizioni sono verificate, abbiamo a che fare con una distanza ammissibile, altrimenti no. Ci sono distanze molto strane; ad esempio quella che vale sempre 1, tranne quando i punti coincidono, nel qual caso vale 0.
Su una scacchiera, si può prendere come distanza tra due caselle il numero di passi necessari per andare da una all'altra muovendosi di una casella per volta orizzontalmente o verticalmente.

$$d(x,y) \ge 0 \; ; \; d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$d(x,y) = d(y,x)$$

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$$

$$d(x,y) \ge 0 \; ; \; d(x,y) = 0$$

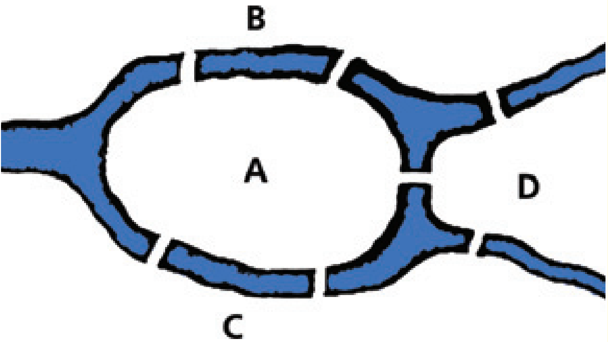
$$d(x,y) = d(y,x)$$

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y$$

I PONTI DI KÖNIGSBERG...

Nel Settecento la città di Königsberg era costituita da una serie di isole, unite tra loro da vari ponti. Ai cittadini piaceva passeggiare per le isole della città vecchia, attraversando i ponti che le univano. Qualcuno si chiese: è possibile attraversarli tutti senza mai passare due volte per lo stesso ponte? Siccome non ci riusciva nessuno, tutti erano convinti che non fosse possibile, ma non ne capivano il motivo.

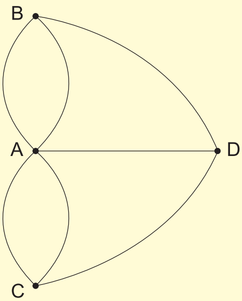
Finché un giorno chiesero a Leonhard Euler, uno dei massimi matematici del tempo, che si trovava in città. Euler ci pensò un po' e poi disse: "È chiaro; ogni volta che si entra in un'isola se ne deve uscire, e quindi i ponti si consumano a coppie. Per poterli utilizzare tutti, è necessario che ogni isola abbia un numero pari di ponti, tranne al più due: quella di partenza e quella di arrivo".

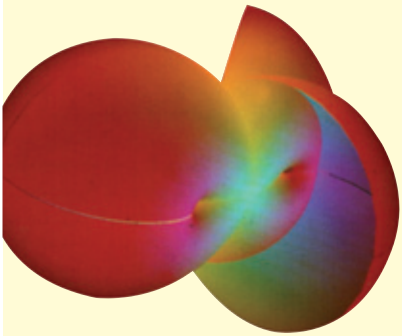


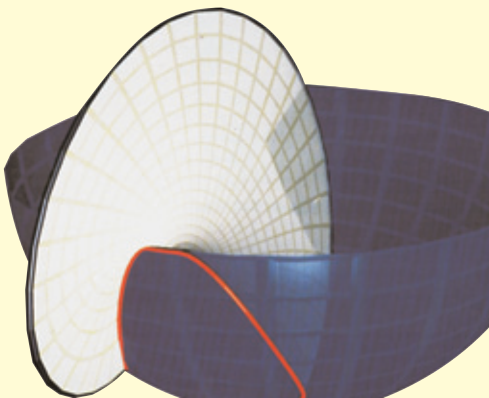
... E LA TOPOLOGIA

Salta subito agli occhi che il problema dei ponti non dipende né dalla forma né dalla posizione delle isole, ma solo dal loro numero e dal numero dei ponti che uniscono un'isola all'altra. Le isole si possono contrarre fino a diventare praticamente dei punti, i ponti si possono allungare e stringere fino a diventare delle linee, ma finché il numero delle isole e dei ponti non cambia il problema resta sempre lo stesso.

La scienza che studia i problemi che non cambiano deformando con continuità la disposizione si chiama "topologia", cioè "scienza del luogo" (dal greco τόπος, luogo e λόγος, discorso). La sua origine risale proprio al problema dei ponti della città di Königsberg.







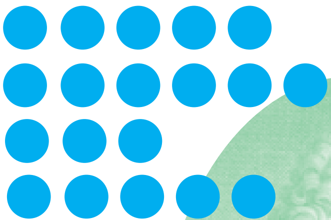
IL NIM, LA TEORIA DEI GIOCHI...

Il primo giocatore dispone un numero qualsiasi di pedine su varie file, il secondo sceglie se fare la prima mossa o lasciarla all'avversario. A ogni mossa si possono prendere un numero qualsiasi di pedine (almeno una), ma da una sola fila. I giocatori muovono a turno; vince chi prende l'ultima pedina.

Nella figura si vede una possibile situazione iniziale.

La disciplina matematica che studia i giochi a due o più contendenti, e in generale che modella le situazioni di antagonismo (oltre ai giochi, anche cose molto più serie, come le strategie commerciali, la borsa, la politica e la guerra) si chiama teoria dei giochi. Uno dei risultati della teoria è che nei giochi a informazione completa, in cui i giocatori conoscono sempre esattamente la situazione, ogni giocatore ha una strategia ottimale, che gli consente di ottenere il miglior risultato possibile. Alcuni giochi, come la dama o gli scacchi, sono troppo complessi per poter individuare la strategia migliore. Nel Nim invece non solo si dimostra che il secondo giocatore può vincere sempre, ma si sa anche come deve fare.

Nonostante questo, il Nim rimane un gioco divertente e incerto, specie se si gioca svelti e non si ha il tempo di fare i calcoli necessari.



... E L'ARITMETICA BINARIA

La strategia vincente è abbastanza semplice, ed è legata alla numerazione binaria. Per applicarla, si scrivono i numeri delle pedine di ogni fila in forma binaria, si mettono in colonna e si sommano le colonne una a una, senza riporto. La tabella a fianco riproduce la situazione del nostro esempio, nel quale ci sono quattro righe, rispettivamente con 5, 6, 3 e 6 pedine.

Per vincere, un giocatore deve fare in modo che dopo la propria mossa tutte le somme siano pari. Nel nostro caso, poiché la prima e la seconda colonna hanno somma dispari, il secondo giocatore deve scegliere di muovere per primo, in modo da rendere tutte le somme pari. Questo si può fare togliendo due pedine nella riga di 5, o togliendo completamente una delle righe di 6.

A questo punto tocca al primo giocatore, che necessariamente dovrà sparigliare il conto, rendendo dispari almeno una delle somme. Ora il secondo giocatore può ristabilire la parità, che il primo sarà di nuovo obbligato a distruggere, e così di seguito, finché tutte le pedine sono prese e il secondo giocatore ha vinto.

5	1	0	1
6	1	1	0
3		1	1
6	1	1	0
	3	3	2

5	1	0	1
6	1	1	0
3	1	1	
6	1	1	0
	3	3	2