

QUANDO L'UOMO IMPARÒ A CONTARE

LABORATORI SUI SISTEMI DI NUMERAZIONE

I bastoncini cinesi

IL GIARDINO DI ARCHIMEDE.
Un Museo per la Matematica

I bastoncini cinesi

Introduzione

Il nostro modo di contare è senz'altro uno dei più potenti e completi che siano mai stati sviluppati. Ma è anche uno dei più complessi e più difficili da apprendere. Altre strategie, preliminari o alternative, altri punti di vista, più primitivi ma in alcuni casi non meno efficaci, aiutano a comprendere meglio alcuni aspetti del contare, a mettere a fuoco e superare certe difficoltà, ad afferrare meglio le potenzialità del nostro modo di contare, oltre che a scoprirne la sua storia affascinante.

In questa prospettiva sono nati i laboratori de Il Giardino di Archimede dedicati ai sistemi di numerazione, pensati per le scuole di ogni ordine e grado e dedicati ad alcuni di questi antichi modi di contare. Si tratta di attività sperimentate con le classi dai nostri operatori.

Scopo di questo opuscolo, dedicato ai bastoncini cinesi, è fornire agli insegnanti che desiderino riproporre le attività nelle proprie classi alcune informazioni teoriche necessarie per impadronirsi dell'argomento e una serie di suggerimenti pratici per lo svolgimento dei laboratori stessi.

Indice

1 Note storiche	4
2 L'aritmetica dei bastoncini cinesi	5
Rappresentazione e cambi	5
Addizioni	6
Sottrazioni	6
Moltiplicazioni	7
Divisioni	9
3 Indicazioni sui laboratori	11
Livello 0: 5 anni	11
Livello 1: 6-8 anni	12
Livello 2: 8-10 anni	12
Livello 3: da 10 anni	12

1 Note storiche

Il modo oggi correntemente usato per esprimere i numeri in Cina si serve di due gruppi di simboli fondamentali. Il primo gruppo è composto da nove simboli corrispondenti ai numeri da uno a nove, la cui forma classica e più comune è la seguente:

一 二 三 四 五 六 七 八 九

Il secondo gruppo è composto da simboli corrispondenti ai valori dieci, cento, mille e diecimila:

十 百 千 万

Per esprimere un numero si combinano i simboli affiancando a quelli del dieci, cento, mille e diecimila la cifra da uno a nove che indica quante volte quella potenza del dieci va contata. Il numero 1058 in questo sistema sarebbe dunque scritto come 1 mille 5 dieci 8, in cui al posto di 1, 5 e 8 si mette il simbolo corrispondente e la potenza del dieci si esprime con uno dei quattro simboli del secondo gruppo: 一千五十八.

Si tratta di un modo di scrittura in parte moltiplicativo, poiché ciascuno dei primi simboli assume un valore che si ottiene moltiplicando per il valore del secondo simbolo, in parte additivo, poiché questi valori si sommano per ottenere il valore complessivo.

Fino a un'epoca relativamente recente per il lavoro matematico e scientifico veniva però impiegato un diverso sistema di scrittura che, come vedremo, costituisce anche un vero e proprio strumento di calcolo. Si tratta dei cosiddetti numeri "a bastoncini" o "ad aste" il cui uso è testimoniato fino dal II secolo a. C., ma che probabilmente ha origini ben più antiche.

Questa scrittura nasce dalla riproduzione grafica di veri e propri bastoncini, solitamente in bambù o in avorio, che venivano utilizzati per contare e per eseguire i conteggi. I bastoncini erano disposti su un'apposita tavola che, almeno a partire da una certa epoca presenta una quadrettatura che la divide in righe e colonne.

La rappresentazione dei primi numeri con i bastoncini, e di conseguenza la loro scrittura, è estremamente intuitiva. I numeri da uno a cinque si rappresentano affiancando rispettivamente da uno a cinque bastoncini verticali. Per il numero sei si ricorre a un bastoncino orizzontale (che in un certo senso rappresenta da solo il valore cinque) sotto al quale se ne aggiunge uno verticale. Per il numero sette i bastoncini verticali sono due, uniti sempre a uno orizzontale, per l'otto tre e per il nove quattro.

||| |||| ||||| T T T T

Una decina si rappresenta nuovamente con un solo bastoncino, due decine con due, e così via. Per distinguere unità da decine sulla tavola quadrettata le unità vengono collocate nella colonna più a destra, mentre alle decine è riservata la colonna subito a sinistra. La terza colonna da destra è poi riservata alle centinaia, la quarta alle migliaia, e così via. Il numero 371 sulla tavola sarebbe dunque rappresentato come in figura.

□ ||| T |

Sulla carta il numero può essere trascritto come |||T|. Si tratta dunque di un sistema di scrittura posizionale: il valore dei simboli dipende dalla colonna occupata.

La rappresentazione dei numeri con i segni precedenti può dare luogo ad ambiguità. Il numero 12, ad esempio, risulterebbe una successione di tre aste, |||, e la semplice spaziatura tra la prima e le seconde due potrebbe non essere sufficiente a rendere abbastanza chiaro che non si tratta del numero 3.

Accanto però alla disposizione dei bastoncini descritti sopra, ve ne è un'altra, del tutto analoga, in cui i bastoncini verticali divengono orizzontali e viceversa. I numeri da uno a nove sono allora rappresentati come in figura:

— = ≡ ≡ ≡ | | | |

Alternando la disposizione verticale con quella orizzontale, la scrittura dei numeri diventa più facilmente leggibile. Anche sulla tavola si riducono i rischi di mescolare inavvertitamente bastoncini di colonne diverse. Solitamente si utilizzava la disposizione verticale per unità, centinaia, de-

cine di migliaia, e quella orizzontale per decine, migliaia, eccetera, anche se, soprattutto quando la scrittura non presentava ambiguità, questa regola non sempre era rigidamente osservata. Seguendo la disposizione alternata il numero 12 diviene —| .

Nella rappresentazione scritta i simboli spesso si compongono fondendosi in una forma finale esteticamente più gradevole. I numeri 172, 651, 71141 si possono ad esempio disegnare come $\text{—|} \text{—|} \text{—|}$ $\text{—|} \text{—|} \text{—|}$ $\text{—|} \text{—|} \text{—|}$.

Se un ordine decimale manca, sulla tavola la colonna corrispondente rimane vuota. Così per rappresentare il numero 701, si disporranno i bastoncini solamente nella colonna delle centinaia e in quella delle unità: $\text{—|} \text{—|} \text{—|}$. Passando alla rappresentazione su carta al posto di una colonna vuota rimane uno spazio. In questo modo possono però sorgere ancora ambiguità. La scrittura —| potrebbe ad esempio essere scambiata per il numero 71. L'alternanza dei simboli escluderebbe in realtà questa possibilità, poiché il simbolo del 7 nella colonna delle decine dovrebbe assumere la forma orizzontale. Non basterebbe però a escludere la possibilità che si tratti ad esempio del numero 70100, o del 70001, o di altri.

L'esigenza di poter segnalare senza ambiguità le colonne vuote anche nella rappresentazione su carta trova risposta con l'introduzione di un apposito simbolo. Si tratta di un circoletto, \circ , attestato con sicurezza a partire dal XIII secolo e con ogni probabilità derivato dal sistema posizionale indiano. Il numero 701 viene allora scritto come $\text{—|} \text{—|} \text{—|} \circ$ e il numero 119680 come $\text{—|} \text{—|} \text{—|} \text{—|} \text{—|} \text{—|} \circ$.

A partire da un sistema di registrazione delle quantità concreto, per mezzo di bastoncini, passando per una numerazione figurata, che riproduce il disegno della disposizione dei bastoncini, siamo arrivati a una numerazione scritta di tipo posizionale, coerente e completa. Un aspetto di questa scrittura, che manca alla nostra, è quello di conservare in alcuni casi un aspetto operatorio. La somma di —| con —| , ad esempio, fa —| , espresso da un simbolo che è effettivamente somma dei due simboli precedenti. Utilizzando la versione su tavola

si possono compiere in ogni caso manipolazioni più complesse, seguendo tecniche che rendono in parte automatici alcuni conteggi. Una volta immessi i dati sulla tavola, alla fine dei procedimenti di calcolo, il risultato compare scritto attraverso i bastoncini nella forma pronta per essere direttamente trascritta su carta.

2 L'aritmetica dei bastoncini cinesi

Nel corso dei laboratori vengono proposte attività ispirate all'aritmetica dei bastoncini cinesi sulla tavola di conto, introducendo anche la rappresentazione su carta.

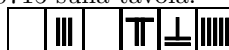
Rappresentazione e cambi



Come illustrato nel paragrafo precedente, la rappresentazione dei numeri sulla tavoletta quadrata avviene disponendo opportunamente i bastoncini all'interno dei quadrati. Per i numeri da uno a cinque si posizionano altrettanti bastoncini in un quadrato, tutti in verticale o in orizzontale. Per i numeri dal sei al nove si pongono rispettivamente uno, due, tre o quattro bastoncini in verticale o in orizzontale e un bastoncino nell'altra direzione. Così si hanno due possibili rappresentazioni:



Le unità semplici occupano nella scacchiera le caselle della colonna più a destra. I bastoncini collocati nella colonna subito a sinistra indicano invece le decine, mentre la terza colonna è riservata alle centinaia e così via. Se un ordine di grandezza manca, la colonna corrispondente rimane vuota.

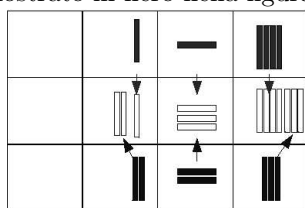
Per evitare che bastoncini di due colonne contigui si confondano, le rappresentazioni a bastoncini verticali usualmente si alternano a quelle a bastoncini orizzontali. Ecco, per esempio, il numero 30715 sulla tavola:




Nel corso dei conteggi i bastoncini vengono spostati da una casella all'altra. Se accade che in una casella si vengono a trovare delle configurazioni non ammesse, queste vanno modificate riportandole ad una di quelle previste. Se ad esempio in una casella si trovassero sette bastoncini verticali, , si provvederà ad aggiustare la configurazione sostituendo cinque dei bastoncini verticali con un bastoncino orizzontale: . Se si trovassero dieci o più bastoncini verticali, il gruppo di dieci dovrà essere rimosso e sostituito con un unico bastoncino nella casella subito a sinistra. Questo bastoncino sarà verticale se non si sta utilizzando l'alternanza, altrimenti sarà orizzontale. In una casella con disposizione verticale due bastoncini orizzontali, che hanno dunque valore 5, verranno sostituiti con un solo bastoncino nella casella subito a sinistra. Analogamente, in una casella con disposizione orizzontale, una coppia di bastoncini verticali, ciascuno con valore 5, verrà sostituita con un solo bastoncino con valore 1 nella casella subito a sinistra.

Addizioni

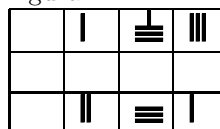
Per eseguire un'addizione fra due numeri per prima cosa si rappresentano i numeri da addizionare su due righe distinte della scacchiera. Generalmente si lascia una riga vuota intermedia. Si riuniscono poi i bastoncini dei due numeri portandoli nella riga vuota, slittandoli colonna per colonna. Se ad esempio si vuole sommare 114 con 223, si dispongono i bastoncini sulla prima e sulla terza riga, come mostrato in nero nella figura.



Si portano poi i bastoncini della prima riga sulla seconda riga, slittandoli verso il basso senza cambiare colonna. Quelli della terza riga si slittano invece verso l'alto, portandoli sempre sulla seconda riga. L'addizione è conclusa. Per leggere il

risultato può essere però necessario aggiustare la disposizione dei bastoncini. Nell'esempio considerato troveremo sette bastoncini verticali nella casella delle unità. Occorre allora rimuoverne cinque e sostituirli con un solo bastoncino orizzontale. Nella casella delle decine e delle centinaia la disposizione dei bastoncini non deve invece essere modificata. Alla fine degli aggiustamenti sulla tavola comparirà la disposizione riportata nella figura, che ci dà il risultato: .

Se in una casella si superano i nove bastoncini occorrerà sostituire un gruppo di dieci con un solo bastoncino nella casella successiva. Per eseguire ad esempio $183+231$ si dispongono i bastoncini come in figura.



Dopo lo slittamento nella riga centrale si avrà la seguente disposizione:



Cinque dei bastoncini orizzontali della casella centrale andrebbero sostituiti con uno verticale, del valore di 5, che insieme a quello verticale già presente forma una coppia di 5, coppia che si elimina sostituendola con un bastoncino unitario nella colonna subito a sinistra. Ecco dunque la configurazione finale in cui si legge il risultato.



Sottrazioni

Per eseguire una sottrazione si inizia col rappresentare il primo numero, il minuendo, sulla prima riga. Su un'altra riga, ad esempio la seconda, si rappresenta il secondo numero utilizzando i bastoncini già usati per il primo numero. Nel far ciò occorre ovviamente mantenere per ogni bastoncino la stessa colonna e lo stesso valore, distinguendo quelli da 1 e quelli da 5. Una volta completato il secondo numero, i bastoncini rimasti sulla prima riga danno il risultato.

Per eseguire ad esempio $238-116$, si rappresenta il 238 sulla prima riga:

		≡	

Per scrivere 116 si sposta ora verso il basso un bastoncino nella colonna delle centinaia, un bastoncino nella colonna delle decine, e, infine, nella colonna delle unità - dove occorre scrivere il 6 - si sposta il bastoncino orizzontale, che vale 5, e uno dei tre verticali, che valgono 1.

		=	
		-	T

Una volta completato il 116, sulla prima riga si legge il risultato: **HL**.

Nel comporre il sottraendo può accadere che in una colonna non tutti i bastoncini necessari siano immediatamente disponibili. In questo caso occorrerà eseguire un cambio. Potrà capitare di dover sostituire un bastoncino da 5 con cinque bastoncini semplici nella stessa casella, oppure di dover ricorrere alla casella adiacente a sinistra e trasformare un suo bastoncino da 1 in dieci bastoncini oppure in due bastoncini da 5 per la casella su cui si sta operando.

Per eseguire ad esempio 238-114, si rappresenta, come nell'esempio precedente, il 238 sulla prima riga. Per scrivere 114 si spostano ancora verso il basso un bastoncino nella colonna delle centinaia e un bastoncino nella colonna delle decine. Nella colonna delle unità occorre ora scrivere il 4, ossia slittare nella seconda riga 4 bastoncini verticali. La casella della prima riga ne contiene 3 che si spostano arrivando alla situazione rappresentata in figura.

		=	-
		-	

Per completare il sottraendo dobbiamo ancora mettere un bastoncino verticale nella casella delle unità. Per fare ciò si sostituisce il bastoncino orizzontale rimasto nella prima riga, che ha valore 5, con cinque bastoncini verticali:

		=	
		-	

Si può ora completare il 114 spostando in basso uno dei cinque bastoncini. Fatto ciò, sulla prima riga si legge il risultato: **H|||**.

		=	
		-	

Moltiplicazioni

Un modo concettualmente semplice di eseguire una moltiplicazione è quello di vederla come un'addizione ripetuta. Per moltiplicare ad esempio 735 per 32 si potrà eseguire la somma di 735+735+735+... per 32 volte. Alla fine otterremo il risultato. Si tratta di un modo di procedere che richiede solamente di saper eseguire le addizioni, ma che ha lo svantaggio di risultare molto lungo e, per numeri più grandi, alla fine di risultare non applicabile nella pratica.

Nei sistemi di rappresentazione posizionali alcune moltiplicazioni si eseguono immediatamente. Se il sistema è a base dieci, come quello cinese e come il nostro, moltiplicare per dieci si traduce in un semplice slittamento dei simboli. Per moltiplicare per dieci un numero qualsiasi rappresentato con i bastoncini sulla tavola, basterà ad esempio spostare i bastoncini di ogni casella nella casella adiacente verso sinistra.

Utilizzando questa osservazione la tecnica dell'addizione ripetuta può essere notevolmente abbreviata. Per moltiplicare ad esempio 735 per 32 basterà eseguire la somma delle cinque righe rappresentate sulla tavola.

	T		
	T		
T			
T			
T			

Le prime due righe rappresentano il 735, le ultime tre il 735 moltiplicato per dieci. Si è scelto di usare solamente la rappresentazione verticale per evitare confusioni nel significato dei singoli bastoncini al momento della somma colonna per colonna.

Con la tecnica appena descritta il prodotto di 7692 per 978 si riduce alla somma di ventiquattro numeri, anziché di novecentosettantotto.

Per abbreviare ancora il procedimento si può utilizzare una tecnica che richiede una maggiore abilità nel calcolo mentale e la memorizzazione delle “tabelline”, cioè dei prodotti reciproci dei numeri da 1 a 9. La somma parziale relativa a ogni ordine di grandezza viene in questo modo calcolata direttamente senza ricorrere a una somma esplicita. Si tratta essenzialmente del procedimento che usiamo noi comunemente, con qualche variante nell’ordine dell’esecuzione delle operazioni e con il vantaggio che sulla tavola somme finali e riporti sono facilitate dai bastoncini.

Vediamo come procedere nelle moltiplicazioni per numeri ad una cifra. Per moltiplicare ad esempio 237 per 6 si scriverà sulla tavola il 237 sulla terza riga e il 6 sulla prima, lasciando una riga vuota intermedia.

			T
		≡	T

Si devono eseguire ora i prodotti di 2 per 6, 3 per 6, 7 per 6, che devono essere scritti tutti su un’unica riga, quella intermedia lasciata vuota. Il primo prodotto, 12, va scritto in corrispondenza della colonna del 2:

			T
-			
		≡	T

Il secondo prodotto, 18, va aggiunto in corrispondenza della colonna del 3:

			T
-		≡	
		≡	T

L’ultimo, 42, in corrispondenza della colonna del 7:

			T
-		≡≡	
		≡	T

Per leggere il risultato si compiono infine eventuali riarrangiamenti dei bastoncini. In questo caso nella colonna delle decine cinque bastoncini orizzontali, da 1, si dovrebbero cambiare con uno verticale,

da 5, che insieme a quello già presente si elimina aggiungendo un bastoncino da 1, verticale, nella casella a sinistra.

			T
-		≡	
		≡	T

Il risultato è dunque $\overline{1422}$, 1422.

Si osservi che il procedimento equivale all’aver eseguito $200+200+200+200+200+200$, poi $30+30+30+30+30+30$ e $7+7+7+7+7+7$. Attraverso le tabelline queste somme non vengono calcolate, ma eseguite subito mnemonicamente. La scrittura dei parziali sulla stessa riga della tavola corrisponde alla somma complessiva.

Per eseguire la moltiplicazione per numeri a più cifre si eseguono successive moltiplicazioni a una cifra, come appena descritto, scrivendo i risultati parziali sulla stessa riga intermedia. La scelta della casella in cui inserire i bastoncini deve tener conto dell’ordine di grandezza del prodotto. Questo avviene attraverso delle regole di posizionamento.

Se ad esempio vogliamo moltiplicare 237 per 146, si scrive il 146 sulla prima riga e il 237 sulla terza, in modo che l’ultima sua cifra, il 7 cada nella stessa colonna della prima cifra del 146, l’1.

				≡	T
		≡	T		

Si esegue ora 237 per 1, come descritto sopra, eseguendo cioè 2 per 1, 3 per 1, 7 per 1 e posizionando i risultati in corrispondenza delle colonne del 2, del 3, del 7.

				≡	T
		≡	T		
		≡	T		

Si può a questo punto eliminare l’1 del primo fattore e si sposta il 237 di una casella verso destra. A scelta si può rispettare l’alternanza delle colonne oppure mantenere inalterata la disposizione dei bastoncini. L’alternanza andrà in ogni caso comunque rispettata nei prodotti parziali da collocare nella riga intermedia.

				≡	T
		≡	T		
		≡	≡	⊥	

Si moltiplica ora l'ultima riga per 4, eseguendo i prodotti di 2 per 4, 3 per 4, 7 per 4, e aggiungendoli nella riga intermedia in corrispondenza rispettivamente del 2, del 3, del 7.

				≡	T
		≡	≡	⊥	
		≡	≡	⊥	

Prima di procedere converrà riarrangiare i bastoncini per evitare di avere delle caselle troppo piene, invece di rimandare l'aggiustamento complessivo al passo finale. Così nella casella delle centinaia cinque bastoncini verticali vengono rimossi insieme a quello orizzontale, aggiungendo al contempo un bastoncino da 1, orizzontale, nella casella a sinistra. In questa casella cinque bastoncini orizzontali insieme a quello verticale si eliminano, aggiungendo un bastoncino da 1, verticale, nella casella a sinistra.

				≡	T
	≡	≡		⊥	
		≡	≡	⊥	

Si elimina ora il 4 dalla prima riga e, sulla terza riga, si sposta il 237 di una casella verso destra.

					T
	≡	≡		⊥	
				≡	⊥

Si esegue ora l'ultimo passo, moltiplicando il 237 per 6 e aggiungendo i tre prodotti nelle caselle corrispondenti.

					T
	≡	≡	≡	⊥	
				≡	⊥

Dopo aver riarrangiato i bastoncini, si legge il risultato: $||\equiv||$, 34602.

					T
	≡	≡	T		
				≡	⊥

Divisioni

Nonostante che l'origine dei bastoncini vada con ogni probabilità ricondotta a un rudimentale modo di contare attraverso semplici bastoncini indifferenziati, la rappresentazione dei numeri sulla tavola si è fatta ben più strutturata e simbolica. Nella loro forma più evoluta sono divenuti inadatti a operare divisioni in modo elementare, come quello di ricondurle a raggruppamenti omogenei.

La caratteristica di sistema posizionale lo rende invece adatto ad algoritmi più complessi, analogamente al nostro. La divisione di un numero per un altro si potrà allora eseguire considerando blocchi di cifre successivi, ripetendo il procedimento sugli ordini di grandezza inferiore. Come nel caso della moltiplicazione, alcune regole di posizionamento permetteranno di individuare l'ordine di grandezza dei valori trovati.

Vediamo ad esempio 167 diviso 3. Si scrive il dividendo sulla seconda riga e il divisore sulla terza. Il risultato comparirà sulla prima. Il divisore va scritto allineandolo alle colonne più a sinistra del dividendo, in modo da individuare un "pezzo" di divisore maggiore o uguale del dividendo stesso. Nel nostro esempio il 3 va in corrispondenza del 16, ossia sotto il 6. Se fosse stato 465 diviso 3, avrei dovuto allineare il 3 con il 4.

		⊥	⊥
		≡	

Divido mentalmente 16 per 3. Il risultato, 5, va scritto in alto, nella stessa colonna. Il resto, 1, va invece al posto del 16, nella riga del dividendo.

		≡	
		—	⊥
		≡	

Sposto il 3 verso destra.

		—	

Divido ora 17 per 3. Il risultato, 5, si scrive in alto, sulla stessa colonna. Il resto al posto del 17. La divisione è finita. Sulla prima riga compare il quoziente, 55. Sulla seconda riga rimane il resto, 2.

Si osservi che, diversamente da quanto accade nel nostro procedimento, le cifre del risultato compaiono già nell'ordine di grandezza definitivo. Interrompendo eventualmente il procedimento in qualsiasi punto si avrà comunque un risultato approssimato.

Vediamo ora un esempio di divisione per numeri a più cifre.

Per dividere 2605 per 12, si scrive il dividendo sulla seconda riga, come di consueto, e il divisore sulla terza in corrispondenza del 26. La divisione inizia dalla colonna più a sinistra: si esegue 2:1. Il quoziente, 2, viene messo in alto, nella stessa colonna e costituisce il primo risultato parziale.

		T	
	—		

Il resto, zero, si mette al posto del 2 del dividendo. Poi si moltiplica questo risultato parziale, ottenuto dalla divisione della prima cifra del dividendo per la prima del divisore, per la seconda cifra del divisore: 2×2 . Quel che viene, 4, lo tolgo dal 6, seconda colonna del dividendo.

	—		

Sposto ora il 12 di una casella verso destra e ripeto il procedimento di divisione con le due caselle ora occupate da 2 e 0. Ottengo come seconda cifra del risultato parziale ancora un 2 e un resto 0.

		—	

Ma quando vado a fare la differenza dovrei ora togliere 2×2 da zero, e non posso.

		—	

Procedo allora così: diminuisco di 1 la seconda casella del risultato parziale, passando da 2 a 1, e contemporaneamente aggiungo 1×1 , dove questo 1 è la prima cifra del 12, nella casella sottostante.

		—	

A questo punto la differenza deve essere fatta tra 10 e 1×2 , dunque è possibile andare avanti: metto 8 e procedo. Sposto il 12 ancora di una casella e ripeto i passi precedenti: 8 diviso 1 mi dà come terza cifra del risultato parziale 8, che però dovrò anche questa volta diminuire per poter eseguire la sottrazione.

			⊥	
			⊥	
			—	

Alla fine ottengo 217 con resto 1.

			⊥	
			—	

3 Indicazioni sui laboratori

Materiale.

Il materiale per i laboratori comprende un CD-rom in cui sono contenute delle presentazioni da proiettare durante lo svolgimento del laboratorio. Si tratta di diapositive con immagini e brevi commenti da usare per le spiegazioni e per le attività. Le presentazioni sono divise in quattro livelli: livello 0, 1, 2, 3. Il livello 0, pre-calcolo, è pensato per i piccolissimi, corrispondentemente alla sezione dei cinque anni della Scuola dell'Infanzia. I livelli 1 e 2 sono pensati per il primo e il secondo ciclo della Scuola Primaria. Il livello 3 è infine pensato per la Secondaria Inferiore (o inizi della Secondaria Superiore). I livelli costituiscono un'indicazione di massima: ogni insegnante potrà valutare se appoggiarsi al materiale di un altro livello, a seconda della classe.

Il materiale comprende inoltre delle tavole quadrate e sacchetti i bastoncini da posizionare sulla tavola. Si consiglia di suddividere i partecipanti in quattro gruppi e dotare ciascun gruppo di un set completo. Nel CD-rom si trovano anche alcune schede di lavoro da stampare.

Qui di seguito diamo alcune indicazioni su come svolgere un laboratorio, a seconda del livello scelto, appoggiandosi al materiale fornito.

Livello 0: 5 anni

L'attività prevista per il livello 0 consiste in un'introduzione all'uso della tavola. Si richiede che i bambini abbiano una certa confidenza con il conteggio con le dita delle mani, almeno fino al cinque. Per contare fino a dieci si può ripetere il conteggio fino a cinque con l'altra mano. Con le diapositive iniziali si richiama il conteggio con le dita delle mani. Si passa poi a introdurre la tavola. Ripetendo il conteggio da uno a cinque si spiega come collocare i bastoncini nelle caselle, uno per ogni dito della mano. Si procede poi nel conteggio, utilizzando anche la seconda mano e illustrando come posizionare i bastoncini corrispondenti alle dita della seconda mano e il bastoncino orizzontale che corrisponde alla mano intera. Si può a questo punto passare alla rappresentazione grafica attraverso la scheda in cui accanto alle dita colorate si disegnano i bastoncini corrispondenti. Si può poi chiedere di riprodurre le figure in un foglio bianco, senza caselle.

Le diapositive che seguono propongono degli esercizi in cui si mostrano delle dita e si chiede di posizionare sulla tavola i bastoncini corrispondenti. Ogni esercizio proposto è seguito dalla risposta. Si può anche qui chiedere di disegnare la risposta su un foglio bianco, oltre che disponendo i bastoncini sulla tavola. Il disegno dei bastoncini viene bene usando un pennarello nero a punta molto grossa, oppure un pennello e la tempera. Attraverso un'altra scheda si rimedita il conteggio fino a nove. Si chiede ora di colorare tante dita quanti sono i quadratini colorati mostrati e di disegnare i bastoncini corrispondenti nelle caselle.

Con le diapositive successive si illustra ciò che avviene una volta arrivati a dieci. Questo viene fatto attraverso un'immagine-gioco (che si può eventualmente ampliare a piacere attraverso narrazione e drammatizzazione): da dieci dita di bambino nasce un'altra entità che abbiamo raffigurato come un bambino-fantasmino. I fantasmini hanno dieci dita, che però non si vedono, e una sola testa: un bastoncino. I bastoncini dei bambini-fantasmini si mettono sulla tavola nelle caselle alla sinistra di quelle usate per le dita. Si potrà allora riprendere la prima e la seconda scheda e aggiungere la rappre-

sentazione del dieci: un bastoncino nella seconda casella.

Ogni bambino che impiega tutte e dieci le dita diventa un bambino-fantasma e il suo bastoncino va nella seconda casella. I valori mimati attraverso le dita si possono così tradurre con bastoncini sulla tavola. Alcune diapositive propongono esercizi di questo tipo, in cui compaiono mani e dita da tradurre in bastoncini. Seguono poi le risposte.

Con le ultime diapositive si propone l'esercizio inverso: si mostrano alcune configurazioni sulla tavola e si chiede ai bambini di riprodurle servendosi delle dita e impersonando fantasmini corrispondenti.

Livello 1: 6-8 anni

Nel livello 1, il più semplice in cui si affrontano i primi rudimenti di calcolo sulla tavola, si utilizza la rappresentazione con i bastoncini esclusivamente secondo la variante verticale. Con le prime diapositive si illustra come si rappresentano i numeri da uno a nove sulla tavola. I numeri si possono riprodurre graficamente su un foglio con le caselle e successivamente su un foglio bianco, usando un pennarello nero a punta grossa o un pennello e tempera nera. Si procede nel conteggio mostrando come si rappresenta il dieci e i numeri successivi. Si propongono poi facili esercizi sia di lettura che di rappresentazione (con risposte).

Con le diapositive successive si introduce l'addizione. Il primo esempio scelto è molto semplice e mira a evidenziare l'idea del semplice slittamento dei bastoncini, senza far intervenire l'aggiustamento della configurazione. Con un secondo esempio ci si estende al caso in cui alla fine degli slittamenti è necessario eseguire un riarrangiamento dei bastoncini. Come attività si propongono addizioni con cambio fra numeri a una e due cifre.

Nella parte finale si introduce la sottrazione. Nel primo esempio e negli esercizi che seguono per si riesce sempre a riprodurre il sottraendo grazie allo slittamento lungo le colonne, senza la necessità di effettuare cambi. Segue poi un esempio in cui è necessario cambiare la configurazione per poter com-

pletare il secondo numero. Si conclude con esercizi su questo modello.

Livello 2: 8-10 anni

Nel livello 2 si introducono sia la forma verticale che quella orizzontale dei bastoncini, spiegando il significato dell'alternanza. Si propongono esercizi di lettura e, a seguire, di rappresentazione di alcuni valori, fornendo le risposte per verifica.

Si illustra poi l'addizione e si propongono esercizi in cui intervengono numeri a due e tre cifre.

Con le diapositive seguenti si illustra la sottrazione. Il primo esempio scelto è molto semplice e mira a evidenziare l'idea del semplice slittamento dei bastoncini per la riproduzione del secondo numero, senza la necessità di un intervento sul primo numero. Con un secondo esempio ci si estende al caso in cui per completare il secondo numero è necessario trasformare il primo. Seguono gli esercizi con le risposte.

Si passa poi alla moltiplicazione. Si illustra la tecnica base di moltiplicazione di un numero per un numero ad una sola cifra. Seguono alcuni esercizi su questo modello. Infine le divisioni. Gli esempi proposti si limitano anche in questo caso a divisioni per numeri ad una cifra.

Livello 3: da 10 anni

È il livello più complesso, pensato per le classi della Scuola Secondaria Inferiore (o inizio della Superiore). Qui si introducono subito entrambe le rappresentazioni e si spiega il significato posizionale delle colonne della tavola. Dopo aver illustrato come posizionare i bastoncini, si propongono esercizi di lettura e, a seguire, di rappresentazione di alcuni valori. Per la rappresentazione su carta si introduce la necessità di un simbolo corrispondente al nostro zero.

Si illustra poi l'addizione e si propongono esercizi in cui intervengono numeri a più cifre.

Si illustrano poi le sottrazioni, direttamente nel caso in cui è necessario intervenire sul primo numero e modificare la disposizione dei bastoncini per

poter competere la scrittura del secondo. Seguono esercizi con risposta per verifica.

Le moltiplicazioni vengono introdotte prima con un esempio e esercizi con il secondo fattore ad una cifra. Si passa poi a moltiplicazioni a più cifre.

Infine le divisioni. Anche qui il primo esempio e gli esercizi sono a una cifra. Seguono poi divisioni a più cifre.