Laboratori sui sistemi di numerazione

Tecniche di moltiplicazione

Il Giardino di Archimede.
Un Museo per la Matematica

Tecniche di moltiplicazione

Introduzione

Il nostro modo di contare è senz'altro uno dei più potenti e completi che siano mai stati sviluppati. Ma è anche uno dei più complessi e più difficili da apprendere. Altre strategie, preliminari o alternative, altri punti di vista, più primitivi ma in alcuni casi non meno efficaci, aiutano a comprendere meglio alcuni aspetti del contare, a mettere a fuoco e superare certe difficoltà, ad afferrare meglio le potenzialità del nostro modo di contare, oltre che a scoprirne la sua storia affascinante.

In questa prospettiva sono nati i laboratori de Il Giardino di Archimede dedicati ai sistemi di numerazione, pensati per le scuole di ogni ordine e grado e dedicati ad alcuni di questi antichi modi di contare. Si tratta di attività sperimentate con le classi dai nostri operatori.

Indice

Tecniche di moltiplicazione

Gli algoritmi per le operazioni che apprendiamo a scuola non sono gli unici possibili: molti altri sono stati eleborati ed utilizzati nel corso di secoli di storia. In particolare la moltiplicazione presenta un grandissimo numero di procedimenti alternativi. Qui ne illustreremo alcuni, tutti generalmente basati, come il nostro, sulla proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma; i vari procedimenti possono presentare differenze sull'ordine di esecuzione di alcune operazioni spesso accompagnandosi ad artifici grafici che li rendono più o meno rapidi e semplici; in alcuni casi, come nella moltiplicazione all'egizia o alla russa, la scomposizione di uno dei due fattori viene eseguita secondo le potenze del due, invece che secondo quelle del dieci come accade, nascostamente, nel nostro.

In una prima parte presentiamo alcuni procedimenti di moltiplicazione che risalgono all'introduzione del sistema di numerazione indo-arabico e ai libri d'abaco e di aritmetica pratica. In una seconda parte raccogliamo altri procedimenti, di origine varia.

Moltiplicazione con sostituzione

Presso gli indiani i calcoli venivano eseguiti su tavolette ricoperte di sabbia, dove cifre e segni potevano essere facilmente cancellati e riscritti. Molti algoritmi, anche presso gli arabi, utilizzano questa caratteristica che il supporto cartaceo non ha. Esempio: 325x641. Si dispongono i fattori uno sopra l'altro come in figura. Fase 1: si inizia moltiplicando il 3 rispettivamente per 6, 4, 1, e scrivendo in alto, in corrispondenza dei secondi fattori, i risultati, eventualmente correggendo i risultati parziali se intervengono i riporti; conclusi questi prodotti si cancella il 3. Fase 2: si trasla il 641 di un posto verso destra e si procede con i prodotti del 2 per 6, 4, 1, sommando con i risultati già presenti dal passo precedente; conclusi questi prodotti si cancella il 2. Fase 3: si trasla il 641 di un posto verso destra e si procede con i prodotti del 5 per 6, 4, 1. Nella riga superiore si legge il risultato: 208325. Queste alcune delle successive fasi sulla tavoletta:

1	8		3	2	5
	6	4	1		

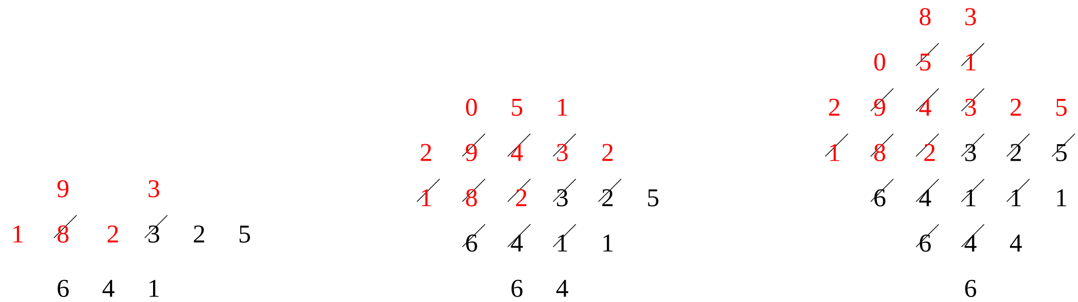
1	9	2	3	2	5
	6	4	1		

	0				
2	~~9~~	5	1		
~~1~~	~~8~~	~~2~~	~~3~~	2	5
		6	4	1	

2	0	8	3	2	5
			6	4	1

Moltiplicazione senza sostituzione

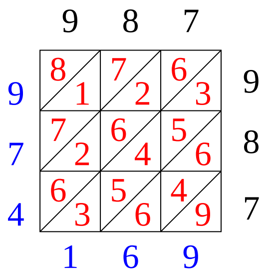
Introdotto già nei primi testi arabi (es. al-Uqlidisi ca. 950): il modo di procedere è essenzialmente lo stesso della moltiplicazione con sostituzione, ma invece di sostituire un determinato valore sovrascrivendoci, questo viene barrato e il nuovo valore si scrive vicino. Si tratta di un procedimento più adatto al supporto cartaceo, in cui rimane traccia dei vari passaggi. Esempio: 325x641. Si dispongono i fattori uno sull'altro come in figura. Fase 1: si inizia moltiplicando il 3 rispettivamente per 6, 4, 1, (barrando queste cifre via via che si sono moltiplicate) e scrivendo in alto i risultati, eventualmente correggendo i risultati parziali se intervengono i riporti; conclusi questi prodotti si barra il 3. Fase 2: si trasla il 641 di un posto verso destra e si procede con i prodotti del 2 per 6, 4, 1, sommando con i risultati già presenti dal passo precedente e scrivendo i nuovi parziali al di sopra dei vecchi; conclusi questi prodotti si barra il 2. Fase 3: si trasla il 641 di un posto verso destra e si procede con i prodotti del 5 per 6, 4, 1. Si legge il risultato: 208325. Ecco la riproduzione dei vari passi: all'inzio compariranno solamente le cifre della prima riga, a conclusione del procedimento tutte quelle che si leggono nell'ultima.



Moltiplicazione per gelosia

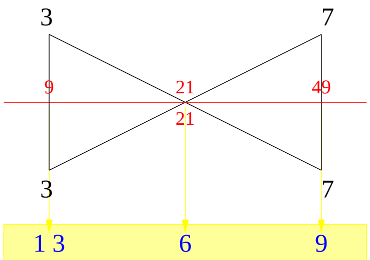
È usato dagli arabi a partire dal XIII secolo. Molto diffuso in trattati d'abaco.

Procedimento: si disegna una griglia di m quadretti per n quadretti, dove m e n sono il numero di cifre del primo e del secondo fattore. Ogni quadretto è diviso in due triangoli tracciando una diagonale. Si dispongono i due fattori attorno alla griglia (vedi figura). In ogni quadretto si inserisce il risultato del prodotto delle cifre dei fattori che identificano la riga e la colonna del quadretto stesso, ponendo le unità nel triangolo basso, le decine in quello alto. Per ottenere il risultato si somma lungo le diagonali a iniziare da destra, con eventuali riporti nella diagonale successiva. Esempio (dalla Summa di Luca Pacioli): 987x987.

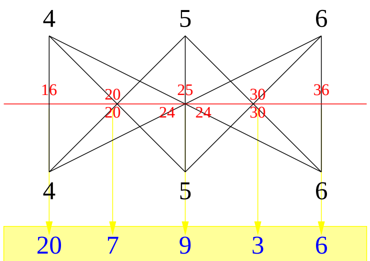


Moltiplicazione per crocetta o casella

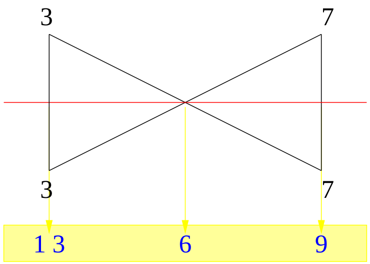
Si scrivono i due fattori incolonnati spaziando un po' le cifre; si uniscono a due a due le cifre in alto con quelle in basso: questo creerà una serie di "incroci"; si considerano le intersezioni con la linea mediana (in rosso); moltiplicando n cifre per m cifre gli incroci intersecano la linea mediana in n+m-1 punti; in corrispondenza di ciascuno di questi punti si considerano i prodotti delle cifre agli estremi dei segmenti che convergono in quel punto (in rosso nell'esempio) e si scrive sotto ogni incrocio la cifra delle unità del numero che si ottiene sommando i prodotti di quell'incrocio (in blu nell'esempio); le decine si riportano al punto successivo. Ecco un esempio (dalla Summa di Luca Pacioli): 37 per 37.

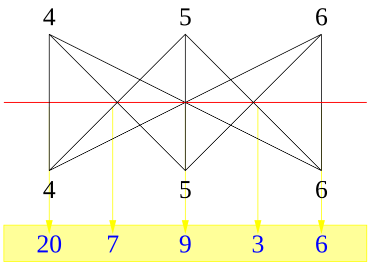


Un altro esempio dalla Summa: 456 per 456.



Si noti che nel procedimento descritto nei libri d'abaco i prodotti parziali non si scrivono: tutti i calcoli si eseguono mentalmente e si scrive direttamente il risultato. Per questo è detta anche "fulminea".

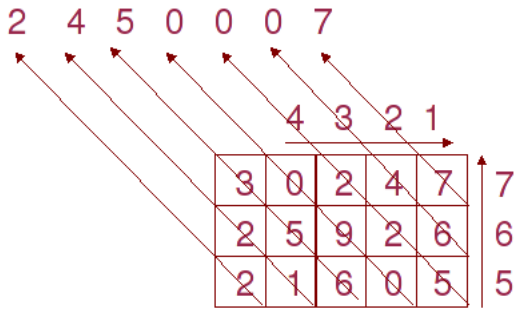




Moltiplicazione per quadrilatero

Nel Liber abaci viene presentata come alternativa più semplice ad un procedimento di tipo crocetta: "Est enim alius modus valde laudabilis, maxime in multiplicandis magnis numeris"

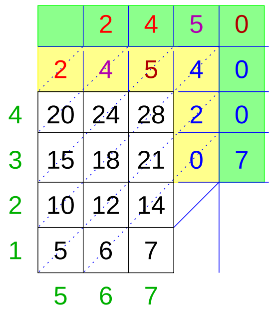
Procedimento: si disegna una scacchiera di m+1 quadretti per n quadretti, dove m e n sono il numero di cifre del primo e del secondo fattore. Si dispongono i due fattori attorno alla griglia (vedi figura). In corrispondenza di ogni quadretto si inserisce il risultato del prodotto delle cifre dei fattori che identificano la riga e la colonna del quadretto stesso, ponendo le unità nel quadrato e riportando le decine in quello alla sua sinistra. Per ottenere il risultato si sommano i quadretti lungo le diagonali (con eventuali riporti) iniziando da destra in alto, come in figura. Esempio di Fibonacci: 4321x567:



Variante della moltiplicazione per quadrilatero

Come nella moltiplicazione per quadrilatero si costruisce una scacchiera e si dispongono i due fattori intorno alla griglia (in verde). In corrispondenza di ogni quadretto si inserisce il risultato del prodotto delle cifre dei fattori che identificano la riga e la colonna del quadretto stesso, unità ed evenutali decine (in nero). I riporti si eseguono nelle somme finali che si calcolano in diagonale e si scrivono nelle fasce attorno al quadrilatero: la gialla per le decine, la verde per le unità. Nell'esempio 4321×567, iniziando da destra in basso, si riporta il numero 7 come 0 nella fascia gialla e 7 in quella verde. Poi si sommano 6 e 14 e il risultato, 20 si scrive ancora nelle due fasce. Nella somma successiva a $5+12+21$ si deve aggiungere anche il 2 della fascia gialla. Si scrive il 40 (in blu, come le somme precedenti). $10+18+28+4$ dà

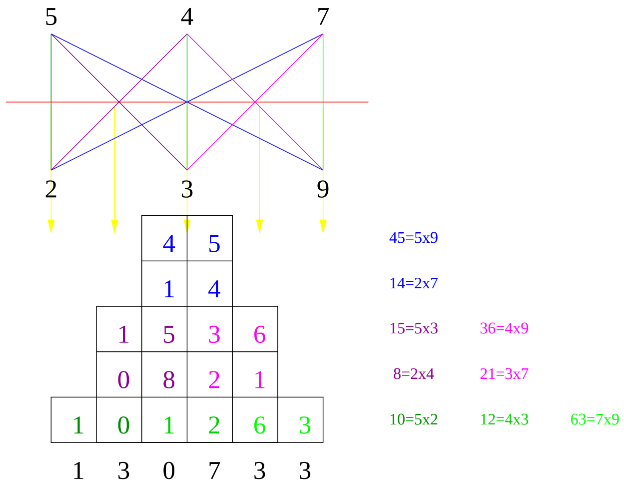
50 che inserisco ancora (in marrone) nelle fasce colorate occupando le caselle a disposizione. Proseguo con 15 + 24 + 15 scrivendo 45 (in viola) e con 20 + 4 che dà 24 (in rosso). Come ultimo passaggio riporto il 2 del 24 nella fascia verde. Qui leggo ora il risultato: 2450007.



Moltiplicazione a piramide

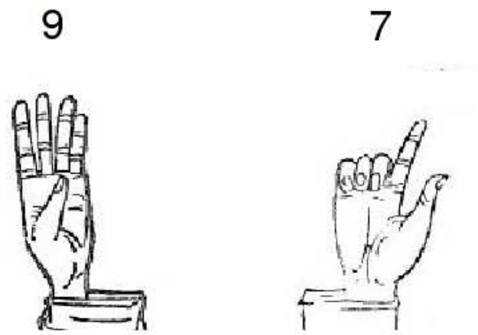
Il nome di questo algoritmo deriva dalla forma assunta dall'incolonnamento dei risultati parziali; ad ogni passo infatti si ottengono risultati parziali la cui lunghezza aumenta di due cifre e tali risultati vanno incolonnati centrati, così da ottenere una forma triangolare, ossia una "piramide". Come si vedrà è essenzialmente un procedimento a crocetta in cui però i prodotti incrociati vengono eseguiti e scritti in un ordine tale da non dover eseguire riporti, ma solo una somma finale.

Per comodità è bene pensare i due fattori con lo stesso numero di cifre (eventualmente completando con degli zeri) e scriverli uno sotto l'altro. I parziali si ottengono moltiplicando in croce cifre del primo con cifre del secondo fattore. Al primo passo ottengo due parziali di due cifre moltiplicando in croce le cifre estreme dei due fattori (la prima cifra del primo fattore con l'ultima del secondo e la prima del secondo con l'ultima del primo). Al secondo passo si ottengono due parziali di quattro cifre, il primo moltiplicando la prima e la seconda cifra del primo fattore rispettivamente (e separatamente) con la penultima e l'ultima del secondo fattore, e il secondo parziale simmetricamente moltiplicando la prima e la seconda cifra del secondo fattore rispettivamente (e separatamente) con la penultima e l'ultima del primo fattore. Al terzo passo si moltiplicaranno in croce le prime tre cifre di un fattore con le ultime cifre dell'altro e viceversa, e così si andrà avanti fino a prendere tutte le cifre del primo e del secondo, ottenendo l'ultimo parziale. Dopo aver disposto i parziali a formare in triangolo, il risultato si ottiene sommando in colonna. Nell'esempio si vede il prodotto di 547 per 239 e a destra i passi per ottenenere i parziali.



Moltiplicazione con le dita

Fin dal mondo greco-romano le mani venivano utilizzate per rappresentare numeri e aiutarsi nei conteggi. Quello che segue è un piccolo trucco che consente di ridurre la conoscenza delle tabelline al 5x5. Vediamo un esempio. Per moltiplicare 7 per 9, indichiamo su una mano le unità in eccesso del 7 rispetto al 5 e sull'altra quelle del 9 rispetto a 5. Sommiamo poi le dita alzate sulle due mani, 2 e 4, e otteniamo la cifra delle decine, cioè 6. Moltiplichiamo fra loro i due numeri che rappresentano le dita che non abbiamo alzato, cioè 3 e 1, e otteniamo la cifra delle unità del nostro prodotto, cioè 3. Questo metodo funziona per tutti i numeri compresi fra 5 e 9 (in alcuni casi dal prodotto otteremo un numero di due cifre: le decine vanno allora sommate alle decine già ottenute).



Come mai funziona? Siano a e b i due numeri da moltiplicare fra loro, entrambi compresi fra 5 e 9. Le dita alzate sono $(a-5)$ e $(b-5)$, e le dita piegate sono

$$5-(a-5)=10-a$$
$$5-(b-5)=10-b$$

Se sommiamo ora le dita alzate otteniamo le decine del prodotto:

$$(a-5)+(b-5)=a+b-10$$

Le cifre delle unità sono invece

$$(10-a)\times(10-b)=100+a\times b-(10\times(a+b)).$$

Il prodotto richiesto si può quindi scrivere

$$(a+b-10)\times 10+100+a\times b-(10\times(a+b))$$

Semplificando

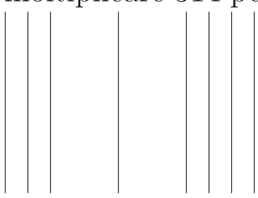
$$(a+b-10)\times 10+100+a\times b-(10\times(a+b))=$$
$$10a+10b-100+100+a\times b-10a-10b=a\times b.$$

Il procedimento si può estendere ad esempio ai numeri compresi tra 10 e 14, trovando le unità in eccesso rispetto al 10: si alzano $(a-10)$ dita su una mano e $(b-10)$ sull'altra, si sommano le dita alzate per avere la cifra delle decine e si moltiplicano fra loro le stesse dita per avere la cifra delle unità. Otteniamo in questo modo il prodotto meno 100.

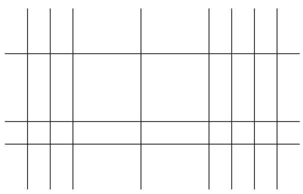
Moltiplicazione con il metodo grafico degli incroci

Il prodotto di 3×4 si può rappresentare graficamente facendo incrociare tre rette parallele tra loro con altre quattro parallele ad una seconda direzione. Il numero degli "incroci", ossia delle intersezioni, rappresenta il prodotto.

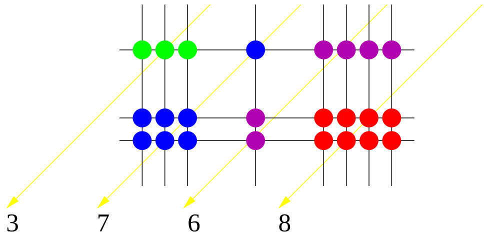
Questo metodo si può estendere ai prodotti fra numeri di più cifre. Se vogliamo ad esempio moltiplicare 314 per 12 rappresenteremo il 314 con gruppi di 3, 1, e 4 rette parallele tra loro.



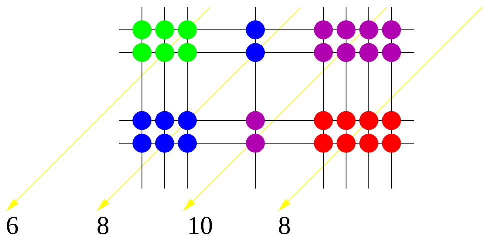
Analogamente, scelta una seconda direzione, il 12 si rappresenterà con gruppi di 1 e 2 rette parallele.



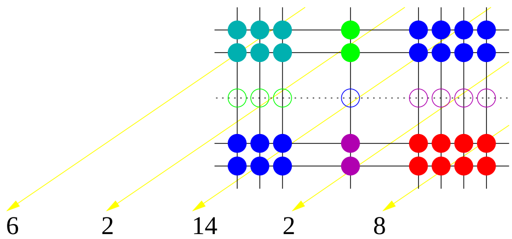
Contiamo le intersezioni. Iniziamo da quelle in basso a destra (in rosso, tra i gruppi di 4 e 2, corrispondenti alle unità): sono 8. Proseguiamo muovendoci a sinistra e in alto prendendo tutti gli adiacenti (in viola): 2 e 4 per un totale di 6. Poi 6 e 1 (in blu), totale 7. Infine 3 (in verde). Risultato: 3768.



Se gli incroci superano la decina, si deve eseguire un riporto. Se ad esempio si moltiplica 314 per 22, l'1 dei 10 incroci viola si riporta a quelli blu. Risultato: 6908.



Se uno dei due numeri contiene uno zero si deve tenerne conto per attribuire al giusto ordine decimale i vari incroci. Se ad esempio si moltiplica 314 per 201, possiamo rappresentare lo zero con una linea tratteggiata: le sue interserzioni con le altre non verranno contate, ma serviranno a assegnare i colori.



Moltiplicazione egizia

Si esegue per mezzo di raddoppi successivi. Esempio: 26×54. Si raddoppia ripetutamente l'1 fermandosi prima di superare il 26; a fianco si raddoppia il 54; a sinistra si considerano le righe con i valori che, sommati, danno 26. Il risultato si ottiene sommando nella colonna del 54 i valori corrispondenti. Totale: 1404.

	1	54	
→	2	108	←
	4	216	
→	8	432	←
→	16	864	←
		1404	

Moltiplicazione alla russa

Si esegue per mezzo di raddoppi e dimezzamenti successivi. Esempio: 83x154. Si dimezza l'83 (considerando i valori interi) e si raddoppia il 154. Si sommano le righe della colonna del 154 corrispondenti a righe dispari nella colonna dell'83. Totale: 12782

→	83	154	←
→	41	308	←
	20	616	
	10	1232	
→	5	2464	←
	2	4928	
→	1	9856	←
		12782	