QUANDO L'UOMO IMPARÒ A CONTARE

Laboratori sui sistemi di numerazione

I *calculi* degli antichi sumeri

Il Giardino di Archimede.
Un Museo per la Matematica

I *calculi* degli antichi sumeri

Introduzione

Il nostro modo di contare è senz'altro uno dei più potenti e completi che siano mai stati sviluppati. Ma è anche uno dei più complessi e più difficili da apprendere. Altre strategie, preliminari o alternative, altri punti di vista, più primitivi ma in alcuni casi non meno efficaci, aiutano a comprendere meglio alcuni aspetti del contare, a mettere a fuoco e superare certe difficoltà, ad afferrare meglio le potenzialità del nostro modo di contare, oltre che a scoprirne la sua storia affascinante.

In questa prospettiva sono nati i laboratori de Il Giardino di Archimede dedicati ai sistemi di numerazione, pensati per le scuole di ogni ordine e grado e dedicati ad alcuni di questi antichi modi di contare. Si tratta di attività sperimentate con le classi dai nostri operatori.

Scopo di questo opuscolo, dedicato al sistema di numerazione degli antichi Sumeri, è fornire agli insegnanti che desiderino riproporre le attività nelle proprie classi alcune informazioni teoriche necessarie per impadronirsi dell'argomento e una serie di suggerimenti pratici per lo svolgimento dei laboratori stessi.

Indice

1 Note storiche

Un antichissimo strumento utilizzato un po' ovunque per aiutarsi nei conteggi è costituito da semplici sassolini. Non a caso la parola "calcolo" deriva dal latino *calculus*, che significa appunto sassolino. Per contare con i sassolini le pecore di un gregge che esce dall'ovile basterà prendere un piccolo sasso per ogni pecora. Il mucchietto che viene a formarsi esprime la quantità delle pecore e serve anche a conservare il risultato del conteggio così da poter, ad esempio, controllare che la sera tutte le pecore siano tornate.

Il contare con i sassi, anche nella forma più semplice, mostra alcuni aspetti propri del nostro modo usuale e più evoluto di contare. In entrambi i casi si ha un insieme che serve da riferimento: l'insieme dei sassi nel primo caso, la sequenza astratta dei numeri "uno, due, tre, ..." nel secondo; il conteggio avviene con stesse modalità indipendentemente dalla natura di ciò che si conta; nel processo del conteggio si istituisce una corrispondenza biunivoca fra gli oggetti da contare e l'insieme di riferimento; si arriva all'espressione finale della quantità in coincidenza della fine di questo processo.

La pratica rudimentale di contare ricorrendo ai sassolini subisce un primo notevole raffinamento presso alcuni popoli del Medio Oriente dove, a un certo punto, si iniziano a confezionare in argilla piccoli oggetti da usare al posto dei sassolini raccolti in natura. Diversamente dalle pietruzze indifferenziate, ai sassolini in argilla fatti dall'uomo si potevano far assumere forme prestabilite. Si trovano così, presso i vari popoli, coni o bastoncini, biglie, dischi, coni più grandi, sfere ed altro. La possibilità di distinguere la forma permette di compiere un importante passo avanti: un sassolino non indica necessariamente una unità semplice, ma può rappresentare, a seconda della forma, unità di ordini diversi, o in altre parole, può assumere valori diversi. Gli Assiri e i Babilonesi diedero successivamente a questi piccoli oggetti per numerare il nome di *abnu*, cioè "pietra". I Sumeri li avevano designati col nome di *imna*, "pietra d'argilla". Per questo, e per la coincidenza con l'etimologia latina, li chiameremo *calculi*.

Nelle regioni della Mesopotamia, dell'Iran, della Siria e zone limitrofe alcuni di questi piccoli oggetti di grandezze e forme differenziate, a partire dalla seconda metà del IV millennio a.C., risultano racchiusi all'interno di contenitori ovoidali cavi sempre in argilla, detti bolle. Questi oggetti rappresentano il primo mezzo di registrazione concreta di diverse operazioni di contabilità, nelle società allora in piena espansione dei Sumeri e degli Elamiti. Servivano a quantificare ad esempio l'ammontare di un debito o un pagamento effettuato o la registrazione di una proprietà. La chiusura della bolla impediva una accidentale dispersione dei sassolini stessi, garantendo la conservazione della memoria del conteggio, e l'impressione sull'esterno di un sigillo conferiva al tutto un valore giuridico.

Il sistema di registrazione di una quantità tramite i sassolini inseriti nella bolla aveva il grande svantaggio che per leggere il numero ogni volta la bolla doveva essere rotta ed eventualmente poi ricomposta e sigillata di nuovo.

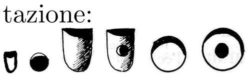
Una ricostruzione delle vicende che portano da qui alla nascita di una vera e propria forma di scrittura è basata sulle testimonianze archeologiche, particolarmente ricche e significative ad esempio nel caso della città elamita di Susa, nell'attuale Iran. A partire dal 3300 a.C., sulla parte esterna delle bolle qui rinvenute, oltre al sigillo vengono impressi dei simboli corrispondenti ai diversi *calculi* racchiusi all'interno, come una sorta di riassunto o di simbolizzazione grafica del contenuto di ciascun documento contabile. Le bolle però a questo punto sono divenute inutili e poco dopo vengono rimpiazzate da pani d'argilla pieni di forma tondeggiante o allungata che si fa poi sempre più schiacciata e regolare: le prime tavolette. Su queste venivano impresse le stesse informazioni che comparivano sull'esterno delle ultime bolle, ossia i simboli dei *calculi*, all'inizio servendosi degli stessi *calculi*, poi riproducendo le loro forme con degli appositi stili.

La prima forma di scrittura simbolica di un numero appare così essere il "disegno" dell'oggetto materiale che lo rappresenta, discendente diretto dell'insieme di sassolini.

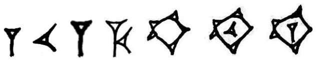
I vari popoli utilizzavano *calculi*, e di conseguenza segni, con forme e valori diversi, anche se in parte ricorrenti. Alla fine del IV millennio ad esempio gli Elamiti disponevano di un sistema contabile basato su unità di diverso ordine a forma di bastoncino, di biglia, di disco, di piccolo cono, di grande cono perforato. Questi *calculi* e i loro segni corrispondevano rispettivamente a 1, 10, 100, 300 e 3000 unità semplici.

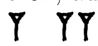
I Sumeri avevano invece come unità di conto il piccolo cono, la biglia, il grande cono, il grande cono perforato, la sfera e la sfera perforata. I valori relativi corrispondevano rispettivamente a 1, 10, 60 (la grande unità), 600, 3600 e 36000.

Nella forma di scrittura sumerica arcaica, o curviforme, i segni venivano impressi sulle tavolette usando due stili di sezione circolare e diametro diverso (circa 4 e 10 millimetri) che usati perpendicolarmente o inclinati permettevano di riprodurre tutte le forme dei *calculi* ; con la parte appuntita si tracciavano poi gli altri segni pittografici. Nel periodo più antico, attorno al 3200 a. C., le forme avevano generalmente il seguente aspetto e orientazione:



Nel 2700-2600 a.C. circa lo stilo cambia forma: l'estremità è tagliata in modo da avere un tratto rettilineo con cui si imprimono segni a forma di cuneo. Il cambimento dà origine alla scrittura cuneiforme, con la graduale stilizzazione dei segni. I simboli dei numeri assumono allora un aspetto differente, e si aggiunge un simbolo con valore pari a 36000×6, ossia 216000:



Vari secoli dopo, attorno al XIX secolo a. C., a partire da questa antica numerazione sumera, gli scienziati babilonesi creano un sistema di scrittura basato sui soli simboli  e . Il primo simbolo, oltre al valore 1, poteva rappresentare anche il 60. L'1 e il 60 fin dalle origini presentano la stessa forma, ma anticamente si distinguono per la dimensione. Ora il simbolo diviene unico e per distinguere i valori ci si basa sul contesto o sulla posizione. Il numero 62, ad esempio, si rappresenta con la scrittura , in cui il primo cuneo indica una sessantina, ossia una unità di ordine superiore e gli altri due cunei le unità semplici. In modo analogo si possono aggiungere gruppi di segni da riferire a sessantine di sessantine e così via per potenze del 60 sempre crescenti. Così la scrittura  si può leggere come un 3600, cioè 60×60, più 12 sessantine, più ventuno unità semplici, cioè 3600+12×60+21=4341.

La comparsa delle prime tavolette e delle prime forme di scrittura coincide con la scomparsa delle bolle, ma non coincide con quella dei *calculi.* Questi continuano a ritrovarsi, sciolti, nei vari siti archeologici insieme alle tavolette contabili scritte con cifre arcaiche, fino alla fine del III millennio quando le stesse cifre arcaiche si fanno sempre più rare per essere definitivamente soppiantate dalle cuneiformi.

La convivenza dei *calculi* con le cifre arcaiche indica con ogni verosimiglianza che, sebbene non più usati per la memorizzazione dei valori, essi continuavano a svolgere il proprio ruolo nell'esecuzione dei conti.

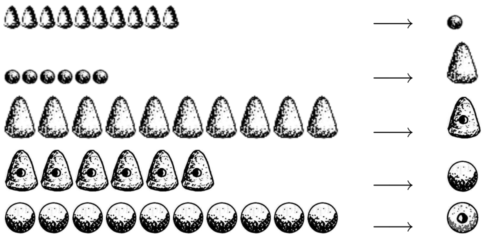
2 La tecnica dei calculi sumeri

Nel corso dei laboratori vengono proposte attività ispirate a tecniche di conteggio con i *calculi* del tipo usato dagli antichi Sumeri, che descriveremo ora più in dettaglio.

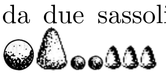
Rappresentazione e cambi

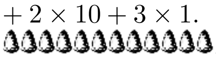
Nel sistema completo si utilizzano *calculi* di sei forme diverse: il piccolo cono, la sferetta, il grande cono, il grande cono perforato, la sfera e la sfera perforata.

I valori di questi *calculi* sono crescenti secondo una scala che procede per 10 e per 6 alternativamente. Ci vogliono cioè 10 sassolini del primo tipo per fare un sassolino del secondo tipo, 6 sassolini del secondo tipo per fare un sassolino del terzo, 10 sassolini del terzo per un sassolino del quarto, 6 del quarto per uno del quinto, 10 del quinto per uno del sesto.



In altre parole i sassolini e i loro segni hanno valori corrispondenti a 1, 10, 60, 600, 3600 e 36000.

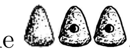
I valori dei *calculi*, o dei loro segni, si sommano. Così , cioè tre conetti presi insieme, rappresentano il numero tre. , rappresenta invece complessivamente il numero ventuno, formato da due sassolini da dieci e un sassolino da uno.  corrisponde al nostro 3683, dato da $1 \times 3600 + 1 \times 60 + 2 \times 10 + 3 \times 1$.

Dodici conetti, , rappresentano il numero dodici, ma lo stesso dodici si rappresenta meglio sostituendo dieci conetti piccoli con una sola sferetta piccola, ossia in totale con una sferetta e due conetti:  . Si è eseguito in questo caso un "cambio", ossia la sostituzione di un gruppo di *calculi* con un solo *calculo* di forma diversa e di valore equivalente, secondo la scala ricordata sopra. Attraverso i cambi si riduce il numero di *calculi* impiegati per rappresentare un dato valore, si rende la sua rappresentazione più compatta e significativa anche a colpo d'occhio. Nel verso opposto si ha la "spicciolatura" di un sassolino in più sassolini di valore inferiore. I cambi costituiscono la base fondamentale nell'impiego dei *calculi* e intervengono nelle varie tecniche operatorie. Nel caso dei *calculi* sumeri si deve ricordare l'alternanza dei raggruppamenti in insiemi ora di 10 ora di 6.

Addizioni

Il sistema di rappresentazione dei valori attraverso i *calculi*, o i loro segni, è un sistema additivo. Come in ogni sistema di rappresentazione additivo l'operazione di addizione risulta particolarmente semplice. Per addizionare due o più valori basterà infatti mettere insieme i simboli di ciascuno degli addendi. Nel caso dei *calculi*, se dobbiamo addizionare due numeri, basterà unire i due gruppi di sassolini che rappresentano i due numeri. L'addizione è compiuta in questo stesso gesto dell'unione dei sassolini. I sassolini messi insieme mi indicheranno complessivamente il valore risultato dall'addizione. Ad esempio volendo sommare  con , si otterrà .

L'addizione dunque in un certo senso "si fa da sé", grazie al modo di rappresentazione. Perché il risultato compaia nella forma migliore, ossia impiegando meno *calculi* possibile, sarà a volte necessario aggiustare la scrittura sostituendo gruppi di sassolini con un solo sassolino di valore superiore, ossia compiendo un cambio.

Nel sommare ad esempio  con  si otterrebbe in prima battuta . Sostituendo poi dieci coni con un solo cono forato, il risultato si riscrive come .

Sottrazioni

La sottrazione fra due numeri si può eseguire nel seguente modo. Si costruisce un primo mucchio di sassolini che rappresenta il numero di partenza, ossia il minuendo. Si forma il numero da sottrarre, ossia il sottraendo, in un secondo mucchio di sassolini attingendo, per fare ciò, ai sassolini del primo mucchio. Quando il secondo mucchio è completato, i sassolini rimasti nel mucchietto di partenza danno il risultato.

Se ad esempio vogliamo eseguire  meno , si prepara il primo mucchietto con una pallina e cinque conetti, poi si fa un secondo mucchietto con quattro conetti, prendendoli dal primo mucchietto. Si va ora a vedere quali sassolini sono rimasti nel primo mucchietto; questi danno il risultato: .

Può capitare che nel mucchietto di partenza non vi siano tutti i sassolini necessari ad esprimere il secondo. In questo caso occorrerà "spicciolare" un sassolino di ordine superiore e procedere come sopra.

Ad esempio, se vogliamo sottrarre da , prepariamo il mucchio di sei coni grandi. Da questo, per formare il sottraendo, prendiamo quattro coni grandi. A questo punto abbiamo allora che nel primo mucchio sono rimasti due coni grandi: , mentre nel secondo abbiamo . Per completare il sottraendo abbiamo bisogno ancora di aggiungere una pallina al secondo mucchio. Questa però non è immediatamente disponibile nel primo mucchio. Dobbiamo allora sostituire uno dei due coni grandi del primo mucchio con le sei palline che gli equivalgono. Abbiamo ora nel primo mucchio e nel secondo . Spostiamo una pallina dal primo al secondo mucchio ed avremo completato il sottraendo. I sassolini rimasti nel primo mucchio indicano il risultato: .

Moltiplicazioni

Un modo concettualmente molto semplice di eseguire una moltiplicazione è quello di ridurla ad addizione ripetuta. Si può allora iniziare rappresentando il numero da moltiplicare e poi ripetendo ogni sassolino di questo mucchietto tante volte quante il numero per cui si vuole moltiplicare; alla fine si compiono gli eventuali cambi.

Ad esempio, se vogliamo moltiplicare per quattro costruiremo un secondo mucchietto in cui ogni sassolino del primo è ripetuto quattro volte, metteremo cioè quattro coni grandi, quattro palline e ancora quattro palline: . Avremo così ottenuto il risultato.

Molto spesso sarà necessario operare dei cambi per aggiustare la forma finale del risultato. Se ad esempio devo moltiplicare per 2 ottengo ; sostituendo sei sferette con un solo cono grande, il risultato è dato da .

Per sveltire il procedimento, soprattutto quando i numeri in gioco sono piuttosto grandi, si possono impiegare vari accorgimenti. Facendo riferimento alle forme dei sumeri, osserviamo ad esempio che per moltiplicare un cono grande per dieci basta sostituirlo con un cono forato, per moltiplicarlo per sessanta basta sostituirlo con una sfera grande, per moltiplicarlo per seicento, cioè 10×6×10, basta sostituirlo con una sfera grande forata. In altre parole alcuni dei sassolini possono essere moltiplicati immediatamente per 10, e anche per 6×10, 10×6×10, 6×10×6×10, altri per 6 e anche per 10×6, 6×10×6:

$$\xrightarrow[\times 10]{} \quad \xrightarrow[\times 6]{} \quad \xrightarrow[\times 10]{} \quad \xrightarrow[\times 6]{} \quad \xrightarrow[\times 10]{}$$

Quando dobbiamo moltiplicare un dato numero per un altro, converrà allora osservare come questo secondo numero si può comporre in somme di 6, 10 o loro prodotti. La scomposizione più utile dipenderà dai *calculi* del numero di partenza che sto moltiplicando.

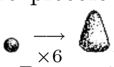
Ad esempio, se voglio moltiplicare per 12 , due coni grandi e una sfera piccola, posso procedere così. Iniziamo dai coni grandi. Come già detto, questi si moltiplicano facilmente per 10: $\xrightarrow[\times 10]{}$. Dunque mi conviene spezzare 12 in 10+2 ed eseguire la moltiplicazione in due parti: moltiplico i coni prima per 10, poi per 2. Per moltiplicare per 10 prendo un cono forato per ogni cono di partenza; per moltiplicare per due prendo due coni uguali a quelli di partenza per ognuno dei coni di partenza.

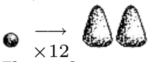
$\xrightarrow[\times 10]{}$

$\xrightarrow[\times 2]{}$

Mettendo insieme i due risultati parziali ottengo il prodotto dei due coni per 12:

$\xrightarrow[\times 12]{}$

Le sfere piccole invece si moltiplicano facilmente per 6: . Dunque mi conviene spezzare 12 in 6+6. Per ogni sfera di partenza prendo allora un cono grande (ed ho moltiplicato per sei) e ancora un cono grande (ed ho moltiplicato di nuovo per sei):



Il risultato si legge mettendo insieme tutti i *calculi*, eventualmente dopo aver fatto i cambi. Nel nostro esempio otteniamo due coni forati e sei coni grandi.

Andando a tradurre i valori abbiamo che 130 per 12 fa 2×600+6×60, ossia 1560.

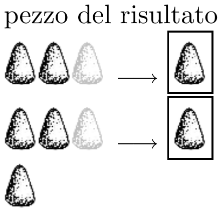
Divisioni

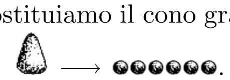
La divisione è una operazione di grande importanza nella vita sociale e ricorre spesso in antichissime tavolette. In una di queste (2650 a. C. circa) compare ad esempio la divisione di 1152000 misure di orzo in 7 parti.

Utilizzando i *calculi* la divisione si può effettuare suddividendo il mucchio di *calculi* che rappresenta il numero di partenza in tanti mucchi uguali, ossia riproducendo quell'operazione di distribuzione delle risorse che rappresenta una delle motivazioni primarie della divisione. Finché il divisore è abbastanza piccolo, dell'ordine della decina, la divisione si esegue piuttosto facilmente anche con dividendi molto grandi, come nel caso della tavoletta con la distribuzione delle misure d'orzo.

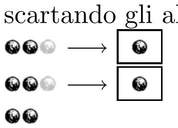
Vediamo con un esempio più semplice come procedere concretamente. Vogliamo dividere  in tre parti. Il procedimento prescrive di formare tante file di tre sassolini uguali, iniziando da quelli di valore più alto:

Otteniamo due file complete; avanza poi un cono grande. Prendiamo un rappresentante per ogni fila completa e lo mettiamo da una parte: è un primo pezzo del risultato:



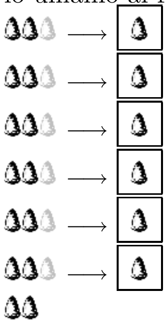
I *calculi* rimasti nelle file complete non entrano più nel procedimento e si possono eliminare. Per proseguire la divisione si prendono invece i *calculi* avanzati dalla disposizione in file, cioè tutti quelli con cui non è stato possibile completare una fila, e si cambiano con opportuni *calculi* di valore inferiore. Nel nostro caso sostituiamo il cono grande avanzato con sei palline: . Se nel mucchio di partenza vi erano alcune palline le uniamo a queste ottenute dallo spicciolamento. Nel nostro caso abbiamo in tutto otto palline. Su queste ripetiamo il procedimento della disposizione in file da tre:

Di nuovo prendiamo un rappresentante per ogni fila completa e lo aggiungiamo al risultato parziale, scartando gli altri sassolini.



Proseguiamo ora la divisione prendendo i *calculi* avanzati dalla disposizione in file, ossia le due palline che non formavano una fila completa. Le cambiamo in sassolini di valore inferiore, cioè sostituiamo ciascuna pallina con dieci coni piccoli. Nel mucchio di partenza non c'erano altri coni piccoli e dunque abbiamo ora venti coni piccoli da disporre in file di tre:

Dalle file complete prendiamo un rappresentante e lo uniamo al risultato.



Essendo arrivati al sassolino di valore minimo, la divisione si ferma. Il mucchietto di *calculi* composto dai risultati parziali dà il quoziente. Nel nostro caso questo è formato da due coni grandi, due palline e sei coni piccoli: . I due coni piccoli avanzati all'ultimo passo mi danno il resto. Traducendo i valori, abbiamo diviso 440 per tre, ottenendo 146 con il resto di 2.

3 Indicazioni sui laboratori

Materiale. Il materiale per i laboratori comprende un CD-rom in cui sono contenute delle presentazioni da proiettare durante lo svolgimento del laboratorario. Si tratta di diapositive con immagini e brevi commenti da usare per le spiegazioni e per le attività. Le presentazioni sono divise in quattro livelli: livello 0, 1, 2, 3. Il livello 0, pre-calcolo, è pensato per i piccolissimi, corrispondentemente alla sezione dei cinque anni della Scuola dell'Infanzia. I livelli 1 e 2 sono pensati per il primo e il secondo ciclo della Scuola Primaria. Il livello 3 è infine pensato per la Secondaria Inferiore (o inizi della Secondaria Superiore). I livelli costituiscono un'indicazione di massima: ogni insegnante potrà valutare se appoggiarsi al materiale di un altro livello, a seconda della classe.

Il materiale comprende inoltre sacchettini contenenti i *calculi* delle varie forme e una bolla aperta da utilizzare per mettervi i risultati degli esercizi proposti. Sono inclusi due stili per la scrittura su tavoletta, mentre non è inclusa la plastilina da utilizzare come supporto. Si consiglia di suddividere i partecipanti in quattro gruppi e dotare ciascun gruppo del materiale.

Qui di seguito diamo alcune indicazioni su come svolgere un laboratorio, a seconda del livello scelto, appoggiandosi al materiale fornito.

Livello 0: 5 anni

Si richiede che i bambini sappiano contare fino a cinque con le due mani. Con le prime diapositive si introduce il sassolino conico. Attraverso la corrispondenza di un cono con un dito della mano si arriva a contare fino a dieci, ripetendo i sassolini. Per aiutarsi in questo ci si può servire di uno schema composto dalle due mani e da dieci quadrati, uno per dito. Questo schema si può stampare dal CD (**scheda 0**) o far costruire ad ogni bambino con l'impronta della propria mano e incollando un quadrato per dito. Inizialmente si può usare solo metà schema, cioè una sola mano; per questo basta piegare il foglio e servirsi di una sola faccia. Si propongono poi alcuni numeri con le dita e si chiede di rappresentarli con i sassolini. Per sottolineare la compiutezza del risultato si chiede ai gruppi di inserire i sassolini opportuni dentro la bolla. I primi numeri non vanno oltre il cinque, gli altri sono compresi tra cinque e dieci.

Si osserva che arrivati a dieci, quando tutte le dita delle due mani sono finite, succede un passaggio importante: dieci coni "si trasformano" in una palla. Un modo per rafforzare quest'idea, come suggerito dalle diapositive, è raccontare che da dieci dita nasce un fantasmino. Il fantasmino ha, come tutti i bambini, dieci dita e una testa, ma testa e dita non si possono vedere insieme; normalmente del fantasmino si vede solo la testa: la sfera.

Con le diapositive successive si introduce il "cambio". Questo si può fare spiegando che a volte i fantasmini ci sono, ma rimangono nascosti fra le dita, senza che ci facciano vedere la testa; ma se troviamo e mettiamo insieme tutte le dita di un fantasmino, possiamo dargli la sua testa. Per fare ciò possiamo aiutarci con lo schema delle due mani e i dieci quadrati: se si riempiono tutti si è trovato un fantasma. Lo schema serve allora da "acchiappa-fantasmi". Seguono alcuni esercizi da far eseguire ai gruppi in cui si danno un insieme di coni e si invita a mettere nella bolla la forma corretta, in cui evenutuali gruppi di dieci conetti sono sostituiti da altrettante sfere. Per far riprodurre più facilmente gli insiemi di coni da trasformare, si possono stampare i disegni e chiedere di posizionare un cono su ogni cono disegnato.

Si propongono poi alcuni esercizi in cui dalla rappresentazione con le dita fatta dai bambini si passa ai sassolini. Si ricordi che se ci sono dieci dita, cioè due mani intere, allora c'è un fantasmino, di cui si vede la testa. Viceversa, dati dei sassolini si chiede poi a un gruppo di bambini di rappresentarli con dita e mani intere. Qui dove compare la testa di un fantasmino si devono ora far vedere tutte le sue dita, cioè due mani intere.

La parte finale delle diapositive riguarda la scrittura su tavoletta, nella versione primitiva e in quella con i bastoncini. Dopo aver introdotto la tavoletta, ogni bambino o ogni gruppo dovrà realizzare la sua, si spiega come un numero fatto da un gruppo di sassolini si può scrivere sulla tavoletta semplicemente facendo l'impronta di ogni sassolino. Si propone qualche semplice esercizio di lettura e scrittura su tavoletta. Si mostra poi come impronte molto simili si possono ottenere scrivendo con dei bastoncini. Seguono semplici esercizi di scrittura su tavoletta: mucchi, sacchi e bambini sono proposti nelle diapositive; se ne potranno aggiungere altri eventualmente inventando un segno pittografico per indicare di quali oggetti si sta esprimendo la quantità.

Tutta l'attività può essere svolta seguendo il filo conduttore di una storia inventata, che in parte includa alcuni passaggi dello sviluppo storico del sistema sumero. Si può allora raccontare ad esempio la storia di un bambino sumero di tanto tempo fa, quando ancora non si sapeva bene come contare. Questo bambino un giorno decide di costruirsi tante piccole dita di argilla, per non dover contare con le mani e ogni volta che la mamma gli chiede di andare a procurarsi un certo numero di oggetti, lui mette i sassolini nella sua bolla. Quando i sassolini sono tanti nella bolla non entrano più e diventa sempre più difficile tenerli insieme senza perderli. Ma un giorno, in sogno, gli appare il fantasmino. Anche la scrittura su tavoletta può essere inclusa nella storia: a un certo punto il nostro bambino pensa a come fare per non doversi portare dietro i sassolini, rischiando comunque di perderne qualcuno o dovendo ogni volta chiudere e poi rompere la bolla, e così inventa la tavoletta.

Livello 1: 6-8 anni

Nelle attività di questa fascia di età si utilizza il sistema dei *calculi* sumeri in una forma incompleta, limitandosi ai valori 1, 10, 60. Con le prime diapositive si spiega come contare fino a dieci e come far intervenire il sassolino sferico per rappresentare i numeri da dieci in poi. Si propongono poi esercizi in cui si chiede di realizzare con i sassolini alcuni numeri con conetti e sferette (ad es. 13, 35, 44). Si riprende poi il cono da 60 e si aggiungono (eventualmente) esercizi più difficili in cui interviene anche questo sassolino (ad es. 62, 80, 73). Seguono esercizi in cui viceversa si mostrano gruppi di sassolini e si chiede di che numero si tratta; anche in questo caso nei primi compaiono solo conetti e sferette, negli ultimi anche il cono grande. Si può a questo punto spiegare che cosa era la bolla. La bolla servirà nel seguito del laboratorio come contenitore per le risposte agli esercizi proposti. Con le diapositive successive si spiega il "cambio": un gruppo di dieci conetti si sostituisce con una sola sferetta. Seguono alcuni esercizi in cui si mostra un gruppo di sassolini e si chiede di mettere nella bolla lo stesso valore impiegando meno sassolini possibile; ad esempio invece dei tredici conetti mostrati dalla diapositiva, si mettono nella bolla tre conetti e una sferetta, per un valore pari ancora a tredici. Si spiega poi come eseguire un'addizione, unendo e poi mettendo nella bolla i sassolini dei due numeri da sommare. Il primo esempio, molto semplice, non prevede il cambio. Nel secondo esempio invece i conetti complessivi sono più di dieci e dunque, prima di mettere il risultato nella bolla, occorre eseguire un cambio, sostituendo dieci conetti con una sfera. Si propongono alcune addizioni, le prime senza cambio, le successive con cambio; l'ultima prevede il cambio di sei sferette con un cono grande. Si spiega poi come eseguire la sottrazione componendo il primo numero e formando il secondo servendosi dei sassolini del primo; il risultato va dentro la bolla. La sottrazione illustrata non richiede il cambio, e così gli esercizi che seguono. Segue la spiegazione di una sottrazione che richiede un cambio per essere portata a termine, e di seguito i relativi esercizi. Le ultime diapositive illustrano come passare alla scrittura su tavoletta. Si consiglia di procedere in due fasi, seguendo quello che è stato lo sviluppo storico. Nella prima fase la scrittura sulla plastilina si fa premendo direttamente con i *calculi* sulla plastilina, in modo che lascino la loro forma riconoscibile (il cono dovrà essere sdraiato e la sfera forata dovrà essere posizionata in modo che anche il foro lasci la sua traccia); nella seconda fase si scrive servendosi dei due stili a sezione circolare, uno più largo, l'altro più sottile: la forma corripondente al cono si ottiene allora con lo stilo più largo opportunamente inclinato, quella della sfera tenendo lo stilo perpendicolare alla tavoletta, quella della sfera forata aggiungendo un'impronta con lo stilo sottile. Si può richiedere che le risposte agli esercizi già proposti o ai successivi vengano date con questi metodi di scrittura. La scrittura su tavoletta può essere introdotta nel momento del laboratorio che si ritiene più opportuno, anticipandola ad esempio all'addizione o alla sottrazione. Una volta introdotta si potrà chidere di fornire le risposte ad esercizi già fatti servendosi della tavoletta invece che dei sassolini. Si potranno ad esempio riproporre gli esercizi sulla scrittura di numeri, oppure, se si è introdotta la scrittura su tavoletta prima dell'addizione o della sottrazione, si potrà chidere di scrivere i risultati dei relativi esercizi sulla tavoletta, invece che riporre il gruppo finale di sassolini nella bolla.

Livello 2: 8-10 anni

Nelle attività rivolte a questa fascia di età si usa il sistema dei *calculi* sumeri limitandosi ai valori 1, 10, 60 e 600, cioè il cono e la sfera piccoli, il cono grande e il cono forato. Attraverso le prime diapositive si illustra il funzionamento della rappresentazione proponendo inizialmente esercizi sulla composizione di alcuni valori e, viceversa, sul riconoscimento. Si passa poi al funzionamento del cambio, con esercizi relativi che coinvolgono sia i conetti che le sfere che i coni grandi. Si suggerisce di servirsi della bolla per riporre i risultati via via elaborati. Con le diapositive successive si spiega come eseguire un'addizione; l'esempio scelto prevede l'esecuzione di un cambio per arrivare alla forma finale del risultato. Anche negli esercizi proposti, ad eccezione del primo, è necessario eseguire il cambio per arrivare alla forma finale del risultato. Si suggerisce anche qui di far riporre il risultato finale nella bolla. Si spiega poi come eseguire una sottrazione componendo il primo numero e formando il secondo servendosi dei sassolini del primo; nell'esempio scelto, per poter portare a termine il secondo numero, è necessario eseguire un cambio. Seguono gli esercizi relatici alla sottrazione. Si introduce poi la scrittura su tavoletta con gli stili. Per riprodurre le forme dei quattro sassolini occorrono due stili di sezione diversa, da usare da soli o combinati nelle varie inclinazioni. Una volta introdotta la scrittura su tavoletta, si può chiedere di trascrivere su questa il risultato finale degli esercizi che seguono. Nota: le operazioni si eseguono sempre comunque con i sassolini; è solo il risultato finale che eventualmente si può scrivere sulla tavoletta, invece che esprimere mettendo i sassolini nella bolla. Le diapositive che seguono illustrano l'esecuzione di una moltiplicazione, secondo la tecnica più semplice: ogni sassolino di partenza viene ripetuto tante volte quanto indica il numero per cui si vuole moltiplicare; alla fine si eseguono gli eventuali cambi per ridurre il risultato alla forma più compatta. Si propongono poi alcune moltiplicazioni da eseguire. Le ultime diapositive spiegano come eseguire una divisione, formando gruppetti di tanti sassolini quanti il numero per cui si deve dividere e scegliendo un rappresentante, da mettere via via nella bolla, da ogni gruppetto completo. Seguono gli esercizi relativi.

Livello 3: da 10 anni

È il livello più complesso, pensato per le classi della Scuola Secondaria Inferiore (o inizio della Superiore). Qui si utilizza il sistema completo dei *calculi* sumeri, con i valori 1, 10, 60, 600, 3600, 36000. Con le prime diapositive si introducono i sei valori e si propongono gruppi di sassolini di cui si chiede di tradurre il valore. Dopo gli esercizi sulla rappresentazione si introduce il cambio, a gruppi di 10 o di 6 a seconda dei sassolini. Seguono diapositive in cui si mostrano mucchi di sassolini che vanno ridotti mediante un cambio. Si suggerisce almeno inizialmente di riprodurre effettivamente i mucchi con i sassolini, di fare le sostituzioni e di mettere la forma finale del numero dentro la bolla. Si spiega poi come fare un'addizione, unendo i sassolini dei due numeri da sommare e eseguendo un cambio per arrivare alla forma finale del risultato. Si propongono alcune addizioni da eseguire, in cui intervengono cambi su tipi diversi di *calculi*. Segue un esempio di sottrazione, in cui è necessario eseguire due spicciolamenti. Dopo la spiegazione si trovano alcuni esercizi proposti, da far eseguire ai partecipanti. La moltiplicazione viene presentata nella forma più complessa: invece che come semplice ripetizione, per sveltire il procedimento si sfruttano i valori speciali 6 e 10; si cerca allora di spezzare il secondo fattore in modo opportuno, così da realizzare immediatamente almeno parte della moltiplicazione, e completando eventualmente il resto. Seguono esercizi da eseguire in modo analogo. Si spiega infine la divisione, con la tecnica del raggruppamento. Seguono alcuni esercizi relativi.

Fra le attività di questo livello non è previsto il lavoro di scrittura su tavoletta. L'insegnante che giudichi opportuno introdurre anche questo tipo di attività potrà appoggiarsi alle diapositive del livello precedente. Un'alternativa è quella di introdurre la scrittura cuneiforme sumera (vedi **Note storiche**) e chiedere di trascrivere i risultati su carta con quei simboli.