QUANDO L'UOMO IMPARÒ A CONTARE

Laboratori sui sistemi di numerazione

Le tavole di conto

Il Giardino di Archimede.

Un Museo per la Matematica

Le tavole di conto

Introduzione

Il nostro modo di contare è senz'altro uno dei più potenti e completi che siano mai stati sviluppati. Ma è anche uno dei più complessi e più difficili da apprendere. Altre strategie, preliminari o alternative, altri punti di vista, più primitivi ma in alcuni casi non meno efficaci, aiutano a comprendere meglio alcuni aspetti del contare, a mettere a fuoco e superare certe difficoltà, ad afferrare meglio le potenzialità del nostro modo di contare, oltre che a scoprirne la sua storia affascinante.

In questa prospettiva sono nati i laboratori de Il Giardino di Archimede dedicati ai sistemi di numerazione, pensati per le scuole di ogni ordine e grado e dedicati ad alcuni di questi antichi modi di contare. Si tratta di attività sperimentate con le classi dai nostri operatori.

Scopo di questo opuscolo, dedicato alle tavole di conto, è fornire agli insegnanti che desiderino riproporre le attività nelle proprie classi alcune informazioni teoriche necessarie per impadronirsi dell'argomento e una serie di suggerimenti pratici per lo svolgimento dei laboratori stessi.

Indice

1 Note storiche

Un antichissimo strumento utilizzato un po' ovunque per aiutarsi nei conteggi è costituito da semplici sassolini. Non a caso la parola "calcolo" deriva dal latino *calculus*, che significa appunto sassolino. Prendendo un sasso per ogni oggetto da contare viene a formarsi un mucchio che rappresenta la quantità degli oggetti. Unendo, spostando, raggruppando sassolini si possono eseguire materialmente alcune operazioni aritmetiche. I sassi dunque possono servire per rappresentare e registrare alcune quantità e per operare con esse.

Quando i numeri in gioco sono piuttosto grandi l'utilizzo rudimentale dei sassi diviene poco efficace. Un grande mucchio di sassi, che non si riesce a valutare ad occhio, non è di per sè immediatamente significativo: per conoscere la quantità, ad esempio, si deve comunque contare il mucchio. Anche nelle operazioni i sassi troppo numerosi diventano difficilmente gestibili.

Il modo con cui usualmente si supera il problema è quello costruire dei raggruppamenti. Ogni volta che si hanno ad esempio dieci sassolini, questi si considerano come un'unica nuova enità (la decina, in questo caso) a cui fare riferimento. Quando le decine diventano troppe, più di dieci ad esempio, si costituisce un nuovo raggruppamento, il centinaio. Così si può proseguire. Se si prosegue di dieci in dieci si sta usando quello che si chiama sistema di numerazione decimale, o a base dieci.

I vari ordini di unità (unità semplici, decine, centinaia, migliaia, ...) devono essere rappresentati in modo da poter essere riconosciuti. Un modo possibile è quello di assegnare a ciascun ordine una forma diversa. Questo accade ad esempio nei *calculi* degli antichi Sumeri. Un altro modo possibile è quello di attribuire ai sassolini o gettoni o altri piccoli oggetti, anche eventualmente appositamente fabbricati allo scopo di contare ma comunque tutti indistinti, un diverso valore a seconda di dove vengono posizionati. Questo è il principio che sta alla base delle tavole di conto.

Nella forma più semplice, come appare in alcune antiche raffigurazioni, la tavola di conto è un supporto su cui sono segnati alcuni simboli: le iniziali dei vari ordini di unità. I sassolini o gettoni raggruppati vicino ad un simbolo indicano allora tante volte la quantità corrispondente a quel simbolo. Il valore di un "calcolo" dunque dipende ora non dalla sua forma ma dalla posizione che occupa.

Il piano di lavoro, cioè la tavola per i conti, viene ora a costituire l'elemento fondamentale, scavalcando l'importanza dei *calculi* che sono retrocessi al livello di indistinti sassolini. Questo destino diventa paradigmatico, come ben si vede dalla seguente citazione tratta da Polibio, storico greco del II secolo a.C.:

> Coloro che vivono alla corte dei re sono esattamente come i gettoni sulla tavola per contare. È la volontà del calcolatore che li fa valere un khalkos oppure un talento.

Il khalkos e il talento erano rispettivamente l'unità di moneta più piccola e più grande della grecia antica e la citazione è tratta da Polibio, storico greco del II secolo a.C. "tavole per contare" erano lo strumento con cui si eseguivano i conti nel mondo greco-latino, come testimoniano anche i nomi greco *trapezites* e latino *mensarius* (dal latino *mensa*, tavola) con cui si indicavano i contabili e che derivano da termini che nelle rispettive lingue significavano appunto "tavola". Del resto anche il nostro "banca" porta il segno della stessa origine, nella continuità di questa pratica attraverso il Medioevo e il Rinascimento, epoca in cui le tavole di conto venivano comunemente indicate con il temine *abacus*, derivato dal greco *abákion*, altro termine con cui i greci indicavano la tavola (dal greco *ábax*, tavola).

Ben presto lo spazio sulla tavola si organizza e struttura. Non compaiono più solamente i simboli dei valori, ma una regolare suddivisione in righe o in colonne, ognuna associata a un simbolo, in ordine crescente.

Nel mondo romano la disposizione comune era per colonne, in corrispondenza dei simboli delle potenze di dieci, I, X, C, M, $\bar{\text{X}}$, $\bar{\text{C}}$ o equivalenti, da destra a sinistra. Nella versione tardo medioevale prevale invece la versione per righe, dalle unità alle potenze crescenti muovendosi dal basso all'alto della tavola.

Il numero 6408 sarebbe rappresentato con sei gettoni nella colonna o sulla riga delle migliaia, quattro in quella delle centinaia, otto in quella delle unità.

La tavola si presta bene all'esecuzione di alcuni conteggi, mediante opportuni spostamenti dei gettoni. Nell'uso dei contabili particolarmente importante era l'addizione. Questa si esegue sulla tavola posizionando i gettoni corrispondenti al primo numero e, subito sotto nella colonna o accanto nella riga, altri gettoni che rappresentano il secondo numero, e così via per ogni numero da sommare. In questo modo l'addizione è in un certo senso già compiuta; sarà solo necessario qualche spostamento che sostituisce il cambio dei calcoli con calcoli di valore superiore. Se stiamo usando una tavola a colonne, in ogni colonna i gettoni vengono per prima cosa riallineati, spingendoli verso l'alto - e forse la parola *summa* (dal latino *summus*, il più in alto) ha proprio il ricordo di questo spostamento - senza distinguere quelli che appartenenvano al primo numero o al secondo. Occorre ora controllare che ogni colonna non contenga più di nove gettoni. Se vi sono gruppi di dieci gettoni questi vanno tolti, aggiungendo al contempo un nuovo gettone nella colonna che sta subito alla loro sinistra. Questa essenziale operazione di riduzione era nel medioevo detta *purgatio rationis*, ossia "purificazione". Il risultato è ora leggibile sulla tavola.

Per ridurre il numero di gettoni da utilizzare, si prevedeva la possibilità di collocare i gettoni non solo nelle colonne o sulle righe delle potenze del dieci, ma anche in posizione intermedia, fra due colonne o due righe consecutive. Un gettone posto fra la riga delle decine e quella delle unità rappresenta ad esempio una mezza decina, ossia cinque unità. Un gettone posto fra la colonna delle migliaia e quella delle centinaia rappresenta mezza migliaia, ossia il cinquecento.

Talvolta sulla tavola comparivano direttamente righe o colonne per queste posizioni intermedie, al pari delle altre. Del resto nel modo di rappresentazione dei numeri con il sistema romano si usavano i simboli I, V, X, L, C, D, M. La tavola con le colonne o righe ausiliarie risulta dunque in qualche modo più naturale. C'è una diretta corrispondenza tra la rappresentazione su tavola e la scrittura in simboli: per scrivere un numero si ripete tante volte un simbolo quanti sono i gettoni della sua colonna o riga.

Un discorso analogo vale per il sistema di scrittura acrofonico greco. E la cosidetta tavola di Salamina, il più antico reperto giuntoci dal mondo greco antico, presenta infatti una suddivisione in righe, in due diverse parti della tavola, con la successione dei simboli che rapprentano i valori 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000, 5000 dracme, 1 talento oltre che le frazioni della dracma in oboli.

Oltre agli abachi a gettoni descritti sopra, presso i romani si trova anche una interessante variante della tavola di conto: una sorta di abaco tascabile in metallo, di cui sopravvivono pochi esemplari. Qui i gettoni non sono più pezzi liberi e staccabili dalla tavola, ma sono sostituiti da una sorta di chiodini (*claviculi*) con la testa arrotondata che possono scorrere in apposite scanalature. Le scanalature, divise in una parte inferiore e una più breve parte superiore separate da una fascia che reca i simboli numerici, giocano il ruolo delle colonne dell'abaco, corrispondenti ai diversi ordini di grandezza, con quelle all'estrema destra riservate agli oboli e le frazioni di obolo.

Corrispondentemente alla versione più semplice della tavola di conto, ogni colonna avrebbe dovuto contenere dieci, o anche solo nove - poichè con dieci interviene la riduzione, chiodini per ogni colonna. In realtà gli esemplari rinvenuti corrispondono alla versione della tavola con le colonne intermedie. Ogni colonna contiene infatti quattro chiodini nella parte inferiore, di valore unitario, e un altro chiodino nella parte superiore, che vale cinque volte tanto. Per rappresentare un numero, i chiodini, che non si possono ora né estrarre né aggiungere, vengono spinti verso la fascia centrale di separazione; dunque solo quelli vicino alla fascia saranno significativi, gli altri è come se non ci fossero.

Questa variante dell'abaco romano ha una parentela molto stretta con strumenti analoghi utilizzati ancora oggi in Cina e in Giappone: il *suan pan* e il *soroban*. Il nostro pallottoliere poi è invece ispirato allo *ščët* russo, un'altra variante orientale dell'abaco in cui le asticciole sono orizzontali e contengono dieci palline per fila

Un'altra interessante modifica della tavole di conto si diffonde in Europa a partire dalla fine del X secolo. È attribuita alla figura di Gerberto d'Aurillac (940-1003), divenuto papa nel 999 con il nome di Silvestro II. Pare che egli si fosse recato a Cordova travestito da pellegrino musulmano e qui avesse appreso l'aritmetica degli arabi che a quel tempo già utilizzava comunemente il sistema posizionale indiano. Prendendo a prestito non la notazione posizionale ma solamente i simboli delle cifre arabe, egli ideò una variante della tavola in cui si usano gettoni marcati con le diverse cifre. In ogni colonna invece di posizionare tanti gettoni uguali si metterà allora un solo gettone che reca la cifra corrispondente.

Con l'abaco di Gerberto si riduce notevolmente il numero di gettoni da maneggiare. L'esecuzione dei conti diviene però meno automatica. Si pensi ad esempio all'addizione: sia pur colonna per colonna questa deve essere eseguita mentalmente dal calcolatore che dovrà cambiare i gettoni scegliendo quelli con il valore richiesto, laddove nell'abaco tradizionale si dovevano solamente introdurre i gettoni relativi al secondo numero e, in un certo senso, l'addizione "si faceva" da sé sulla tavola. In altri termini, per eseguire i conti con questi abachi si richiedono già abilità di calcolo mentale più avanzate. La tavola di Gerberto, che grazie alla concisione della rappresentazione dà modo di avere sulla tavola più numeri insieme (come su un foglio di carta), permette di eseguire operazioni complesse con algoritmi analoghi a quelli che conosciamo. Ha però, rispetto alla carta, lo svantaggio di essere uno strumento ingombrante e poco maneggevole. Come una sorta di anello intermedio tra le antiche tavole e il sistema posizionale indo-arabico, il suo uso scomparirà infatti con l'affermarsi delle nuove tecniche di calcolo con carta e penna che dal tardo Duecento si diffonderanno in Europa.

2 L'artimetica sulla tavola di conto

Le tavole di conto utilizzate nel corso dei laboratori sono del tipo a righe orizzontali, cioè la forma che prevale nel periodo più tardo di diffusione di tale strumento. A seconda del livello di difficoltà del laboratorio, si prevedono due modalità di uso della tavola stessa, una più semplice e una più avanzata, che saranno descritti più nel dattaglio nei paragrafi che seguono.

Rappresentazione e cambi

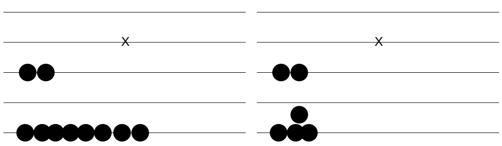
La tavola a righe possiede un numero variabile di righe orizzontali. Maggiore è il numero di righe, più grande è il valore massimo che si può rappresentare sulla tavola. Ogni riga corrisponde infatti ad un ordine decimale. A partire dal basso troviamo la riga delle unità, quella delle decine, quella delle centinaia, delle migliaia, e così via. Solitamente ogni tre righe si trova una piccola croce. Escludendo la riga delle unità, risultano contrassegnate la riga delle migliaia (la quarta dal basso), la riga del milione (la settima) ed eventualmente poi sulla decima, la tredicesima, eccetera. La funzione della crocetta corrisponde a quella del nostro punto che separa le cifre di un numero in gruppi di tre. Serve dunque a facilitare la lettura, permettendo di individuare a colpo d'occhio alcune righe di riferimento.

Per rappresentare i valori si dispongono sulla tavola alcuni gettoni, in modo opportuno. Vi sono due modalità di utilizzo della tavola. Nella prima, la più semplice, i gettoni si dispongono solamente sulle righe. Ogni gettone posto sulla prima riga a partire dal basso vale 1, sulla seconda vale 10, sulla terza 100, e così via. Il numero complessivo si ottiene considerando la somma dei valori.

Nell'uso più avanzato si possono utilizzare anche gli spazi intermedi tra le righe. I gettoni posti negli spazi intermedi assumono un valore pari a 5 volte quello di un gettone posto sulla riga subito sotto (ossia pari a metà del valore di un gettone posto sulla riga subito sopra); dunque un gettone nello spazio tra la riga delle decine e quella delle unità vale 5, un gettone nello spazio tra la riga delle centinaia e quella delle decine vale 50, ... e così via. Si no ti l'analogia con il sistema di rappresentazione romano, che prevede simboli speciali anche per i valori intermedi 5, 50, 500, oltre che per quelli fondamentali 1, 10, 100, 1000.

L'utilizzo più avanzato della tavola consente di poter ridurre il numero di gettoni necessari a rappresentare un determinato valore.

Nell'esempio il numero 208 è rappresentato nella versione più semplice e nella versione avanzata:

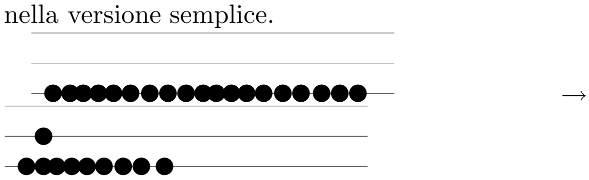


Osserviamo che come nel nostro sistema posizionale di scrittura numerica il valore di una cifra dipende dalla posizione occupata, nella rappresentazione sulla tavola il valore dei gettoni è differenziato dalla posizione rispetto alle righe. Se immaginassimo di distinguere i gettoni a seconda della riga occupata, ad esempio con un colore come accade in alcuni abachi moderni, non ci sarebbe più bisogno delle righe, ossia il sistema non sarebbe più posizionale. Avremmo invece un sistema del tutto analogo a quello romano, con simboli di valore diverso che vengono sommati.

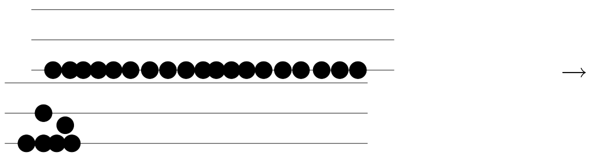
Un numero rappresentato sulla tavola di conto è "ben scritto" se i gettoni utilizzati sono il minor numero possibile. Ad esempio undici gettoni posti sulla riga delle unità rappresentano il numero undici, ma il numero undici può essere meglio rappresentato utilizzando due soli gettoni: uno sulla riga delle unità e uno sulla riga delle decine.

Nella versione più semplice della tavola di conto, in cui si va di dieci in dieci, l'aggiustamento o riduzione o *purgatio rationis*, prevede che su ogni riga possano stare al massimo nove gettoni. Se ve ne sono di più, ogni gruppo di dieci gettoni viene tolto e sostituito - operando quello che si dice un "cambio" - con un solo gettone da porsi nella riga successiva.

Nella versione più avanzata la riduzione prevede che su ogni riga possano stare al massimo quattro gettoni e nello spazio tra le righe al massimo un gettone. Se vi sono cinque gettoni su una riga questi vengono sostituiti con un solo gettone da porsi nello spazio sopra la riga stessa. Se vi sono due gettoni tra le righe questi vengono sostituiti da un solo gettone sulla riga superiore.
Nella figura è illustrata la riduzione del numero 19 nella versione semplice.

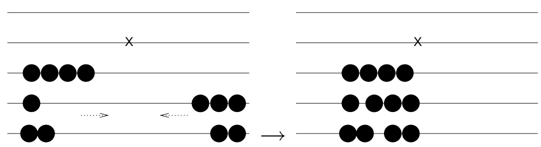


Segue la riduzione dello stesso numero nella versione avanzata.



Addizioni

L'addizione sulla tavola di conto risulta particolarmente semplice. Infatti basta rappresentare da una parte della tavola il primo addendo e dall'altra il secondo. Il risultato si ottiene riunendo i gettoni. Ovviamente questi vanno spostati facendo attenzione a non cambiare la riga su cui si trova ciascun gettone. Prima di leggere il risutato si controlla che sia scritto "bene", altrimenti si deve procedere all'aggiustamento o "riduzione". Nell'esempio: 412+32.

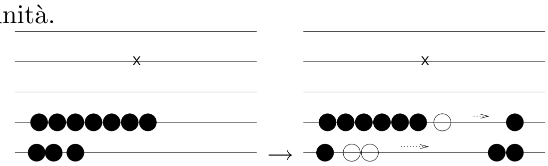


L'addizione era una delle operazioni più frequenti compiute dai contabili. Dopo aver preso un minimo di confidenza con il posizionamento dei gettoni, con qualche piccolo accorgimento si potranno eseguire velocemente anche addizioni di più numeri piuttosto grandi. Via via che l'addendo viene pronunciato o letto si potranno posizionare i gettoni direttamente accanto a quelli che si trovano già sulla tavola, evitando di doverli riunire alla fine. Converrà inziare a posizionare i gettoni a partire dal valore più alto, per seguire più facilmente l'ordine naturale in cui il numero viene letto. Se i conti sono complessi converrà eseguire i cambi di volta in volta, non appena si noti un gruppo di gettoni che può essere ridotto, in modo da non trovarsi la tavola piena di gettoni.

Sottrazioni

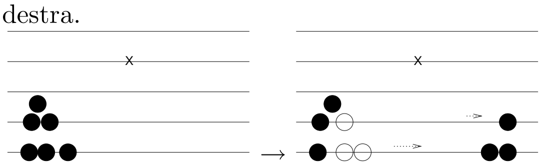
La sottrazione fra due numeri si può eseguire nel seguente modo. Sulla parte sinistra della tavola si pongono i gettoni che rappresentano il minuendo. Servendosi di questi gettoni si compone, dall'altra parte della tavola, il sottraendo. Il risultato è dato dai gettoni rimasti a sinistra.

Così, volendo eseguire 73-12, si rappresenta il 73 ponendo nella versione semplice sette gettoni sulla riga delle decine e tre sulla riga delle unità. Per comporre poi il 12 a sinistra, si fa scorrere un gettone sulla riga delle decine e due sulla riga delle unità.



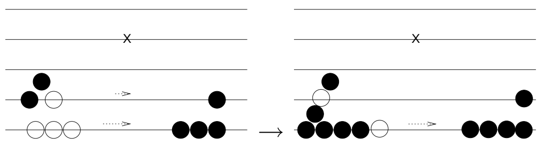
I gettoni rimasti a destra corrispondono al risultato: 61.

Nella versione avanzata cambia la disposizione iniziale dei gettoni che rappresentano il 73. Si compiono gli stessi spostamenti verso sinistra, cioè un gettone sulla riga delle decine e due sulla riga delle unità, e si legge il risultato finale nei gettoni rimasti a destra.



Può accadere che i gettoni da togliere in una determinata riga (o tra le righe) siano più di quelli a disposizione. Si fa allora un cambio "spicciolando" un gettone che sta sopra. Si procede poi fino a che non si è completato il sottraendo.

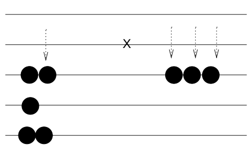
Se ad esempio avessi dovuto eseguire 73-14, sulla riga delle unità non avrei trovato quattro gettoni da spostare a sinistra, ma solo tre. Per completare il 14 avrei allora dovuto sostituire un gettone della riga delle decine con dieci gettoni sulla riga delle unità, e finalmente concludere gli slittamenti. Lavorando nella versione avanzata, il gettone delle decine viene sostituito con un gettone posto nello spazio intermedio tra decine ed unità e cinque gettoni posti sulla riga delle unità:



Moltiplicazioni

La tecnica di base per moltiplicare un numero qualsiasi per un numero a una cifra prevede di rappresenta il primo fattore ponendo i gettoni sulla parte sinistra della tavola. Per ognuno di questi gettoni si pongono poi sulla stessa riga, ma occupando la parte destra della tavola, tanti gettoni quanto è il numero indicato dal secondo fattore. Per non perdere il conto ci si aiuta con le mani: l'indice della mano sinistra si posa di volta in volta sul gettone del primo fattore che stiamo ripetendo, mentre la mano destra dispone i gettoni sull'altra parte della tavola. Dopo aver posizionato tutti i gettoni, si fa l'eventuale riduzione e si legge il risultato.

Nell'esempio seguente: il primo passo della moltiplicazione di 212 per 3:



Se la moltiplicazione è per un numero a più cifre si moltiplica il primo fattore per la cifra delle unità come sopra, posizionando i gettoni sulla destra. Si spostano poi tutti i gettoni del primo fattore di una riga più in alto e si moltiplica il numero così ottenuto per la cifra delle decine del secondo fattore. Si sposta il primo fattore ancora di una riga più in alto, se il secondo fattore ha anche le centinaia, e si moltiplica per queste. E così via. Il risultato è dato dal totale di tutti i gettoni accumulati nella parte destra.

Questa tecnica è molto semplice e automatica. Non richiede di conoscere le tabelline della moltiplicazione, riducendo ogni passaggio a somme successive. Lo svantaggio è che il procedimento può risultare molto lungo. Per guadagnare in rapidità, una serie di passaggi possono essere condensati e sostituiti da moltiplicazioni parziali. Si potrà allora ad esempio leggere il valore rappresentato su un'intera riga del primo fattore e moltiplicarlo mentalmente per la cifra del secondo che si sta considerando. In questo modo si procede come avviene nell'usuale algoritmo per la moltiplicazione.

Divisioni

Si può eseguire con un procedimento inverso rispetto a quello della moltiplicazione: dopo aver posto sulla sinistra i gettoni che rappresentano il dividendo, iniziando dalle righe più alte per ogni gruppo composto da tanti gettoni quanti il divisore, si pone un gettone a destra. Come per la moltiplicazione, la divisione sulla tavola può dunque essere eseguita riproducendo effettivamente passo passo il suo significato di raggruppamento o sottrazioni successive, senza ricorrere a tabelline e divisioni parziali. Ma per snellire il procedimento, quando gli esempi si complicano, si rende in generale necessario sostituire una serie di passaggi con il calcolo mentale.

3 Indicazioni sui laboratori

Materiale. Il materiale per i laboratori comprende un CD-rom in cui sono contenute diapositive da proiettare durante lo svolgimento del laboratorario. Si tratta di diapositive con immagini e brevi commenti da usare per le spiegazioni e per le attività. Le presentazioni sono divise in quattro livelli: livello 0, 1, 2, 3. Il livello 0, pre-calcolo, è pensato per i piccolissimi, corrispondentemente alla sezione dei cinque anni della Scuola dell'Infanzia. I livelli 1 e 2 sono pensati per il primo e il secondo ciclo della Scuola Primaria. Il livello 3 è infine pensato per la Secondaria Inferiore (o inizi della Secondaria Superiore). I livelli costituiscono un'indicazione di massima: ogni insegnante potrà valutare se appoggiarsi al materiale di un altro livello, a seconda della classe.

Il materiale per i laboratori comprende inoltre le tavole di conto, su stoffa arrotolabile, e sacchettini di gettoni. Si consiglia di suddividere i partecipanti in quattro gruppi e dotare ciascun gruppo del materiale.

Qui di seguito diamo alcune indicazioni su come svolgere un laboratorio, a seconda del livello scelto, appoggiandosi al materiale fornito.

Livello 0: 5 anni

L'attività prevista per il livello 0 consiste in un'introduzione all'uso della tavola. Si richiede che i bambini abbiano una certa confidenza con il conteggio con le dita delle mani, almeno fino al cinque. Per contare fino a dieci si può ripetere il conteggio fino a cinque con l'altra mano. Con le diapositive iniziali si richiama il conteggio con le dita delle mani. Si suggerisce poi la corrispondenza fra dita e gettoni. Si passa poi a introdurre la tavola, come spazio per collocare i gettoni. Per aiutare la giusta collocazione spaziale si suggerisce che nella riga più bassa della tavola ci siano tante casette immaginarie: queste sono le casette dei gettoni delle dita. Contando fino a dieci con le dita si mettono i gettoni nelle casette. Questo primo obiettivo può essere preparato da tappe intermedie. Si può ad esempio realizzare su un foglio uno schema con il contorno delle due mani appaiate e, su una riga, dieci casette in corrispondenza di ciascuna delle dieci dita, sull'esempio della prima scheda che compare tra le diapositive. Il conteggio fino a dieci con la disposizione dei gettoni sulla prima riga può essere rimeditato attraverso la rappresentazione grafica riproposta da un'altra scheda da riempire: sulle tavole si disegnano tanti gettoni quante sono le dita delle mani corripondenti. Si propone anche una scheda in cui si dà un certo numero di quadratini colorati. Nel disegno della mano si devono colorare altrettante dita (con lo stesso colore) e disegnare sulla tavola la configurazione corrispondente (con un unico colore, quello dei gettoni).

Con le diapositive successive si illustra ciò che avviene una volta arrivati a dieci. Questo viene fatto attraverso un'immagine-gioco (che si può eventualmente ampliare a piacere attraverso narrazione e drammatizzazione): da dieci dita di bambino nasce un'altra entità che abbiamo raffigurato come un fantasmino. I fantasmini hanno dieci dita, che però non si vedono, e una sola testa: un gettone. Anche i gettoni dei fantasmini hanno la loro casa sulla tavola. Queste case, anch'esse immaginarie, stanno sulla seconda riga dal basso. Si potrà allora riprendere la scheda con le configurazioni dei gettoni sulla tavola e aggiungere (tagliando e incollando) la rappresentazione alternativa del dieci: un solo gettone sulla seconda riga invece che dieci sulla prima.

Ogni bambino che conta impiegando tutte e dieci le dita diventa un fantasmino. Coinvolgendo più bambini si può proseguire oltre il dieci (anche senza nominare il nome dei numeri) e, facendo attenzione alle trasformazioni in fantasmini, i valori mimati attraverso le dita si possono tradurre con gettoni sulla tavola. Alcune diapositive propongono esercizi di questo tipo, in cui compaiono mani e dita da tradurre in gettoni sulla tavola. Seguono poi le risposte. Con le ultime diapositive si propone l'esercizio inverso: si mostrano alcune configurazioni sulla tavola e si chiede ai bambini di riprodurle servendosi delle dita e impersonando fantasmini corrispondenti.

Livello 1: 6-8 anni

Nel livello 1, il più semplice in cui si affrontano i primi rudimenti di calcolo sulla tavola, si utilizza la tavola esclusivamente secondo la variante più semplice in cui i gettoni si posizionano sulle righe, ma non negli spazi intermedi. Con le prime diapositive si illustra come si rappresentano i primi numeri sulla tavola e si propongono facili esercizi sia di lettura che di rappresentazione (con risposte). Si illustra poi la riduzione, o "cambio", proponendo degli esercizi. Con le diapositive successive si introduce l'addizione. Il primo esempio scelto è molto semplice e mira a evidenziare l'idea del semplice slittamento dei gettoni, senza far intervenire il cambio. Con un secondo esempio ci si estende al caso in cui alla fine degli slittamenti è necessario eseguire il cambio. Come attività si propongono addizioni con cambio fra numeri a una e due cifre. Nella parte finale si introduce la sottrazione. Ci si limita a esempi ed esercizi in cui non interviene il cambio e il risultato si ottiene solamente grazie allo slittamento lungo le righe.

Livello 2: 8-10 anni

Nel livello 2 si introduce la modalità avanzata dell'uso della tavola, con la possibilità di posizionare i gettoni negli spazi intermedi tra le righe. Si illustra dunque come posizionare i gettoni per contare fino a dieci e oltre. Si propongono esercizi di lettura e, a seguire, di rappresentazione di alcuni valori, fornendo le risposte per verifica. Si illustra poi l'addizione. Il primo esempio scelto è molto semplice e mira a evidenziare l'idea del semplice slittamento dei gettoni, senza far intervenire il cambio. Con un secondo esempio ci si estende al caso in cui alla fine degli slittamenti è necessario eseguire gli aggiustamenti sulle righe e negli spazi intermedi. Si propongono addizioni senza e con cambio fra numeri a due e tre cifre.

Con le diapositive seguenti si illustra la sottrazione. Anche qui il primo esempio e gli esercizi relativi non richiedono lo spicciolamento. In un secondo momento si spiega invece come procedere quando non è possibile portare avanti immediatamente il completamento del sottraendo.

Si passa poi alla moltiplicazione. Si illustra la tecnica base di moltiplicazione di un numero per un numero ad una sola cifra che prevede la ripetizione di ogni gettone del primo il numero di volte indicato dal secondo, con un eventuale aggiustamento finale. Anche gli esercizi proposti si limitano a esempi di questo tipo.

Si conclude con la divisione. Anche questa viene proposta nella tecnica di base che prevede di individuare gruppi di gettoni pari al divisore. Seguono esercizi sul modello dell'esempio proposto.

Livello 3: da 10 anni

È il livello più complesso, pensato per le classi della Scuola Secondaria Inferiore (o inizio della Superiore). Qui si utilizza la tavola nella versione più avanzata, con la possibilità di posizionare i gettoni negli spazi intermedi tra le righe. Come già nel livello precedente, dopo aver illustrato come posizionare i gettoni per contare fino a dieci e oltre, si propongono poi esercizi di lettura e, a seguire, di rappresentazione di alcuni valori, ora più complessi. Seguono le risposte per verifica.

L'addizione viene illustrata con un primo esempio molto semplice, che mira a evidenziare l'idea del semplice slittamento dei gettoni, senza far intervenire il cambio, seguito da un secondo esempioin cui alla fine degli slittamenti è necessario eseguire gli aggiustamenti sulle righe e negli spazi intermedi. Gli esercizi coinvolgono numeri a più cifre, fino a sei, e prevedono il cambio.

Anche per la sottrazione si propone un primo sempplice esempio, che non richiede lo spicciolamento, seguito da un secondo in cui si spiega invece come procedere quando non è possibile portare avanti immediatamente il completamento del sottraendo. Gli esempi coinvolgono numeri fino a sei cifre in ordine crescente di difficoltà.

Si passa poi alla moltiplicazione. Si illustra la tecnica base di moltiplicazione di un numero per un numero ad una sola cifra che prevede la ripetizione di ogni gettone del primo il numero di volte indicato dal secondo, con un eventuale aggiustamento finale. Seguono alcuni esercizi su questo modello. Si illustra poi come eseguire una moltiplicazione per un numero a due cifre, eseguendo i parziali e sommando. Gli esercizi propongono moltiplicazioni per numeri a due e anche a tre cifre, ai quali si estende facilmente il procedimento. Infine le divisioni. Gli esempi proposti si limitano anche in questo livello alla tecnica di base che prevede di individuare gruppi di gettoni pari al divisore. Seguono semplici esercizi.