1 I METODI DI QUADRATURA NELL'ANTICHITÀ

Morte di Archimede
Il palinsesto contenente il *Metodo*
Gli *Elementi* di Euclide

Il calcolo di aree e volumi e la determinazione delle tangenti alle curve costituiscono le due questioni tipiche dibattute e risolte con la nascita del calcolo. Il primo dei due problemi fu affrontato fin dall'antichità, con il raggiungimento di alcuni notevoli risultati utilizzando il cosiddetto "metodo di esaustione". Tale metodo, tradizionalmente attribuito a Eudosso e utilizzato da Euclide, venne portato alla massima raffinatezza da Archimede (287-212 a.C.) nelle sue opere *Quadratura della parabola, Misura del cerchio, Sulla sfera e sul cilindro*. Sempre mediante il metodo di esaustione Archimede determinò nell'*Equilibrio dei piani* i centri di gravità del triangolo e della parabola, nonché quelli di figure solide, tra le quali il paraboloide e l'iperboloide di rotazione. Il procedimento per esaustione consentiva di dimostrare con rigore i risultati, ma non forniva indicazioni sulla strada da seguire per scoprirli.
Nel Rinascimento si diffuse pertanto la convinzione che Archimede possedesse un metodo segreto, una convinzione confermata dal ritrovamento, avvenuto solo nel 1906, di un palinsesto contenente il cosiddetto *Metodo* sotto forma di lettera ad Eratostene.

2 LA MATEMATICA INFINITESIMALE ARABA

Ab'l WafÇ, *Geometria*
Studiosi in una biblioteca
Ibn al-Haytham
Il minareto della moschea di Samarra

Il filone archimedeo venne ripreso e sviluppato dagli scienziati arabi a partire dal IX secolo. I primi contributi si devono ai tre fratelli Banū Mūsā che, dopo aver tradotto e studiato i risultati di Archimede sul cerchio e sulla sfera, dedicarono agli stessi argomenti l'opera *Sulla misura delle figure piane e sferiche*, divenuta poi nota in occidente come *Liber trium fratum de geometria*.
Risultati sull'area di un segmento di parabola e sul volume del paraboloide di rotazione furono invece prodotti da Thābit b. Qurra, collaboratore dei Banū Mūsā, da suo nipote Ibrāhīm b. Sinān e soprattutto da Ibn al-Haytham. Quest'ultimo determinò anche il volume del solido generato dalla rotazione di un arco di parabola attorno alla tangente, andando oltre i risultati di Archimede sulla parabola, che peraltro gli scienziati arabi non conoscevano.
Ibn al-Haytham, noto in Occidente come Alhazen, si dedicò anche allo studio dell'area delle lunule, generalizzando i risultati classici attribuiti a Ippocrate di Chio.
Sempre ad Ibn al-Haytham si devono i principali risultati su un altro settore di ricerca che affonda le sue radici nella matematica greca: il problema isoperimetrico, ossia la dimostrazione che fra le figure piane di perimetro dato il cerchio ha l'area massima, e il problema analogo nello spazio, ossia che fra i solidi con la stessa superficie la sfera ha il volume massimo. Si tratta di un risultato ricordato e dato come acquisito ad esempio da Tolomeo nel primo libro dell'*Almagesto* e che costituirà, molti secoli dopo, uno dei campi di ricerca più raffinati del calcolo infinitesimale.

3 LA STAMPA E LA DIFFUSIONE DELLA CULTURA MATEMATICA

Intorno alla metà del XV secolo, Johannes Gutenberg inventò la stampa a caratteri mobili, un procedimento destinato a rivoluzionare la produzione e la diffusione della cultura in generale e di quella matematica in particolare. Il primo libro matematico dato alle stampe fu un volumetto anonimo pubblicato nel 1478 a Treviso, che per questo è detto *Aritmetica di Treviso*. Pochi anni dopo, nel 1482, apparvero gli *Elementi* di Euclide, che conosceranno più di settanta edizioni nel solo XVI secolo. Alla fine del Cinquecento, tutte le opere della matematica greca giunte fino a noi erano state pubblicate e messe a disposizione degli studiosi.

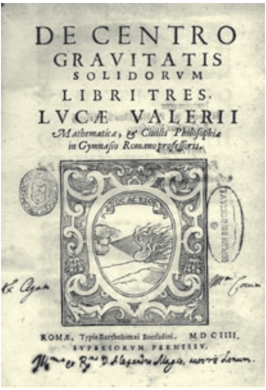
L'impatto della stampa sulla cultura scientifica fu enorme. Da una parte, il fatto che le opere fossero disponibili in molti esemplari (tre-quattrocento, secondo stime attendibili) ne assicurava la diffusione immediata negli ambienti scientifici, imprimendo così una straordinaria accelerazione alla diffusione delle scoperte e delle conoscenze; dall'altra, la familiarità con gli stessi testi promosse la formazione di un linguaggio e di un metodo condivisi, e quindi di una comunità scientifica in senso moderno.

Gli *Elementi* di Euclide
L'*Aritmetica* di Treviso
Filippo Calandri, *De Arimetricha Opusculum*
L'editio princeps del testo greco degli *Elementi*

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛ. ΙΕ.
ΕΚ ΤΩΝ ΘΕΩΝΟΣ ΣΥΝΟΥΣΙΩΝ.
Εἰς τοῦ αὐτοῦ τὸ πρῶτον, ἐξηγημάτων Πρόκλου βιβλ. δ΄.
Adiecta præfatiuncula in qua de disciplinis Mathematicis nonnihil.

BASILEAE APVD IOAN. HERVAGIVM ANNO M. D. XXXIII. MENSE SEPTEMBRI.

4 IL RITORNO DI ARCHIMEDE NEL CINQUECENTO: I CENTRI DI GRAVITÀ


DE CENTRO
GRAVITATIS
SOLIDORVM
LIBRI TRES.
LVCÆ VALERII
Mathematicæ, & Ciuilis Philosophiæ
in Gymnasio Romano professoris.
ROMÆ, Typis Bartholomæi Bonfadini. M D CIIII.
SVPERIORVM PERMISSV.


WISCONSTIGE
GEDACHTENISSEN,
Inhoudende t'ghene daer hem
in gheoeffent heeft
DEN DOORLVCHTICHSTEN
Tot Leyden,

Luca Valerio, *De centro gravitatis solidorum*
Simon Stevin, *Wisconstige Gedachtenissen*
Francesco Maurolico

La pubblicazione nel 1544 delle *Opere* di Archimede, e in particolare dell'*Equilibrio dei piani*, suscitò una serie di studi volti ad estendere il metodo archimedeo al calcolo dei centri di gravità dei solidi. Le prime ricerche in questa direzione ebbero luogo in Italia, da parte del messinese Francesco Maurolico (1494-1575) e dell'urbinate Federico Commandino (1506-1575), uno dei più attivi editori di testi classici. Per motivi diversi, nessuno dei due ebbe un'influenza determinante sulla ricerca matematica. Infatti da una parte l'opera di Commandino *De centro gravitatis solidorum*, pubblicata nel 1565, era alquanto imperfetta nelle dimostrazioni; dall'altra il *De momentis aequalibus* di Maurolico restò confinato a una cerchia ristretta di scienziati e venne pubblicato solo nel 1685.

Il contributo più importante alla teoria dei centri di gravità fu senza dubbio quello di Luca Valerio (1552-1618), definito da Galileo "il nuovo Archimede dell'età nostra", che nel suo *De centro gravitatis solidorum* libri tres, pubblicato nel 1604, trovò il baricentro di molte figure solide, tra le quali l'iperboloide di rotazione, ma soprattutto ideò un metodo dimostrativo che per la prima volta affrontava figure generali, con un sostanziale progresso rispetto ai metodi classici.

Al di là delle Alpi, un contributo importante venne dal fiammingo Simon Stevin (1548-1620), che trattò dei centri di gravità nel suo *De Beghiaselen der Weeghconst* (1586), tradotto in francese nel 1634 e inserito nelle sue *Oeuvres mathématiques*.

5 NUOVE IDEE: LA TEORIA DEGLI INDIVISIBILI

All'inizio del Seicento emersero nuovi metodi per il calcolo di aree e volumi. Nella sua *Nova stereometria doliorum* (1615), Johannes Kepler (1571-1630) si servì di considerazioni infinitesimali per il calcolo dei volumi di vari solidi di rotazione.
Un tentativo di esposizione organica e coerente di una nuova teoria fu opera di Bonaventura Cavalieri (1598-1647), che nella *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (1635) introdusse il metodo degli indivisibili dimostrando il "principio di Cavalieri", fonte di numerose successive applicazioni.
La teoria degli indivisibili fu oggetto di duri attacchi da parte dei matematici più conservatori, per lo più gesuiti. D'altra parte la versatilità del metodo ne fece un potente strumento di ricerca, e agli indivisibili si rivolsero i maggiori matematici del tempo. In Italia, Evangelista Torricelli (1608-1647) usò la tecnica di Cavalieri per lo studio di nuove curve come la cicloide, e calcolò il volume del solido generato dalla rotazione di un'iperbole attorno al suo asintoto, primo esempio di un solido infinito con volume finito.

Negli stessi anni, argomenti analoghi erano stati affrontati in Francia da Pierre de Fermat (1601-1665), che trovò la quadratura delle parabole di ordine superiore, da Gilles Personne de Roberval, che scrisse un trattato *De indivisibilibus* e da Blaise Pascal (1623-1662), che ne fece un uso raffinatissimo nel suo *Traité des sinus du quart de cercle*. In Inghilterra, John Wallis (1616-1703) utilizzò sistematicamente indivisibili e quantità infinitesime nel suo trattato *Arithmetica infinitorum* (1655).

Bonaventura Cavalieri
Evangelista Torricelli
Blaise Pascal
Bonaventura Cavalieri,
Geometria indivisibilibus promota

GEOMETRIA
INDIVISIBILIBVS
CONTINVORVM
Noua quadam ratione promota.
AVTHORE
F. BONAVENTVRA CAVALERIO MEDIOLAN.
Ord. Iesuatorum S. Hieronymi, D. M. Mascarellæ Pr.
Ac in Almo Bonon. Gymn. Prim. Mathematicarum Professore
AD ILLVSTRISS. ET REVERENDISS. D.
D. IOANNEM CIAMPOLVM.

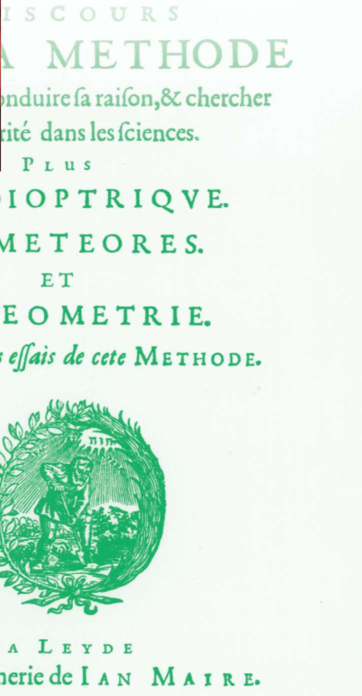
BONONIÆ, Typis Clementis Ferronij. M. DC. XXXV. Superiorum permissu.

6 IL PROBLEMA DELLE TANGENTI

Nel 1637 venne pubblicato in Olanda il celeberrimo *Discours de la méthode* di René Descartes (1596-1650). Uno dei saggi che illustravano il metodo era la *Géométrie*, un'opera rivoluzionaria nella quale algebra e geometria si fondono per dar vita a una nuova disciplina: la geometria analitica. Uno dei punti chiave della *Géométrie* era la caratterizzazione delle curve tramite la loro equazione, grazie alla quale, invece delle singole curve "nominate" della geometria classica, potevano essere studiate intere classi di curve. I problemi relativi cambiarono aspetto: invece di affrontare singoli casi particolari, si trattava ora di trovare metodi generali, applicabili a tutte le curve dotate di equazione.
Tra i problemi posti nella *Géométrie*, quello delle tangenti alle curve assunse subito un posto di rilievo. Descartes lo aveva risolto nel caso di curve algebriche, cioè esprimibili come zeri di un polinomio. Lo stesso risultato era stato ottenuto da Fermat, con un metodo che si applicava ad alcune curve trascendenti e in linea di principio anche a curve la cui equazione conteneva dei radicali, ma che diventava praticamente inservibile al crescere della complessità dell'equazione.

Anche Roberval e Torricelli si interessarono del problema, che affrontarono però con un metodo diverso, basato sulla generazione cinematica delle curve.

Nei decenni successivi alla pubblicazione della *Géométrie*, i metodi di Descartes e di Fermat vennero raffinati e semplificati ad opera tra gli altri di Jan Hudde, François de Sluse, James Gregory, Isaac Barrow e John Wallis, fino a dar luogo a un vero e proprio algoritmo di calcolo, senza tuttavia riuscire a superare l'ostacolo costituito dalla presenza di molti radicali nell'equazione della curva.



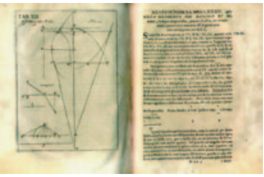
Réné Descartes
Pierre Fermat
John Wallis
Réné Descartes, Discours de la mèthode

7 LA NASCITA DEL CALCOLO INFINITESIMALE

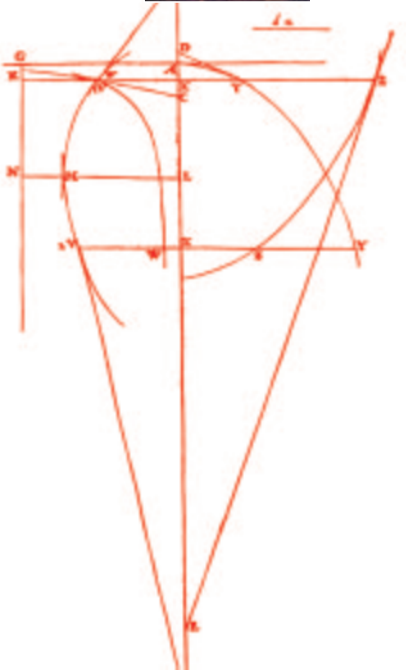
Nell'ottobre del 1684 Gottfried Wilhelm Leibniz pubblicò sugli *Acta eruditorum* un breve ma fondamentale scritto dal titolo *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*, che conteneva i fondamenti del calcolo differenziale, e risolveva con un metodo generale il problema delle tangenti. Il punto centrale del metodo di Leibniz era un'operazione, la differenziazione, che permetteva di passare dall'equazione algebrica di una curva all'equazione differenziale, e tramite quest'ultima di determinarne la tangente.

Il problema inverso delle tangenti, cioè il passaggio dall'equazione differenziale all'equazione della curva, divenne immediatamente il problema principale del calcolo, essendo legato da una parte alla quadratura delle figure e dall'altra a una serie di problemi sia geometrici che meccanici.

Quasi venti anni prima della pubblicazione della *Nova Methodus*, nel 1665-1666, Isaac Newton aveva elaborato un suo calcolo, simile per i risultati se non per l'ispirazione a quello di Leibniz. Il calcolo newtoniano combinava il metodo delle flussioni (un'operazione analoga alla differenziazione leibniziana) con l'uso sistematico degli sviluppi in serie. Contrariamente a quelli di Leibniz, i risultati di Newton non vennero pubblicati subito, e rimasero inizialmente confinati a un ambiente ristretto.



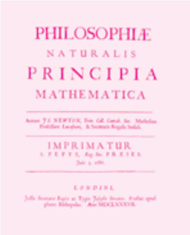
Gottfried Wilhelm Leibniz, *Nova methodus*
Gottfried Wilhelm Leibniz
Isaac Newton



8 LA CONTESA SULL'INVENZIONE DEL CALCOLO

Il primo riferimento al calcolo newtoniano si trova nei *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687), dove Newton esponeva i fondamenti del suo metodo riconoscendo in uno scolio l'indipendenza della scoperta di Leibniz. Una serie di vicende, che turbarono i rapporti tra i due scienziati, culminarono in accuse di plagio rivolte a Leibniz prima da Nicolas Fatio de Duiller (1664-1753), uno scienziato olandese trapiantato in Inghilterra, e poi da John Keill (1671-1721), un matematico inglese molto vicino a Newton. Poiché ambedue erano membri della Royal Society, Leibniz si rivolse a quest'ultima perché censurasse l'operato di Keill. Sotto l'influenza di Newton, che ne era il presidente, la Society nominò una commissione che respinse le richieste di Leibniz. L'operato della commissione, invero piuttosto parziale, suscitò forti critiche da parte dei matematici continentali, quasi tutti fautori del metodo leibniziano, e causò una profonda frattura nella comunità scientifica. La storiografia moderna, che ha riconosciuto la priorità di Newton nella scoperta del calcolo, ha anche escluso qualsiasi plagio da parte di Leibniz.

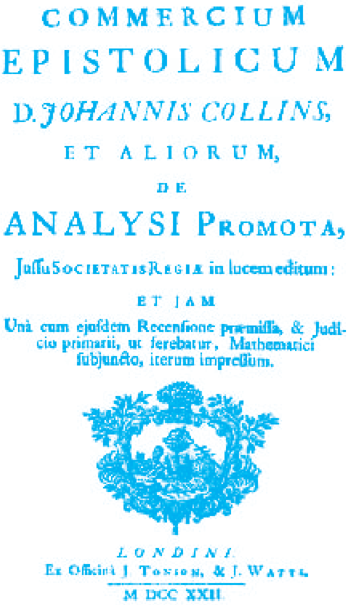
Isaac Newton
Isaac Newton,
Philosophiae naturalis principia mathematica
Commercium epistolicum



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

IMPRIMATUR

LONDINI,



COMMERCIUM
EPISTOLICUM
D. JOHANNIS COLLINS,
ET ALIORUM,
DE
ANALYSI PROMOTA,
Jussu Societatis Regiæ in lucem editum:
ET JAM
Unà cum ejusdem Recensione præmissa, & Judicio primarii, ut ferebatur, Mathematici subjuncto, iterum impressum.

LONDINI:
Ex Officinâ J. Tonson, & J. Watts.
M DCC XXII.

9 LA DIFFUSIONE DEL CALCOLO

Dopo l'esplosione della controversia, i metodi di Newton e di Leibniz seguirono percorsi di sviluppo e diffusione distinti. I matematici inglesi, tra cui James Stirling, Brook Taylor e Colin McLaurin (1698-1746), svilupperanno e preciseranno i metodi di Newton senza dare contributi rilevanti, e si lasceranno trascinare in polemiche sulla legittimità del metodo delle flussioni, come quella innescata da George Berkeley nel 1734 con il suo *The Analist*.

Al contrario, anche a causa di una terminologia più snella e di un formalismo più efficace, ma soprattutto grazie all'opera di matematici di grande valore quali i fratelli Jacob e Johann Bernoulli, primi di una famiglia di eminenti scienziati, il calcolo leibniziano compì in breve importanti progressi. In particolare esso venne impiegato nello studio delle equazioni differenziali, con le quali furono risolti numerosi problemi, tra cui spiccano quelli della curva brachistocrona e della catenaria.

Nel 1696 uscì il primo trattato di calcolo differenziale, l'*Analyse des infiniments petits* del marchese Guillaume François de l'Hospital (1661-1704), allievo di Johann Bernoulli. L'opera ebbe grande successo e su di essa si formarono generazioni di matematici.

Strettamente legato alla famiglia Bernoulli fu Leonhard Euler (1707-1783), la cui *Introductio in analysin infinitorum*, pubblicata nel 1748, è organizzata completamente attorno alla nozione di funzione. La definizione di quest'ultima fu oggetto di una vivace e lunga discussione, legata anche allo studio di fenomeni fisico-matematici come la corda vibrante, che coinvolse fra gli altri Jean D'Alembert e giunse fino a Joseph Louis Lagrange e Joseph Fourier.

Leonhard Euler
Johann Bernoulli
Guillaume François de l'Hospital,
Analyse des infiniment petits

ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
Pour l'intelligence des lignes courbes.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
M. DC. XCVI.

10 LEIBNIZ E L'ITALIA: IL CALCOLO COME MERCE D'IMPORTAZIONE

La diffusione del calcolo in Italia avvenne tramite scambi epistolari e grazie alla presenza di alcuni studiosi. Leibniz stesso compì una breve visita in Italia nel 1689, durante la quale tentò di introdurre i nuovi metodi. Nel 1707 Jacob Hermann, che si era formato alla scuola di Johann Bernoulli, venne chiamato a ricoprire la cattedra di Matematica all'università di Padova. Qui rimase fino al 1713, intrecciando una rete di fitti contatti e divenendo punto di riferimento per i matematici italiani che volevano confrontarsi con i nuovi metodi analitici. A lui successe Nicola I Bernoulli (1687-1759), mentre altri membri della famiglia Bernoulli, Nicola II e Daniel (1700-1782), soggiornarono a lungo a Venezia.

In Italia, le prime tracce dell'uso del calcolo infinitesimale si trovano nelle opere di Gabriele Manfredi e di Guido Grandi, seguiti poi da Iacopo Riccati e da suo figlio Vincenzo, da Maria Gaetana Agnesi e da Giulio Carlo de' Toschi Fagnano. Più tardi, Joseph Louis Lagrange inizierà a Torino la sua brillante carriera scientifica.

La prima opera dedicata interamente al calcolo differenziale è dovuta a Domenico Corradi d'Austria, che nel 1743-1744 stampò il suo *De' calcoli differenziale e integrale*. Pochi anni dopo, nel 1748, Maria Gaetana Agnesi pubblicò le *Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*, un'opera in due volumi che ebbe grande diffusione fra gli studenti di varie generazioni e il cui secondo volume, contenente i principi del calcolo infinitesimale, fu anche tradotto in francese e in inglese.

Gabriele Manfredi
Iacopo Riccati
Maria Gaetana Agnesi, *Instituzioni analitiche*
Guido Grandi

11 IL PROBLEMA DEI FONDAMENTI

Dopo uno sviluppo impetuoso durato più di un secolo, verso la fine del Settecento iniziò una riflessione sempre più approfondita sui principi, o come si diceva all'epoca sulla “metafisica”, del calcolo infinitesimale.

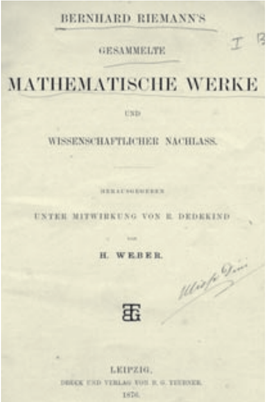
Nel 1797 videro la luce contemporaneamente le *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* di Lazare Carnot, e la *Théorie des fonctions analytiques* di Lagrange, ambedue dedicate al problema dei fondamenti. Mentre Carnot poneva le basi del calcolo nella necessità della compensazione di due errori opposti, Lagrange centrò la sua teoria sugli sviluppi in serie di potenze, a partire dai quali introdusse le funzioni “derivate”, termine che troviamo qui per la prima volta.

La soluzione più completa del problema è dovuta ad Augustin Louis Cauchy (1789-1857), il cui *Cours d’analyse*, pubblicato nel 1821, è spesso indicato come l’inizio dell’analisi moderna. Seguendo quella che era stata anche la visione di d’Alembert, Cauchy pose alla base di tutte le costruzioni dell’analisi il concetto di limite: per mezzo di esso venivano definite le funzioni continue, le derivate e gli integrali, che per la prima volta vengono introdotti indipendentemente.

In una direzione simile a quella di Cauchy si mosse contemporaneamente Bernhard Bolzano (1781-1848), che nel suo opuscolo *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes* (1817) introdusse in maniera rigorosa i concetti di continuità delle funzioni, di convergenza delle serie, di estremo superiore. I contributi di Bolzano rimasero però poco conosciuti e furono riscoperti solo più tardi.

Augustin-Louis Cauchy
Augustin-Louis Cauchy, *Cours d'analyse*
Joseph Louis Lagrange
Bernhard Bolzano

12 L'INTEGRAZIONE COME OPERAZIONE INDIPENDENTE DALLA DERIVAZIONE


BERNHARD RIEMANN'S

GESAMMELTE

MATHEMATISCHE WERKE

UND

WISSENSCHAFTLICHER NACHLASS.

HERAUSGEGEBEN

UNTER MITWIRKUNG VON R. DEDEKIND

VON

H. WEBER.

Ulisse Dini

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1876.

Nelle prime formulazioni del calcolo, e poi per tutto il Settecento, l'operazione principale era la differenziazione, o derivazione. A fronte di questa, l'integrazione era vista non come un'operazione indipendente ma come l'inversa della derivazione, o meglio come un caso particolare del cosiddetto "problema inverso delle tangenti", ossia dell'integrazione delle equazioni differenziali. Fu solo nel *Résumé des leçons* di Cauchy che l'integrazione venne definita come operazione a sé stante, indipendente dalla derivazione. Cauchy dimostrò che le funzioni continue sono integrabili e che vale il teorema fondamentale del calcolo integrale, cioè che la derivazione e l'integrazione sono due operazioni una inversa dell'altra.

Alcuni anni più tardi, in occasione di ricerche sullo sviluppo in serie di Fourier di funzioni discontinue, Bernhard Riemann (1826-1866) estese l'integrale anche ad alcune classi di funzioni discontinue e pose il problema di determinare quali funzioni risultassero integrabili. Si inaugurò così un settore di ricerca che troverà il suo sbocco naturale nella teoria dell'integrazione di Lebesgue.

Bernhard Riemann,
Gesammelte Werke, con la firma di Ulisse Dini
Bernhard Riemann
Augustin-Louis Cauchy

13 LA TEORIA DEI NUMERI REALI

ARITHMETICES PRINCIPIA

NOVA METHODO EXPOSITA

A

IOSEPH PEANO

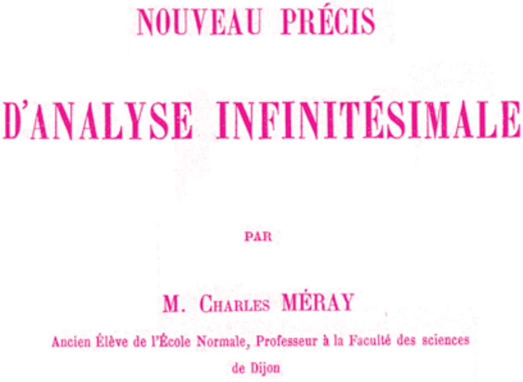
La sistemazione dell'analisi operata da Cauchy lasciava aperti una serie di problemi legati alle proprietà dei numeri reali. Nelle sue lezioni e in alcune comunicazioni all'Accademia di Berlino, Karl Weierstrass (1815-1897) aveva più volte sollevato il problema di una rigorosa definizione dei numeri reali che egli considerava come passo indispensabile per lo sviluppo dell'analisi.

Nel 1872 Edward Heine (1821-1881) diede una prima presentazione sistematica delle idee di Weierstrass pubblicando l'articolo *Die Elemente der Functionenlehre*. Nello stesso anno comparve l'articolo di Georg Ferdinand Cantor (1845-1918), dal titolo *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, in cui i numeri reali venivano definiti come successioni di Cauchy di numeri razionali. Un'impostazione simile si trova nel *Nouveau précis d'analyse infinitésimale*, pubblicato sempre nel 1872 da Charles Mèray (1835-1911) e anticipato nel 1869 da una sua memoria uscita sulla *Revue des Sociétés Savantes*.

Di natura diversa è invece l'altro fondamentale contributo, dovuto a Richard Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872), dove i numeri reali erano definiti come sezioni dei numeri razionali. Sulla base di questa definizione, Dedekind dimostrò le proprietà di ordinamento e definì le operazioni aritmetiche e il concetto di limite.

L'opera di Dedekind, insieme all'altra dal titolo *Was sind und was sollen die Zahlen*, nella quale i numeri interi venivano definiti in termini di insiemi, conobbe vasta diffusione. Ambedue vennero tradotte in italiano da Oscar Zariski, con i titoli *Continuità e numeri reali*, ed *Essenza e significato dei numeri*. Una definizione assiomatica degli interi venne poi introdotta da Giuseppe Peano nei suoi *Arithmetices principia* (1889).

Karl Weiestrass
Georg Cantor
Giuseppe Peano, *Arithmetices principia*
Charles Mèray, *Nouveau précis d'analyse infinitésimale*



NOUVEAU PRÉCIS

D'ANALYSE INFINITÉSIMALE

PAR

M. CHARLES MÉRAY

Ancien Élève de l'École Normale, Professeur à la Faculté des sciences de Dijon

14 LA NUOVA ANALISI IN ITALIA

A metà Ottocento, sotto l'influsso determinante di Weierstrass, l'università di Berlino divenne una delle sedi più importanti per lo studio del calcolo e il centro privilegiato di ricerca nella direzione di una definizione più rigorosa dei suoi fondamenti.

Weierstrass incominciò a tenere le sue lezioni nel 1859, ma solo molto più tardi, a partire dal 1894, il materiale relativo venne raccolto e pubblicato. Soprattutto grazie ai corsi di Weierstrass si affermò la necessità di fondare l'analisi su una teoria rigorosa dei numeri reali e di definire questi ultimi a partire dai numeri interi, un processo che Felix Klein chiamò "aritmetizzazione dell'analisi".

Una testimonianza del diffondersi delle concezioni di Weierstrass in Italia è costituita dai *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* pubblicata da Ulisse Dini (1845-1918) nel 1878, un'opera nella quale è evidente l'influsso della scuola tedesca.

Sempre in Italia nel 1884 venne pubblicato il *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale*, un trattato in cui Giuseppe Peano (1858-1932) raccolse le lezioni da lui seguite a Torino e tenute da Angelo Genocchi. Nello stendere le lezioni, Peano vi inserì importanti "aggiunte" di teoremi sull'esistenza e la differenziabilità delle funzioni implicite, sulla continuità uniforme di funzioni in più variabili, sul calcolo integrale, con precisazioni e controesempi.

Ulisse Dini
Angelo Genocchi, Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale
Giuseppe Peano
Ulisse Dini, Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali

15 MISURA E INTEGRAZIONE

Nel 1823 Cauchy aveva dato la prima definizione moderna di integrale per le funzioni continue, o al più con un numero finito di discontinuità.

Nel 1854 Bernhard Riemann, nella sua tesi sulla rappresentabilità di una funzione mediante una serie trigonometrica, dopo aver introdotto l'integrale che porta il suo nome, diede numerosi esempi di funzioni che pur avendo un numero infinito di discontinuità risultano integrabili. La tesi di Riemann restò sconosciuta fino al 1867, quando la sua pubblicazione a cura di Dedekind generò una serie di ricerche sulla relazione tra l'integrabilità di una funzione e l'insieme dei suoi punti di discontinuità. Nel corso di questi studi, si fece strada l'idea che l'integrabilità dipenda da una qualche misura dell'insieme dei punti di discontinuità.

Una prima formulazione della misura di un insieme, dovuta a Giuseppe Peano e Camille Jordan, pur avendo innegabili doti di semplicità, si rivelò troppo rigida e inadatta a risolvere il problema.

Nel 1898 Émile Borel (1871-1956) introdusse una teoria della misura degli insiemi più sofisticata e più duttile, definita su una classe molto ampia di insiemi, detti poi insiemi boreliani.

Le idee di Borel vennero ampliate da Henri Lebesgue (1875-1941), che definì la misura in maniera più generale di Borel e ne fece la base di una nuova teoria dell'integrazione, che nell'analisi moderna ha definitivamente sostituito quella di Riemann.

Uno tra i primi studiosi che in Italia si impadronirono delle idee di Lebesgue fu Giuseppe Vitali (1875-1932), che per primo diede l'esempio di una funzione non integrabile secondo Lebesgue.

Émile Borel
Henri Lebesgue
Giuseppe Vitali
Henri Lebesgue, *Intégrale, Longueur, Aire*

Intégrale, Longueur, Aire.

(Par H. Lebesgue, *à Nancy.)*

INTRODUCTION.