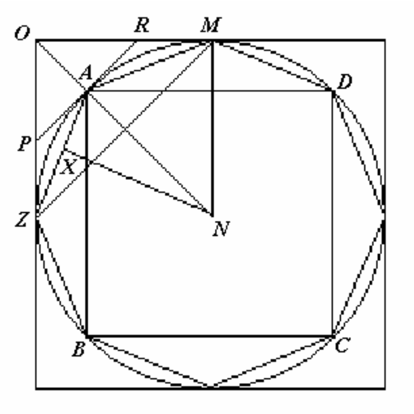
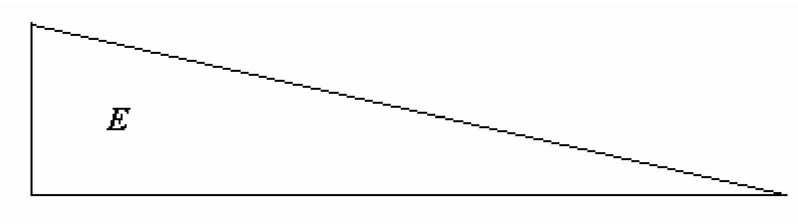
Archimede, Misura del cerchio.

1. Ogni cerchio è equivalente a un triangolo rettangolo in cui l'altezza è uguale al raggio del cerchio e la base alla circonferenza.





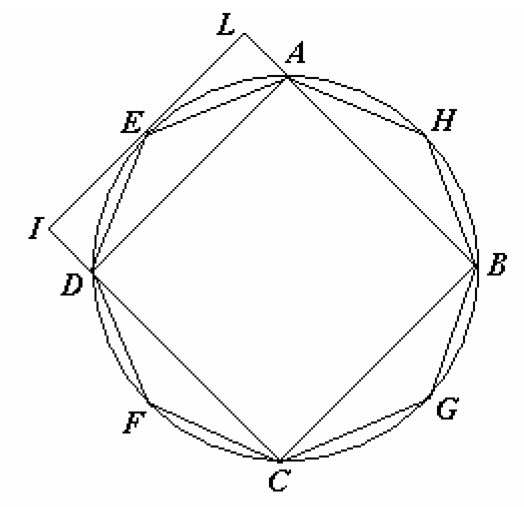
Sia *ABCD* un cerchio e *E* un triangolo come detto; dico che sono equivalenti.

Supponiamo per assurdo che il cerchio sia più grande del triangolo. Inscriviamo nel cerchio il quadrato *AC* e dividiamo gli archi [che hanno come corde i lati del quadrato] in due parti uguali; continuiamo la divisione finché la somma dei segmenti del cerchio sia minore della differenza tra l'area del cerchio e quella del triangolo (a). Il poligono inscritto sarà allora maggiore del triangolo (b).

Prendiamo il centro *N* e abbassiamo la perpendicolare *NX*, che sarà minore dell'altezza del triangolo. Ma anche il perimetro del poligono è a sua volta minore della base, dato che è minore della circonferenza del cerchio. Di conseguenza, il poligono è minore del triangolo *E*, il che è assurdo.

Sempre ragionando per assurdo, supponiamo ora che il cerchio sia più piccolo del triangolo *E*, circoscriviamogli un quadrato, dividiamo gli archi in due parti uguali e tiriamo le tangenti ai punti di divisione. L'angolo *OAR* è retto, e quindi *OR* è maggiore di *MR*, dato che *MR* è uguale a *RA*, e il triangolo *ROP* è maggiore della metà della figura *OZAMO* (c). Restino dunque dei segmenti come *PZA*, la cui somma sia minore della differenza tra l'area del triangolo *E* e quella del cerchio *ABCD* (d). Il poligono circoscritto è di conseguenza minore del triangolo *E*, il che è assurdo. Infatti è maggiore, dato che *NA* è uguale all'altezza del triangolo e che il perimetro del poligono è maggiore della base del triangolo (e).

Pertanto il cerchio è equivalente al triangolo *E*.



(a) Euclide, *Elementi*, XII.2

Il quadrato inscritto è maggiore della metà del cerchio; infatti è uguale alla metà del quadrato circoscritto.

Si dividano ora a metà gli archi che hanno come corde i lati del quadrato inscritto. Il triangolo *AED* è maggiore della metà del segmento corrispondente; infatti è metà del rettangolo *ADIL*. Di conseguenza la somma dei triangoli è maggiore della metà della somma dei segmenti corrispondenti.

Si possono ora inscrivere dei triangoli nei segmenti residui, e così via; ogni volta la somma dei triangoli è maggiore della metà della somma dei segmenti corrispondenti. Pertanto togliendo ogni volta i triangoli costruiti, si toglie sempre una grandezza maggiore della metà del residuo.

Si può allora applicare il teorema X.1 degli *Elementi*: Date due grandezze, se dalla prima si toglie più della metà, e dal residuo si toglie ancora più della metà, e così via, a un certo punto il residuo sarà minore della seconda grandezza data.

Nel nostro caso, la prima grandezza è il cerchio e la seconda l'ipotetica differenza tra l'area del cerchio e quella del triangolo. Le grandezze che si tolgono formano i poligoni inscritti.

(b) Infatti il cerchio meno il poligono, che è uguale alla somma dei segmenti, è minore della differenza tra il cerchio e il triangolo. Di conseguenza il poligono è maggiore del triangolo.

(c) Si può fare ogni volta la stessa costruzione; ad esempio nel triangolo *ARM*, tirando la tangente al punto di mezzo dell'arco. Ogni volta il triangolo esterno al cerchio è maggiore della metà della figura relativa. Partendo ora dal quadrato circoscritto e togliendo ogni volta i triangoli detti, si ottengono i vari poligoni circoscritti; la differenza tra questi e il cerchio finirà col diventare minore di una qualsiasi grandezza data, nel nostro caso l'ipotetica differenza tra il triangolo *E* e il cerchio.

(d) Infatti i triangoli *OAR* e *RMA* hanno la stessa altezza e la base di *OAR*, cioè *OR*, è maggiore della base *RM* di *RMA*. Analogamente il triangolo *OAP* è maggiore del triangolo *APZ*. Pertanto il triangolo *ROP*, che è la somma di *OAR* e *OAP*, sarà maggiore della somma dei triangoli *RMA* e *APZ*, e dunque maggiore della figura *ZPARMAZ*. Di conseguenza il triangolo *ROP* sarà maggiore della metà della figura *OZAMO*.

(e) Che il perimetro di un qualsiasi poligono circoscritto sia maggiore della circonferenza (e quindi della base del triangolo) segue dal postulato 2 del primo libro della *Sfera e cilindro* di Archimede: Se due linee hanno gli stessi estremi e sono convesse, e se la prima di esse è compresa tra la seconda e la retta che ha gli stessi estremi, allora la prima è più corta della seconda. Nel nostro caso le due linee sono l'arco *AM* e la spezzata *ARM*: l'arco è più corto della spezzata e di conseguenza la circonferenza è minore del perimetro del poligono circoscritto.