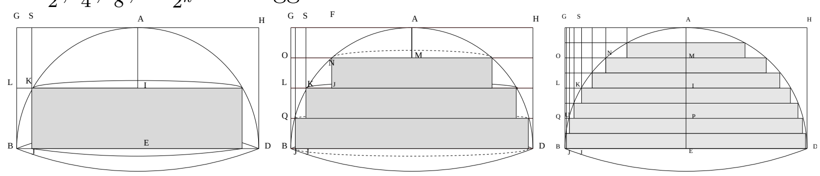
Il volume della sfera: esaustione e integrazione

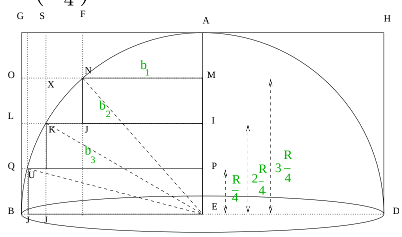
Nella geometria greca classica come nella matematica araba che la prosegue, il calcolo del volume della sfera viene compiuto ricorrendo al metodo di esaustione. Nella dimostrazione data ad esempio da al-Haytham nel suo *Trattato sulla misura della sfera (Qawl fī misāḥat al-kura)*, si considerano la semisfera $\mathcal{S}$ e il cilindro $\mathcal{C}$ circoscritto e si prova che il volume di $\mathcal{S}$ è pari a $\frac{2}{3}\mathcal{C}$. Essendo il volume del cilindro circoscritto alla semisfera pari a πR^3 questo coincide, in termini più moderni, con l'affermare che il volume della semisfera è $\frac{2}{3}\pi R^3$, e dunque che quello dell'intera sfera è $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Nel corso della dimostrazione Al-Haytham costruisce una famiglia di solidi tutti interni alla semisfera composti da più cilindri sovrapposti. Ad ogni passo l'altezza della semisfera, pari al raggio, viene divisa in 2, 4, 8, ..., 2^k parti ottenendo 1, 3, 7, ..., 2^k-1 cilindri interni alla semisfera (vedi figura) di altezza pari a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$,... $\frac{1}{2^k}$ del raggio R.



Come suggerito dalla figura dei primi tre passi, il volume dei solidi I_2, I_4, I_8, ..., cresce ad ogni passo, rimanendo però limitato da quello della semisfera. Possiamo trovare esplicitamente l'espressione generale del volume degli I_n, con $n = 2^k$.

Prendiamo ad esempio I_4 (il secondo passo nella figura). Questo risulta la somma dei cilindri generati dalla rotazione di tre rettangoli con altezza pari a $\frac{R}{4}$. Le basi b_1, b_2, b_3 sono date dalla minima distanza della circonferenza dall'asse AE rispettivamente nella prima, seconda e terza striscia, e si ottengono applicando il teorema di Pitagora: $b_1^2 = R^2 - \left(\frac{R}{4}\right)^2$, $b_2^2 = R^2 - \left(2\frac{R}{4}\right)^2$, $b_3^2 = R^2 - \left(3\frac{R}{4}\right)^2$.



Il volume di un singolo cilindro è dato dall'area del cerchio di base per l'altezza e dunque

$$\begin{aligned} I_4 &= \pi\frac{R}{4}(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \\ &= \pi\frac{R}{4}\left(\left(R^2-\left(\frac{R}{4}\right)^2\right)+\left(R^2-\left(2\frac{R}{4}\right)^2\right)+\left(R^2-\left(3\frac{R}{4}\right)^2\right)\right) \qquad (1) \end{aligned}$$

che si può anche scrivere come

$$\begin{aligned} I_4 &= \pi\frac{3}{4}R^3 - \pi\frac{R^3}{4^3}\left(1^2+2^2+3^2\right) \\ &= \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{4^3}\left(1^2+2^2+3^2+4^2\right)\right) \end{aligned} \tag{2}$$

In generale I_n è somma di $n-1$ cilindri di altezza $\frac{R}{n}$ e con raggi di base b_1, ..., b_{n-1} che, applicando il teorema di Pitagora, si ottengono dalla radice quadrata di $R^2 - \left(\frac{R}{n}\right)^2$, $R^2 - \left(2\frac{R}{n}\right)^2$, $R^2 - \left(3\frac{R}{n}\right)^2$, ..., $R^2 - \left(n-1\frac{R}{n}\right)^2$. Sommando i volumi dei singoli cilindri si ottiene dunque la seguente espressione, che corrisponde alla (1), per il volume:

$$I_n = \pi\frac{R}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(R^2 - \left(i\frac{R}{n}\right)^2\right) \tag{3}$$

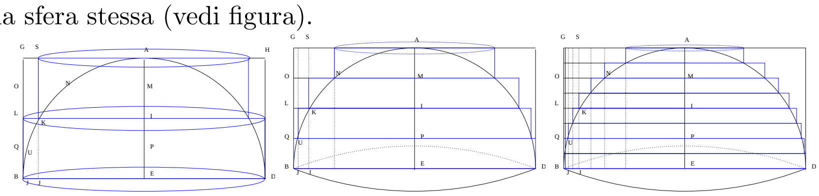
oppure anche

$$I_n = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\right) \tag{4}$$

che corrisponde alla (2). Usando poi l'espressione della somma dei primi n quadrati possiamo infine riscrivere la (4) come

$$I_n = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{n^3}\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right) = \pi\frac{2}{3}R^3 - \pi\frac{1}{2n}R^3 - \pi\frac{1}{6n^2}R^3 \tag{5}$$

In modo analogo, al-Haytham individua poi i solidi E_n formati da tanti cilindri con superficie esterna alla sfera. Ad ogni passo i solidi, pur continuando a contenere la sfera, questa volta descrescono, "avvicinandosi" sempre di più alla sfera stessa (vedi figura).



L'espressione del volume degli E_n si può trovare osservando che ogni E_n è costituito dagli stessi cilindri che compongono il corrispondente I_n, spostati di un passo verso l'alto, con l'aggiunta di un cilindro alla base che ha volume $\pi\frac{R^3}{n}$. Si ha dunque

$$E_n = I_n + \pi\frac{R^3}{n} = \pi\frac{2}{3}R^3 + \pi\frac{1}{2n}R^3 - \pi\frac{1}{6n^2}R^3 \tag{6}$$

La differenza fra un solido E_n e il corrispondente I_n, costituita da un insieme di corone cilindriche più un cilindro in alto, ha volume pari al cilindro di base di E_n, ossia $\pi\frac{R^3}{n}$. Il volume di questi solidi ottenuti per differenza può diventare dunque piccolo quanto si vuole, pur di fare un numero abbastanza grande di passi. E così anche le differenze $\mathcal{S} - I_n$ e $E_n - \mathcal{S}$ possono essere rese piccole quanto si vuole.

I risultati fin qui esposti, anche se tradotti e riscritti in notazione moderna, si ritrovano essenzialmente anche in al-Haytham. La sua dimostrazione, basata come detto sul metodo di esaustione, procede per assurdo: dapprima si prova che non può essere $\mathcal{S} > \frac{2}{3}\mathcal{C}$ e successivamente che non può essere $\mathcal{S} < \frac{2}{3}\mathcal{C}$.

Nella prima parte si suppone che sia $\mathcal{S} > \frac{2}{3}\mathcal{C}$. Questo significa che la differenza tra il volume della sfera e quello di $\frac{2}{3}\mathcal{C}$ è una quantità, maggiore di zero, $\mathcal{T}$. Si può trovare allora un solido di volume intermedio tra $\mathcal{S}$ e $\frac{2}{3}\mathcal{C}$. Pur di fare infatti un numero sufficiente di passi si arriva a costruire uno dei solidi I_n, interni alla sfera, che differisca dalla sfera stessa per una quantità minore di $\mathcal{T}$. Essendo dunque $\mathcal{S} - \frac{2}{3}\mathcal{C} = \mathcal{T}$ e $\mathcal{S} - I_n < \mathcal{T}$ sarà allora $I_n > \frac{2}{3}\mathcal{C}$. D'altra parte però, se si confronta il volume di $\frac{2}{3}\mathcal{C}$, pari a $\frac{2}{3}\pi R^3$, con quello di I_n, dato dalla (5), si osserva che $I_n < \frac{2}{3}\mathcal{C}$. Siamo dunque arrivati a un assurdo.

Nella seconda parte si procede in modo analogo. Supponiamo infatti che sia ora $\mathcal{S} < \frac{2}{3}\mathcal{C}$. Tra gli E_n che contengono la sfera, facendo un numero sufficiente di passi, se ne può trovare uno di volume abbastanza vicino alla sfera da verificare le disuguaglianze $\mathcal{S} < E_n < \frac{2}{3}\mathcal{C}$. Ma dall'espressione (6) del volume di E_n si ricava invece $E_n > \frac{2}{3}\mathcal{C}$. Siamo dunque giunti all'assurdo anche in questo caso. Se ne conclude che deve essere $\mathcal{S} = \frac{2}{3}\mathcal{C}$ e la dimostrazione di al-Haytham è compiuta.

Usando le stesse costruzioni geometriche di al-Haytham possiamo arrivare alla stessa conclusione percorrendo una via diretta, senza seguire quella dell'assurdo. Arrivati all'espressione del volume degli I_n e degli E_n, possiamo infatti introdurre un ragionamento radicalmente diverso chiedendoci cosa succede dell'espressione stessa del volume quando n cresce. Si tratta di un punto cruciale in cui il nostro procedimento, forte dell'utilizzo del calcolo, si differenzia sostanzialmente da quello di al-Haytham. Utilizzando l'operazione di limite possiamo infatti trovare direttamente il valore a cui le due espressioni tendono. Chi sa calcolare i limiti riconoscerà facilmente che dalla (5) si ottiene $\pi\frac{2}{3}R^3$. Questo si può intuire osservando che il primo termine compare in tutti gli I_n e che gli ultimi due termini diventano sempre più piccoli via via che n cresce. In modo del tutto analogo si trova che i volumi degli E_n decrescono tendendo allo stesso valore $\pi\frac{2}{3}R^3$. Si può dunque da qui concludere che il volume della sfera, compreso tra quello degli I_n e quello degli E_n, dovrà essere $\pi\frac{2}{3}R^3$.

Il calcolo che abbiamo seguito, e che porta a determinare il volume della semisfera attraverso i due limiti, corrisponde al calcolo secondo la definizione di Riemann dell'integrale $\int_0^R \pi(R^2 - z^2)dz$ dove z varia sull'asse AE. La funzione integranda $f(z) = \pi(R^2 - z^2)$ dà l'area del cerchio che si ottiene tagliando la semisfera con un piano perpendicolare all'asse alla quota z, il cui raggio è infatti la radice di $R^2 - z^2$. Il volume di uno degli I_n si può vedere come l'integrale della funzione semplice minorante $\phi_n(z)$ che in ogni intervallo determinato dalla suddivisione dell'asse AE in n parti ha valore costante pari all'area del più piccolo dei cerchi che si ottengono dalla sezione della semisfera con piani perpendicolari all'asse z in quell'intervallo (che si ha in corrispondenza dell'estremo destro dell'intervallo). L'integrale di una funzione semplice si ottiene infatti sommando i prodotti delle ampiezze degli intervalli con il valore assunto dalla funzione in quello stesso intervallo; in altre parole si moltiplicano le ampiezze degli intervalli per le aree dei cerchi ottenuti in corrispondenza degli estremi destri degli intervalli stessi, ottenendo il volume dei cilindri che compongono I_n, e se ne fa poi la somma. In modo analogo gli E_n corrispondono a una successione di funzioni semplici maggioranti $\psi_n(z)$ che in ogni intervallo determinato dalla suddivisione dell'asse AE hanno valore costante pari all'area del cerchio maggiore ottenuto sezionando la semisfera in quell'intervallo (che si ha in corrispondenza dell'estremo sinistro dell'intervallo). Attraverso il calcolo del limite della prima e della seconda famiglia si ottiene che l'estremo superiore degli integrali delle funzioni minoranti e quello inferiore delle maggioranti coincidono e sono uguali a $\pi\frac{2}{3}R^3$. E questo, per definizione, è allora proprio il valore dell'integrale $\int_0^R \pi f(z)dz$.