Cavalieri: volume dell'apice parabolico

Uno dei risultati principali della *Geometria* riguarda i solidi mutuamente similari: due solidi mutuamente similari, generati da due figure F_1 ed F_2 e con una sezione qualsiasi, stanno tra loro come i solidi generati dalle stesse figure e da un quadrato (o nel linguaggio di Cavalieri, come tutti i quadrati di F_1 stanno a tutti i quadrati di F_2). La ricerca di Cavalieri sarà indirizzata per lo più a calcolare i rapporti tra tutti i quadrati di coppie opportune di figure, salvo poi in una serie di corollari stabilire i risultati corrispondenti per i solidi corrispondenti a sezione circolare.

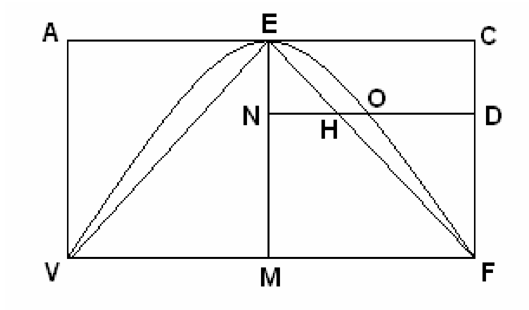
Vediamo ad esempio la proposizione 20 del quarto libro:

> IV, Prop 20: Tutti i quadrati di un rettangolo con la stessa base e lo stesso asse di una parabola sono il doppio di tutti i quadrati della parabola stessa. Tutti i quadrati di una parabola poi sono una volta e mezza tutti i quadrati di un triangolo posto sulla medesima base e attorno allo stesso asse.

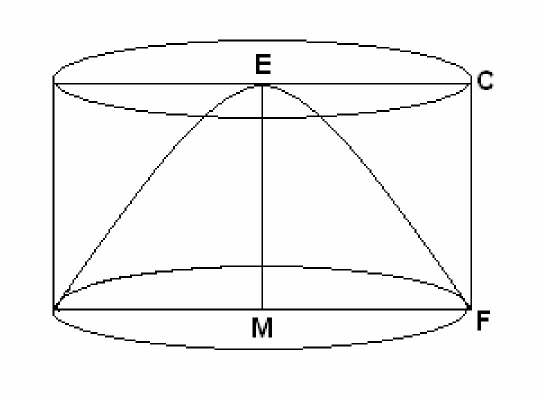
Con riferimento alla figura, tutti i quadrati del rettangolo *EMFC* sono il doppio di tutti i quadrati della [semi]-parabola *EMFO*, e questi ultimi sono una volta e mezza tutti i quadrati del triangolo.

Preso sull'asse un qualsiasi punto *N*, per la proprietà della parabola il quadrato di *DN* sta al quadrato di *NO* come *ME* sta a *NE*, ossia come *MF* (cioè *DN*) sta a *NH*. Abbiamo allora quattro serie di grandezze: due costanti (il quadrato di *DN* e il segmento *MF*) e due variabili (il quadrato di *ON* e il segmento *NH*), e si ha

$$DN^2 : ON^2 = DN : NH.$$



Per il principio di Cavalieri , si avrà allora che tutti i quadrati del rettangolo *EF* stanno a tutti i quadrati della semiparabola *EMFO* come tutte le linee del rettangolo *EF* stanno a tutte le linee del triangolo *EMF*, ossia come il rettangolo *EF* sta al triangolo *EMF*. Ma il rettangolo *EF* è il doppio del triangolo *EMF*, dunque tutti i quadrati del rettangolo *EF* sono doppi di tutti i quadrati della semiparabola *EMFO*. La dimostrazione della seconda parte del teorema è immediata, perché tutti i quadrati del rettangolo *EF* stanno a tutti i quadrati del triangolo *EMF* come il cilindro *AF* sta al cono *VEF*, ossia come 3 sta a 1.



Se ora facciamo ruotare la figura attorno all'asse *EM*, il rettangolo *EF* descrive un cilindro, mentre la parabola *EMF* descrive un conoide parabolico (paraboloide di rotazione), due solidi mutuamente similari. Per quanto detto sopra, il rapporto tra il cilindro e il conoide è uguale al rapporto tra tutti i quadrati del rettangolo *EF* a tutti i quadrati della parabola *EMF*, e quindi il cilindro è doppio del paraboloide.

Se invece della parabola si considera il trilineo *ECFO*, si dimostra che tutti i quadrati del rettangolo *EF* sono sei volte tutti i quadrati del trilineo (proposizione 30).

Dalla relazione

$$ND \times NO : ND^2 = NO : ND$$

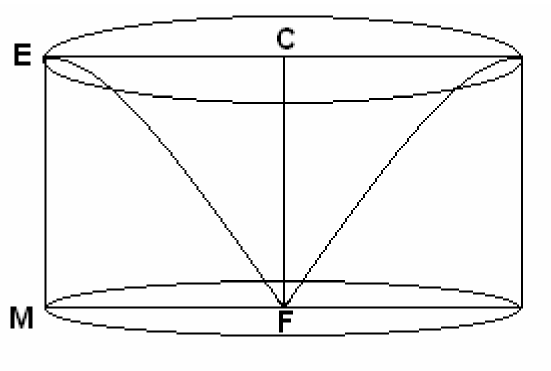
segue che tutti i rettangoli $ND \times NO$ stanno a tutti i quadrati del rettangolo *EF* come tutte le linee della semiparabola *EMFO* stanno a tutte le linee del rettangolo *EF*, cioè come la semiparabola *EMFO* sta al rettangolo *EF*, dunque come 2 sta a 3 ovvero come 4 sta a 6.

D'altra parte tutti i quadrati della semiparabola *EMFO* sono la metà di tutti i quadrati del rettangolo *EF,* cioè stanno a tutti i quadrati del rettangolo *EF* come 3 sta a 6. Di conseguenza tutti i rettangoli $ND \times NO$ meno tutti i quadrati NO^2 della semiparabola *EMFO* stanno a tutti i quadrati del rettangolo *EF* come 1 sta a 6. Ora $ND \times NO - NO^2 = OD \times NO$, e quindi tutti i rettangoli $OD \times NO$ stanno a tutti i quadrati del rettangolo *EF* come 1 sta a 6, e due volte tutti i rettangoli $OD \times NO$ stanno a tutti i quadrati del rettangolo *EF* come 2 sta a 6.

Poiché come si è detto tutti i quadrati della semiparabola *EMFO* stanno a tutti i quadrati del rettangolo *EF* come 3 sta a 6, avremo che tutti i quadrati ND^2 del rettangolo *EF* meno tutti i quadrati NO^2 della semiparabola *EMFO* meno due volte tutti i rettangoli $OD \times NO$ stanno a tutti i quadrati del rettangolo *EF* come 1 sta a 6.

Ma $ND^2 - NO^2 - 2\ OD \times NO = DO^2$, e dunque tutti i quadrati del triangolo mistilineo *ECFO* stanno a tutti i quadrati del rettangolo *EF* come 1 sta a 6.

Se ora si ruota la figura attorno alla retta *CF*, si ottiene un cilindro uguale al precedente, mentre il trilineo *ECF* genera un solido, che Cavalieri chiama "apice parabolico".



Anche questi due sono solidi mutuamente similari, e quindi l'apice parabolico starà al cilindro come tutti i quadrati del trilineo *ECF* stanno a tutti i quadrati del parallelogrammo *EF*. Pertanto il cilindro sarà sei volte l'apice parabolico.