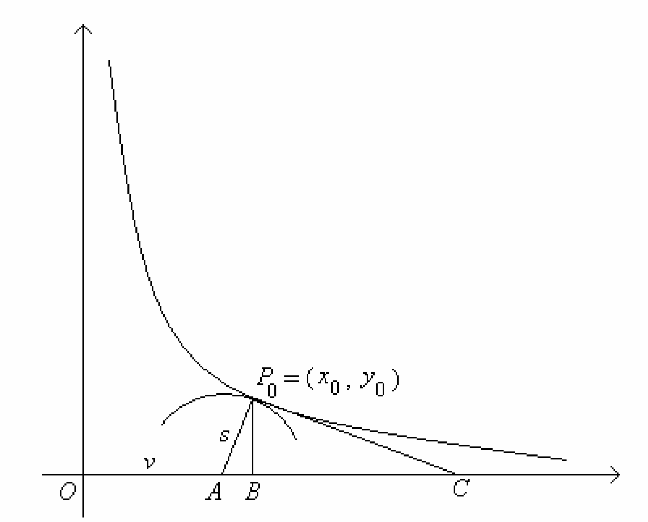
I metodi di Descartes, di De Beaune e di Fermat a confronto: la tangente all'iperbole.

Calcolo della tangente all'iperbole di equazione xy=1 con il metodo di Descartes.



Eliminando la y dal sistema dell'iperbole e del cerchio di centro v e raggio s:

$xy = 1$
$(x-v)^2 + y^2 = s^2$

si ottiene l'equazione

$$(x-v)^2 + \frac{1}{x^2} = s^2$$

e moltiplicando per x^2:

$x^2 (x^2-2vx+v^2) +1-s^2x^2 = 0.$

Quest'ultima deve avere una radice doppia per $x=x_0$, e dunque deve essere

$x^2 (x^2-2vx+v^2) +1-s^2x^2 = (x-x_0)^2 (ax^2+bx+c).$

Sviluppando ambo i membri e raccogliendo i termini con la stessa potenza si ottiene:

$$x^4 - 2vx^3 + (v^2 - s^2)x^2 + 1 = ax^4 + (b - 2x_0a)x^3 + (c + ax_0^2 - 2bx_0)x^2 + (bx_o^2 - 2cx_0)x + cx_o^2$$

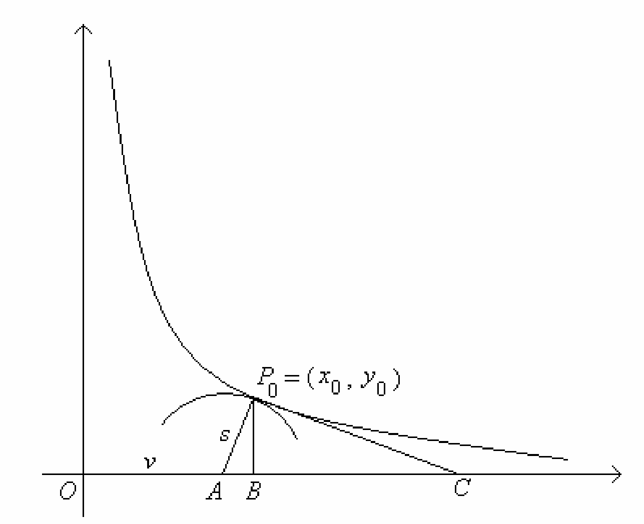
e dunque

$$\begin{aligned}
&a=1\\
&2ax_0-b=2v\\
&c + ax_0^2 - 2bx_0 = v^2 - s^2\\
&bx_0-2c=0\\
&cx_0^2 = 1
\end{aligned}$$

Dall'ultima equazione si ha $c = 1/x_0^2 = y_0^2$, e quindi dalla penultima segue $b = 2/x_0^2 = 2y_0^2$.
Introducendo questo valore nella seconda equazione e ricordando che a=1 si trova

$$v = x_0 - y_0^3.$$

A questo punto il valore di s si potrebbe ricavare dalla terza equazione, ma è irrilevante.



Nella figura si ha $OA = v$, $OB = x_0$, $BP_0 = y_0$, e quindi $AB = x_0 – v = y_0^3$. I triangoli ABP_0 e P_0BC sono simili, e dunque $BC : BP_0 = BP_0 : AB$, da cui

$$BC = \frac{BP_0^{\ 2}}{AB} = \frac{y_0^2}{y_0^3} = \frac{1}{y_0} = x_0.$$

Se invece del metodo di Descartes (circonferenza tangente) si usa quello di De Beaune (retta tangente) si dovrà considerare il sistema

$xy = 1$
$y = mx + c$.

Eliminando la y si trova l'equazione

$mx^2 + cx – 1 = 0$

che dovendo avere una radice doppia in x_0 dovrà verificare l'identità

$mx^2 + cx – 1 = a\,(x – x_0)^2$

Uguagliando i coefficienti delle varie potenze si trova

$$a = m$$
$$–2ax_0 = c$$
$$ax_0^2 = –1$$

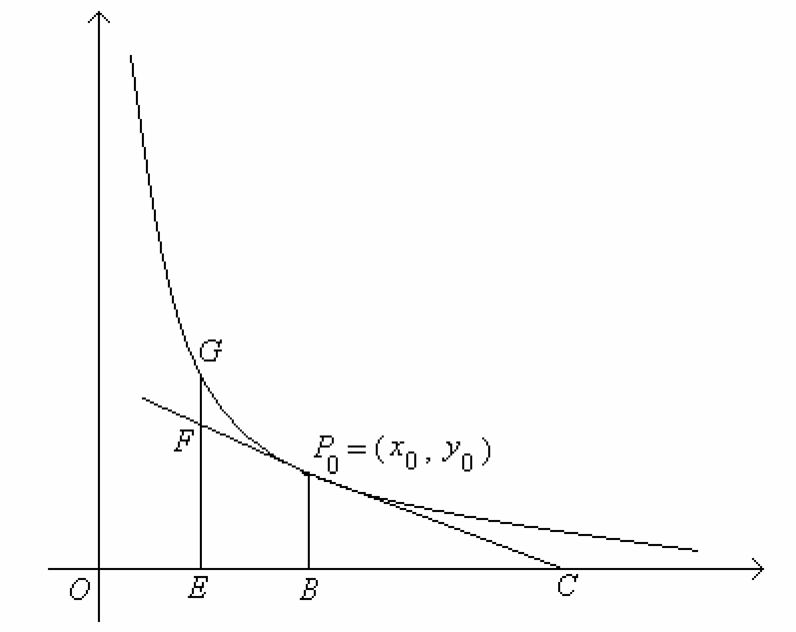
da cui si ricava facilmente

$$a = p = -\frac{1}{x_0^2} = -y_0^2$$
$c = –2ax_0 = 2y_0$.

L'equazione della retta tangente sarà allora

$y = 2y_0 - y_0^2 x.$

Questa retta incontrerà l'asse delle x nel punto C di ascissa $OC = 2x_0$; poiché $OB = x_0$ si avrà allora $BC = x_0$, in accordo con il risultato precedente.



Veniamo ora al metodo di Fermat, che come vedremo si muove su un terreno misto tra la geometria classica e la geometria analitica.

Si parte dalla proprietà caratteristica dell'iperbole, che in questo caso è l'equazione xy=1, o scritta in termini di segmenti $OB \times BP_0$ =1. Sia C il punto in cui la tangente incontral'asse delle x, e conformandoci alle notazioni di Fermat che seguendo Viète indicava le incognite e le variabili con le vocali e le quantità note con le consonanti, poniamo $BC=a$ e $BE=e$. Il metodo di adequazione di Fermat ci dice di scrivere la proprietà caratteristica dell'iperbole relativamente non al punto G sulla curva ma al punto F sulla tangente. Si avrà allora l'adequazione $OE \times EF \approx 1$. D'altra parte, per le proprietà dei triangoli simili FEC e P_0BC, risulta FE: $P_0B=EC$:BC, da cui[1]

$$FE = P_0 B \frac{EC}{BC} = y_0 \frac{a+e}{a}.$$

Introducendo tale valore nell'adequazione $OE \times EF \approx 1$ avremo $(x_0 - e) y_0 \frac{a+e}{a} \approx 1$ e dunque ricordando che $x_0 y_0$=1,

$$\frac{e}{a} - e y_0 - e^2 \frac{y_0}{a} \approx 0.$$

Dividendo per e e moltiplicando per a si trova infine

$$1 - a y_0 - e y_0 \approx 0.$$

Se ora si pone e=0, questa adequazione diventa un'equazione che dà il valore dell'incognita a:

$$a = \frac{1}{y_0} = x_0$$

in accordo con quanto trovato con gli altri metodi.

[1] Notiamo che se si fosse preso il punto E a destra di B avremmo avuto e<0 e il ragionamento sarebbe stato lo stesso.