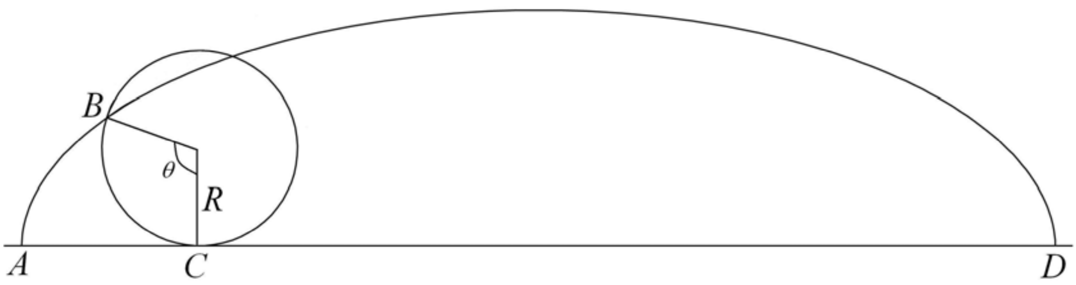
La cicloide.

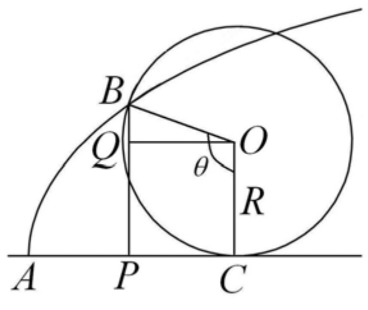
La curva nota oggi come cicloide fu considerata per primo da Galileo, che in un primo momento congetturò che l'area della figura racchiusa fosse tre volte quella del cerchio che la genera. Più tardi, forse a causa di qualche esperimento mal riuscito, si convinse che questo non era vero, a torto perché poco dopo la sua morte questo risultato fu dimostrato indipendentemente da numerosi studiosi: Torricelli, Roberval, Fermat e Pascal. Torricelli e Roberval ne determinarono la tangente in un punto arbitrario, mediante la composizione dei movimenti.

1. *Descrizione della cicloide.*

Consideriamo un cerchio di raggio R che partendo dal punto A rotoli senza strisciare sulla retta AD. Il punto B, che all'inizio del moto coincide con A, descrive una curva ABD detta cicloide. In un giro, la ruota avrà percorso un cammino pari alla sua circonferenza, e quindi la base AD della cicloide misura $2\pi R$.



Calcoliamo le coordinate di un punto generico B sulla cicloide. Sia θ l'angolo che corrisponde a questo punto; l'arco BC ha lunghezza $R\theta$ e il segmento AC, che per la definizione della cicloide è uguale all'arco BC, avrà anch'esso lunghezza $R\theta$.

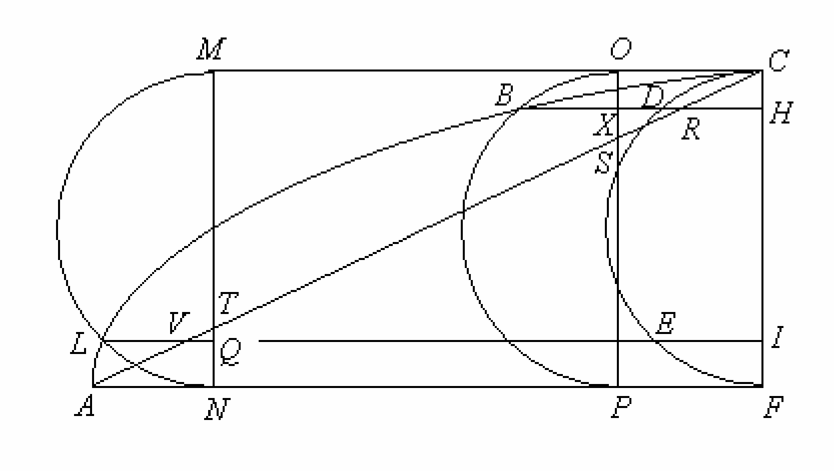


Per trovare le coordinate di B consideriamo la figura qui accanto. Si ha $BQ = R$ sen $(\theta-\pi/2) = -\cos\theta$ e $PC = QO = R\cos(\theta-\pi/2) = R$ sen θ; pertanto

$$x = AP = AC - PC = R\,(\theta - \text{sen}\,\theta)$$
$$y = PB = PQ + BQ = R\,(1 - \cos\theta).$$

Se pensiamo che l'angolo θ cresca con velocità uniforme v=1, risulta $\theta = t$. La cicloide si può allora immaginare descritta da due movimenti, uno traslatorio uniforme lungo l'asse x, di equazioni $x = Rt$, $y = 0$, l'altro da un moto rotatorio uniforme in senso antiorario attorno al punto (0,1), di equazioni $x = -R$ sen t, $y = R(1-\cos t)$. La composizione dei due moti genera la cicloide.

2. *L'area della cicloide con il metodo degli indivisibili* (*secondo Torricelli*)



Consideriamo la semicicloide *ALBCFA* e sul diametro *CF* prendiamo due punti *H* e *I* alla stessa distanza dal centro. I segmenti *HD, IE, XB* e *LQ* sono uguali, come anche sono uguali gli archi *OB*, *CD* e *LN*. Essendo poi uguali *CH* e *IF*, saranno uguali anche *AV* e *RC*. Inoltre, per la definizione della cicloide, la base *AF* sarà uguale alla semicirconferenza *MLN* e l'arco *LN* al segmento *AN*, cosicché l'arco rimanente *ML* sarà uguale al segmento *NF*. Per lo stesso motivo, l'arco *BP* è uguale al segmento *AP* e l'arco *BO* al segmento *PF*.

Poiché *AN* = arco *LN* = arco *OB* = *PF*, risulta anche *AT=SC*, e dato che *AV* = *RC* si ha anche *VT=SR*. I triangoli *VTQ* e *SRX* sono allora uguali e quindi *VQ=RX*. Di qui segue che *LV+BR=LQ+BX* = *EI+DH*. Questo è vero quali che siano i punti *H* e *I*, purché alla stessa distanza dal centro del semicerchio *CDEF*.

Ora le tutte le linee corrispondenti *LV* e *BR* formano la figura *ALBCA*, mentre le linee *EI* e *DH* danno luogo al semicerchio *CDEF*. Di conseguenza queste due figure sono uguali. D'altra parte il triangolo *ACF* è doppio del semicerchio *CDEF*, perché ha la base uguale alla semicirconferenza e l'altezza uguale al diametro. In conclusione la mezza cicloide *ALBCFA* è tripla del semicerchio, e la cicloide è tripla del cerchio generatore.

3. *La cicloide come curva isocrona.*

È ben noto che le oscillazioni di un pendolo non sono rigorosamente isocrone, e che il periodo di oscillazione aumenta coll'aumentare dell'ampiezza. Detto in altre parole, un corpo che cade senza attrito lungo una circonferenza (come il peso dell'orologio a pendolo) impiega tempi diversi a seconda dell'ampiezza, tanto maggiori quanto più ampi sono gli archi percorsi.

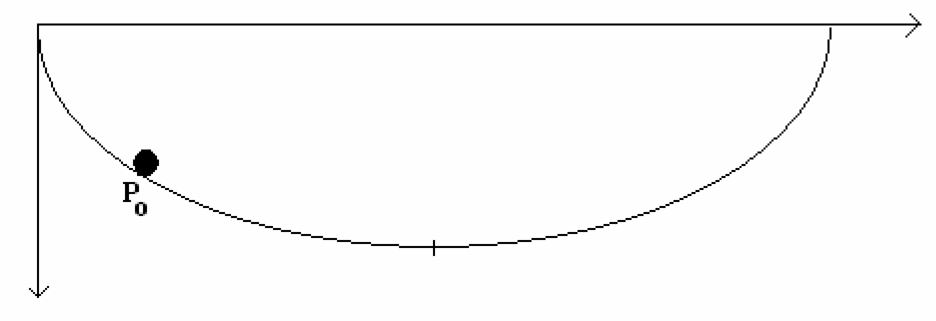
C'è una curva lungo la quale le oscillazioni sono rigorosamente isocrone? Il problema non è solo teorico, perché se si riuscisse a far oscillare il peso di un pendolo lungo una curva siffatta, ne risulterebbe un orologio più preciso del pendolo normale. Quando nel Seicento questo problema si pose, l'orologio a pendolo era agli inizi, e questo miglioramento non era trascurabile.

Ma veniamo al problema matematico: la risposta è positica e la curva isocrona è la cicloide. Questa proprietà fu scoperta da Christian Huygens, che la divulgò nel suo celebre "Orologium oscillatorium".

Consideriamo la cicloide (rovesciata) di equazioni parametriche

$$x = t - \text{sen}\, t$$
$$y = 1 - \cos t$$

con l'asse delle y rivolto verso il basso, e sia P_0 un punto su di essa, corrispondente al valore t_0 del parametro ($0<t_0<\pi$).



Se si fa cadere un grave lungo la cicloide a partire dalla quiete in P_0, il tempo per arrivare al punto più basso sarà

$$T = \int \frac{ds}{v} = \int_{t_0}^{\pi} \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\sqrt{2g[y(t) - y(t_0)]}}\, dt = \sqrt{\frac{2}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \frac{\sin\frac{t}{2}}{\sqrt{\cos t_0 - \cos t}}\, dt$$

dove si è usata la relazione

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2 - 2\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}.$$

Ricordando inoltre che $\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2} - 1$, e dunque $\cos t_0 - \cos t = 2\left(\cos^2\frac{t_0}{2} - \cos^2\frac{t}{2}\right)$, si ottiene, ponendo $\cos\frac{t}{2} = u$ e $\cos\frac{t_0}{2} = u_0$,

$$T = \frac{1}{g}\int_{t_0}^{\pi} \frac{\sin\frac{t}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{t_0}{2} - \cos^2\frac{t}{2}}} dt = -\frac{2}{g}\int_{u_0}^{0} \frac{du}{\sqrt{u_0^2 - u^2}} = \frac{2}{g}\int_{0}^{1} \frac{dw}{\sqrt{1 - w^2}} = \frac{\pi}{g}$$

che è indipendente da t_0. In conclusione, il tempo di caduta da un qualsiasi punto sulla cicloide fino al punto più basso è sempre lo stesso, qualsiasi sia il punto iniziale; in altre parole, la cicloide è isocrona.

4. *Un po' di calcolo delle variazioni.*

Tra le soluzioni del problema della brachistocrona, proposto da Johann Bernoulli nel ***, la soluzione data dal fratello Jacob conteneva in germe quello che poi sarebbe diventato il calcolo delle variazioni, una disciplina matematica fiorente ancor oggi. Le basi di questa teoria furono poste da Eulero e da Lagrange.

Il problema fondamentale del calcolo delle variazioni consiste nel trovare una funzione $y(t)$ che rende minimo l'integrale

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx$$

tra tutte le funzioni che assumono valori assegnati agli estremi a e b dell'intervallo di integrazione. Per affrontare questo problema, supponiamo che la funzione $y(x)$ minimizzi l'integrale, e consideriamo una funzione $w(x)$ che si annulla in a e in b. Se h è un arbitrario numero reale, la funzione $y+hw$ assume gli stessi valori di y agli estremi; per le proprietà di minimo di y si ha allora $F(y) \leq F(y+hw)$. Detto altrimenti, la funzione $g(h)=F(y+hw)$ ha un minimo per $h=0$. Avremo quindi $g'(0)=0$, ossia

$$\frac{d}{dh}\int_a^b f(x, y(x)+hw(x), y'(x)+hw'(x))\, dx\Big|_{h=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')w + \frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,y')w'\right) dx = 0.$$

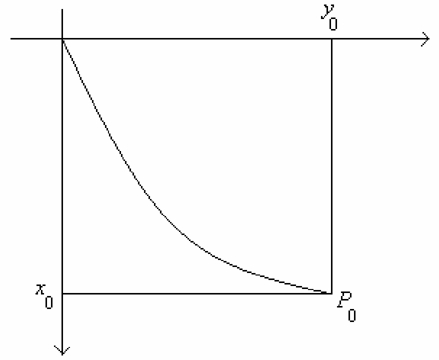
Se ora integriamo per parti l'ultimo termine, e ricordiamo che $w(a)=w(b)=0$, otteniamo

$$\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,y')\right)\right] w\, dx = 0$$

Quest'ultima relazione deve essere verificata per ogni funzione $w(x)$ che si annulla in a e in b; ne segue che la quantità in parentesi quadra si deve annullare. La funzione minimizzante $y(x)$ sarà dunque una soluzione dell'equazione differenziale

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x), y'(x))\right) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x), y'(x))$$

Questa equazione si chiama *equazione di Eulero* (o di Eulero-Lagrange) del funzionale $F(y)$. Se come avviene in molti casi il funzionale $F(y)$ è convesso, le soluzioni dell'equazione di Eulero, che come abbiamo visto corrisponde all'annullarsi della derivata prima, sono effettivamente dei minimi di $F(y)$.



5. *La brachistocrona.*

Consideriamo nel piano xy (con l'asse y orizzontale e l'asse x diretto verso il basso) due punti: l'origine O e un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ nel primo quadrante ($x_0>0$, $y_0>0$). Sia $y=y(x)$ l'equazione di una curva che congiunge O e P_0; il tempo che un grave impiega nel cadere lungo la curva da O a P_0 è dato da

$$T = \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gx}}\, dx.$$

Se si impone che il tempo T sia minimo, avremo l'equazione di Eulero

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dy'}\left(\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gx}}\right)\right]=0$$

ossia

$$\frac{d}{dy'}\left(\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{x}}\right)=c\,.$$

con c costante. Sviluppando, si ha

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=c\sqrt{x}$$

da cui si ricava

$$\frac{dy}{dx}=\frac{c\sqrt{x}}{\sqrt{1-c^2x}}$$

Ponendo $c^2x=u^2$, risulta $c^2dx = 2udu$, e quindi

$$\frac{dy}{du}=\frac{2}{c^2}\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Integrando, si ha

$$y=\frac{1}{c^2}\left(\arcsin u-u\sqrt{1-u^2}\right)+a$$

e imponendo la condizione $y(0)=0$ si trova $a=0$. Tornando alla variabile x:

$$y(x)=\frac{1}{c^2}\arcsin c\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x(1-c^2x)}}{c}.$$

Questa è l'equazione di una cicloide. Per trovare la forma usuale, poniamo $x=R(1\text{-}\cos t) =$
$= 2R \sin^2 t/2$, con $2R=1/c^2$. Si ha allora $c^2x = \sin^2 t/2$, e dunque

$$y=2R\frac{t}{2}-2R\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}=R(t-\sin t).$$

Queste sono le equazioni parametriche di una cicloide (si ricordi che il ruolo delle variabili x e y è scambiato). Il raggio R del cerchio generatore dovrà poi essere aggiustato in modo che la curva passi per il punto P_0.