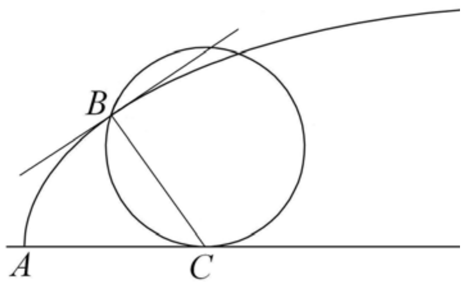
Descartes e Fermat sulla tangente alla cicloide.

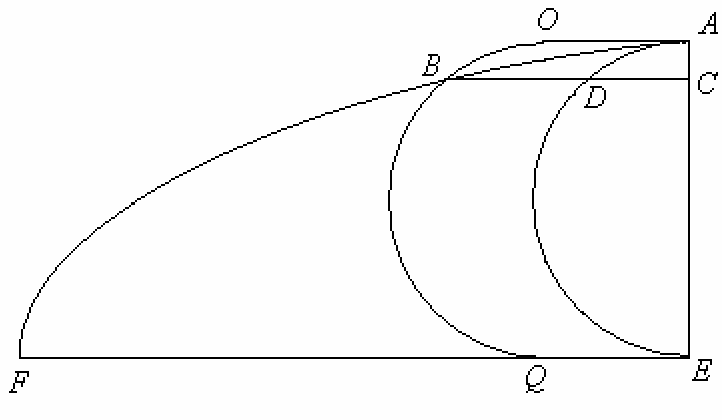
Lo studio della cicloide occupò quasi tutti i matematici della prima metà del Seicento. Roberval e Torricelli ne determinarono l'area, Pascal trovò una quantità di risultati: centro di gravità, volumi e centri di gravità dei solidi ottenuti ruotandola attorno alla base e all'asse. Sempre Roberval trovò la tangente alla cicloide utilizzando la sua generazione come composizione di due movimenti.

Anche Descartes e Fermat risolsero il problema della tangente alla cicloide, anche se con due metodi completamente differenti. Fermat lo vide come un banco di prova del suo metodo di adequazione nella sua massima generalità, dunque in definitiva lo inquadrò in un metodo generale di tracciamento delle tangenti alle curve sia algebriche che trascendenti. Al contrario Descartes, il cui metodo –come abbiamo visto– si applicava solo alle curve algebriche, escogitò un ragionamento ad hoc, valido è vero per la sola cicloide, ma estrememente brillante e conciso.

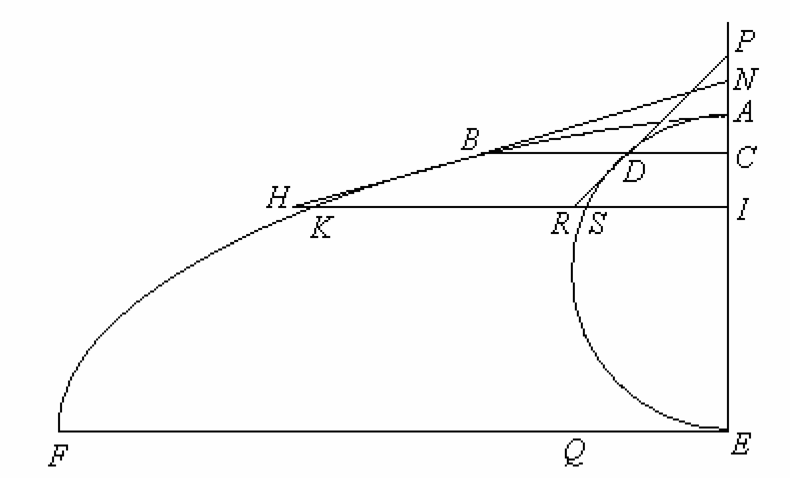


L'idea centrale di Descartes si basa sul fatto che il cerchio generatore della cicloide rotola senza strisciare sulla retta AC; dunque ad ogni istante il punto C, in cui il cerchio generatore tocca la retta AC, è immobile e il moto si riduce a una rotazione attorno a C.
Di conseguenza la retta CB, che unisce il centro isatntaneo di rotazione C al punto B sulla cicloide, è ortogonale alla cicloide; la perpendicolare a CB per B sarà allora la tangente cercata.

Al contrario di descartes, Fermat trova la tangente alla cicloide applicando il suo metodo dell'adequazione, che consiste nello scrivere la proprietà caratteristica della curva in esame sui punti della tangente. Per prima cosa dunque, occorrerà trovare la proprietà caratteristica della cicloide. Fermat considera la (semi)-cicloide *FBA* e il (semi)-cerchio generatore *ADE*. Preso un punto qualsiasi C sul diametro, si traccia la retta orizzontale *CB* che incontra la cicloide in *B*.



Immaginiamo ora di spostare il semicerchio *ADE* fino a farlo passare per *B*; per la proprietà della cicloide l'arco *BQ* sarà uguale al segmento *FQ*. Poiché l'intero segmento *FE* è uguale alla semicirconferenza *ADE*, e l'arco *BQ* è uguaale all'arco *DE*, il segmento *QE* sarà uguale all'arco *AD*. D'altra parte i segmenti *BD* e *QE* sono uguali, e quindi in definitiva il segmento *BD* è uguale all'arco *AD*. In conclusione, se si prende un qualsiasi punto *C* sul diametro e si tira la retta *CB* che incontra la circonferenza in *D* e la cicloide in *B*, l'arco *AD* è uguale al segmento *BD* compreso tra la circonferenza e la cicloide. Questa è la proprietà caratteristica da cui Fermat parte per determinare la tangente alla cicloide nel punto *B*.



Una volta individuata la proprietà caratteristica, tracciamo le tangenti alla circonferenza e alla cicloide nei punti corrispondenti D e B; la prima sarà nota (in particolare sarà dteerminato il punto P in cui incontra l'asse, la seconda incognita. Per determinarla, bisogna trovare il punto N, ossia la lunghezza del segmento CN.

Nella figura a fianco, i segmenti *AC=b, BC=c, PC=d, PD=f, BD=g, DC=h* saranno quantità note[1], mentre l'incognita è la lunghezza del segmento *CN=a* (seguendo Fermat, che usa le notazioni di Viète, indichiamo con le consonanti le quantità note e con le vocali le incognite). Prendiamo ora un punto *H* sulla tangente, e tirata la retta *HI* indichiamo con *K, R* e *S* le sue intersezioni con la cicloide, con la tangente alla circonferenza e con la circonferenza. Poniamo poi *CI=e*[2].

Per la similitudine dei triangoli *HNI* e *BCN* si ha *HI*:*BC*=*NI*:*NC*, e dunque

$$HI = BC\frac{NI}{NC} = c\frac{a+e}{a}.$$

Per applicare ora il metodo di fermat, bisogna scrivere la proprietà caratteristica della cicloide relativamente al punto *H* sulla tangente. Si può anche prendere il punto *R* sulla tangente alla circonferenza, e scrivere *HR* al posto di *KS*. Avremo allora

$$HR \approx \text{arco } AS = \text{arco } AD + \text{arco } DS = BD + \text{arco } DS.$$

A questo punto entra un'altra caratteristica essenziale del metodo di Fermat, quella che ne consente l'applicazione anche alle curve trascendenti come la cicloide. Dice Fermat:

> se si vuole si possono prendere le ordinate sulle tangenti trovate col metodo precedente al posto di quelle sulle curve; e inoltre (e questo è il pregio del metodo) si possono prendere porzioni delle tangenti già trovate al posto delle porzioni corrispondenti delle curve, in modo da trovare l'adequazione.

Nel nostro caso, si può sostituire l'arco DS con la porzione DR della tangente. Avremo dunque

$$HR \approx BD + DR.$$

Si tratta ora di esprimere *HR* e *DR* in termini delle grandezze date. Per la similitudine dei triangoli *PRI* e *PDC* si ha *DR*:*CI*=*PD*:*PC*, e dunque

$$DR = e\frac{f}{d}.$$

---

[1] Si suppone qui che sia nota la tangente alla circonferenza, che comunque può essere trovata con il metodo di Fermat (può essere un utile esercizio). Naturalmente le varie grandezze non sono indipendenti (ad esempio si ha $c=g+h$ e $f^2=d^2+h^2$); noi abbiamo usato una lettera diversa per ognuna per non appesantire le notazioni.

[2] Se il punto *K* si trova tra *B* e *N*, la quantità *e* sarà negativa.

Quanto al primo membro, risulta $HR = HI - RI$, e per la similitudine dei triangoli PRI e PDC avremo RI:DC=PI:PC, da cui $RI = h\dfrac{d+e}{d}$.

Si ha dunque in conclusione:

$$c\frac{a+e}{a} - h\frac{d+e}{d} \approx g + e\frac{f}{d}.$$

Sviluppando e ricordando che $c=g+h$, troviamo

$$c\frac{e}{a} - h\frac{e}{d} = e\frac{f}{d}$$

e quindi in conclusione

$$a = \frac{dc}{f+h}.$$