Integrazione per serie delle equazioni differenziali.

Per illustrare il metodo di Newton, consideriamo l'equazione

$$\dot{y} = 1 - 3x + y^2 + x^2 + x^2 y$$

di cui cercheremo la soluzione $y(x)$ con $y(0)=0$[1]. Dall'equazione segue allora che $\dot{y}(0) = 1$, e dunque il primo termine dello sviluppo sarà $y=x$. Introducendo questo valore nell'equazione, e conservando solo i termini di primo grado, avremo $\dot{y} = 1 - 3x$, da cui $y = x - \frac{3}{2}x^2$. Di nuovo, si può inserire questo valore nell'equazione, e conservare solo i termini di secondo grado, e poi ancora, ogni volta aumentando di un grado.

Per visualizzare meglio il calcolo dei termini successivi, si può disegnare una tabella nella quale la prima riga contiene i termini a secondo membro dell'equazione nei quali non compare la *y*, messi in ordine delle potenze crescenti della *x*, mentre nella prima colonna si metteranno i termini in cui compare la *y*:

	$+1 \quad -3x \quad +x^2$
y^2	*
x^2y	*
$\dot{y}$	$+1$
y	$+x$

Il primo passo è quello che abbiamo descritto: si considerano solo i termini di grado 0 (nei quali la *y* non figura dato che $y(0)=0$) e si trova che il primo termine dello sviluppo è *x*. Introducendo questo valore al posto di *y* si ottiene $y^2=x^2$ e $x^2y=x^3$, che si possono entrambi trascurare perché dopo i termini di grado 0 occorre considerare quelli di grado 1. Si ha allora

	$+1 \quad -3x \qquad +x^2$
y^2	* *
x^2y	* *
$\dot{y}$	$+1 \quad -3x$
y	$+x \quad -3x^2/2$

[1] In realtà il valore in 0 non è essenziale, e si può imporre alla *y* di assumere un valore qualsiasi $y(0)=a$. Infatti ci si può ricondurre al caso precedente ponendo $z(x)=y(x)-a$. La funzione *z* verifica un'equazione che si ottiene scrivendo $z+a$ al posto di *y* nell'equazione di partenza, e si ha ovviamente $z(0)=0$.

Il secondo termine dello sviluppo è dunque $-3x^2/2$, e dunque $y= x-3x^2/2$. A questo punto si considerano i termini in x^2: si ha $y^2=x^2$, dato che gli altri termini del quadrato di y contengono potenze di ordine superiore. Analogamente, possiamo ignorare il termine x^2y, dato che la potenza più bassa è x^3.

Si ha allora la terza colonna

	$+1$	$-3x$	$+x^2$
y^2	*	*	$+x^2$
x^2y	*	*	*
$\dot{y}$	$+1$	$-3x$	$+2x^2$
y	$+x$	$-3x^2/2$	$+2x^2/3$

Veniamo ora ai termini in x^3, che proverranno solo dal quadrato della y e dal termine x^2y. Come sopra, nel calcolare questi termini potremo trascurare tutte le potenze superiori al cubo, come anche quelle inferiori, che sono già state prese in considerazione. Facendo il quadrato di y, il termine in x^3 proviene solo dal doppio prodotto tra x e $-3x^2/2$, e dunque vale $-3x^3$. Analogamente, x^2y contribuisce con un termine x^3. Si ha allora:

	$+1$	$-3x$	$+x^2$	
y^2	*	*	$+x^2$	$-3x^3$
x^2y	*	*	*	$+x^3$
$\dot{y}$	$+1$	$-3x$	$+2x^2$	$-2x^3$
y	$+x$	$-3x^2/2$	$+2x^3/3$	$-x^4/2$

Continuiamo ora calcolando i termini in x^4. Nel quadrato di y i termini in x^4 vengono dal quadrato di $-3x^2/2$ (che dà $9x^4/4$) e dal doppio prodotto tra $+x$ e $+2x^3/3$, che fa $4x^4/3$. In totale si ha allora $43x^4/12$. Invece da x^2y proviene un termine $3x^4/2$. Avremo dunque

	$+1$	$-3x$	$+x^2$		
y^2	*	*	$+x^2$	$-3x^3$	$43x^4/12$
x^2y	*	*	*	$+x^3$	$-3x^4/2$
$\dot{y}$	$+1$	$-3x$	$+2x^2$	$-2x^3$	$+25x^4/12$
y	$+x$	$-3x^2/2$	$+2x^3/3$	$-x^4/2$	$+5x^5/12$

Proseguendo allo stesso modo si ottiene il termine successivo

	$+1$	$-3x$	$+x^2$				
y^2	*	*	$+x^2$	$-3x^3$	$43x^4/12$	$-3x^5$	$+\dots$
x^2y	*	*	*	$+x^3$	$-3x^4/2$	$+2x^5/3$	$+\ldots$
$\dot{y}$	$+1$	$-3x$	$+2x^2$	$-2x^3$	$+25x^4/12$	$-7x^5/3$	$+\dots$
y	$+x$	$-3x^2/2$	$+2x^3/3$	$-x^4/2$	$+5x^5/12$	$-7x^6/18$	$+\dots$

eccetera.