Lo sviluppo in serie dell'esponenziale.

Lo sviluppo dell'esponenziale e^x illustra esaurientemente le tecniche di manipolazione algebrica delle serie proprie del calcolo newtoniano. Il punto di partenza è la serie di Mercator per il logaritmo. Posto

$$x = \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} - \ldots$$

si avrà $y = e^x - 1$. Si tratta allora di ricavare y dalla serie precedente, esprimendolo a sua volta come una serie di potenze in x:

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \cdots$$

Ponendo questo valore di y nella serie di partenza, si avrà

$$x = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \cdots - \frac{(ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \cdots)^2}{2} + \frac{(ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \cdots)^3}{3} -$$
$$- \frac{(ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \cdots)^4}{4} + \frac{(ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \cdots)^5}{5} - \cdots$$

Sviluppiamo ora le potenze a secondo membro, raccogliendo i termini alla stessa potenza. Avremo

$$x = ax + (b - \frac{a^2}{2})x^2 + (c - ab + \frac{a^3}{3})x^3 + (d - ac - \frac{b^2}{2} + a^2 b - \frac{a^4}{4})x^4 +$$
$$+ (e - bc - ad + ab^2 + a^2 c - a^3 b + \frac{a^5}{5})x^5 + \cdots$$

Trattandosi di un'identità, il primo termine a secondo membro dovrà essere uguale a x, tutti gli altri a 0. Avremo allora

$$\begin{aligned}
a &= 1 \\
b &= \tfrac{1}{2} \\
c &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6} \\
d &= \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{24} \\
e &= \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{5} = \tfrac{1}{120}
\end{aligned}$$

e quindi

$$e^x = 1 + y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \cdots = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \times 3} + \frac{x^4}{2 \times 3 \times 4} + \frac{x^5}{2 \times 3 \times 4 \times 5} + \cdots$$

Lo stesso risultato viene trovato da Eulero (*Introductio in analysin infinitorum*, 1748) con il ragionamento seguente.

Poiché $a^0=1$, se ω è un numero infinitamente piccolo risulterà $a^\omega=1+\psi$, con ψ anch'esso infinitesimo. Poniamo $\psi=k\omega$, con k da determinare, dipendente ovviamente dalla base a. Preso ora un numero i qualunque, avremo

$$a^{i\omega} = (1+k\omega)^i = 1 + ik\omega + \frac{i(i-1)}{1\times 2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1\times 2\times 3}k^3\omega^3 + \cdots$$

Si prenda ora $i=z/\omega$, cosicché i sarà un numero infinitamente grande. Avremo dalla relazione precedente

$$a^z = 1 + kz + \frac{1}{1\times 2}\frac{i(i-1)}{i^2}k^2z^2 + \frac{1}{1\times 2\times 3}\frac{i(i-1)(i-2)}{i^3}k^3z^3 + \cdots$$

D'altra parte, poiché i è infinitamente grande, risulta $(i-1)/i = 1$, $(i-2)/i = 1$, ecc. e dunque

$$a^z = 1 + kz + \frac{1}{1\times 2}k^2z^2 + \frac{1}{1\times 2\times 3}k^3z^3 + \cdots$$

Il numero k dipende dalla base a; infatti posto $z=1$ nella relazione precedente si ha

$$a = 1 + k + \frac{k^2}{1\times 2} + \frac{k^3}{1\times 2\times 3} + \cdots$$

Dato poi che la base si può prendere a piacere, potremo sceglierla in modo che risulti $k=1$, ossia

$$a = 1 + 1 + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{1\times 2\times 3} + \cdots \approx 2{,}718281828459045235360 28$$

un valore che si indica con la lettera e. Con questa scelta risulta

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2\times 3} + \frac{z^4}{2\times 3\times 4} + \frac{z^5}{2\times 3\times 4\times 5} + \cdots$$

in accordo con il risultato precedente.