Dedekind: irrazionalità delle radici quadrate

Se D è un numero intero che non sia un quadrato perfetto, allora la sua radice è irrazionale. Di questo teorema sono state date varie dimostrazioni, a cominciare dalla dimostrazione "pitagorica" dell'irrazionalità della radice di 2. Quella che segue, che si trova nel volume di Dedekind "La continuità e i numeri irrazionali" è particolarmente semplice.

Sia dunque D un numero intero che non sia il quadrato di un altro numero intero. Il numero D cadrà allora tra i quadrati di due interi consecutivi λ e $\lambda+1$:

$$\lambda^2 < D < (\lambda+1)^2.$$

Supponiamo ora per assurdo che $\sqrt{D}$ sia razionale: $\sqrt{D} = \frac{t}{u}$, con t e u interi, e tra tutte le frazioni equivalenti a quella a secondo membro, prendiamo quella con il denominatore più piccolo (cioè quella ridotta ai minimi termini, ossia con t e u primi tra loro) . Risulterà $t^2 = Du^2$, e moltiplicando per u^2 le disuguaglianze precedenti avremo $\lambda^2u^2 < Du^2 = t^2 < (\lambda+1)^2u^2$ e quindi

$$\lambda u < t < (\lambda+1)u.$$

Ne segue che il numero intero $u_1 = t - \lambda u$ è positivo e minore di u. Posto ora $t_1 = Du - \lambda t$, risulta

$$t_1 = \frac{t^2}{u^2}u - \lambda t = \frac{t}{u}(t - \lambda u) = t\frac{u_1}{u}$$

e quindi $0 < t_1 < t$. Si ha inoltre

$$t_1^2 - Du_1^2 = (Du - \lambda t)^2 - D(t - \lambda u)^2 = D^2u^2 + \lambda^2t^2 - 2Du\lambda t - Dt^2 - D\lambda^2u^2 + 2Dt\lambda u =$$
$$= \lambda^2(t^2 - Du^2) + D(Du^2 - t^2) = (\lambda^2 - D)(t^2 - Du^2) = 0$$

e dunque $t_1^2 - Du_1^2 = 0$, cioè $\sqrt{D} = \frac{t_1}{u_1}$, con $t_1 < t$ e $u_1 < u$. Questo è assurdo, perché avevamo supposto che la frazione t/u fosse quella con il denominatore più piccolo. Si può allora concludere che la radice di D è un numero irrazionale.

Una seconda dimostrazione, che si estende facilmente alle radici di ordine superiore, è la seguente.

Sia D un numero intero, che non sia il quadrato di un altro numero intero, e scriviamolo come prodotto dei suoi fattori primi:

$$D = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n} .$$

Osserviamo che poiché D non è un quadrato perfetto, almeno uno degli esponenti $k_1, k_2, \ldots, k_n$ deve essere dispari. Supponiamo che sia k_1. Per assurdo, supponiamo ora che $\sqrt{D}$ sia razionale: $\sqrt{D} = \frac{t}{u}$, con t ed u primi tra loro, e scriviamo anche t e u come prodotto dei loro fattori primi:

$$\begin{aligned} t &= q_1^{h_1} q_2^{h_2} \cdots q_m^{h_m} \ , \\ u &= r_1^{i_1} r_2^{i_2} \cdots r_s^{i_s} \end{aligned} \quad .$$

Poiché t e u sono primi tra loro, nessuno dei fattori di t è anche fattore di u e viceversa. Dalla relazione $Du^2=t^2$ segue

$$r_1^{2i_1} r_2^{2i_2} \cdots r_s^{2i_s} \ p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n} = q_1^{2h_1} q_2^{2h_2} \cdots q_m^{2h_m} \quad .$$

I fattori p_1, p_2, ... p_n devono tutti essere presenti a secondo membro, e dunque sono tutti distinti da r_1, r_2, ... , r_s , perché altrimenti t ed u avrebbero dei fattori comuni. Ma per ipotesi il fattore p_1 a primo membro ha esponente dispari, mentre tutti gli esponenti a secondo membro sono pari. Di conseguenza la relazione precedente non può sussistere e quindi la radice di D non può essere un numero razionale.

Questa dimostrazione si estende facilmente alle altre radici; ad esempio se D non è un cubo perfetto, la sua radice cubica è irrazionale. Infatti se fosse $\sqrt[3]{D} = \dfrac{t}{u}$, si giungerebbe alla relazione

$$r_1^{3i_1} r_2^{3i_2} \cdots r_s^{3i_s} \ p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n} = q_1^{3h_1} q_2^{3h_2} \cdots q_m^{3h_m}$$

con k_1 non divisibile per 3 mentre tutti gli esponenti a secondo membro lo sono. Al lettore il compito di sviluppare i dettagli, come pure di estendere la dimostrazione alle radici di qualsiasi ordine.