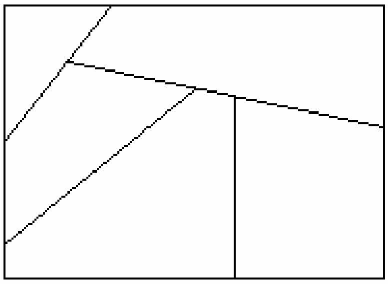
Equivalenza ed equiscomponibilità di poligoni.

Ricordiamo che si chiamano equivalenti due poligoni (o più in generale due figure) che hanno la stessa area. Sempre due figure piane si dicono equiscomponibili se una di esse si può dividere in un numero finito di parti che ricomposte danno l'altra figura.

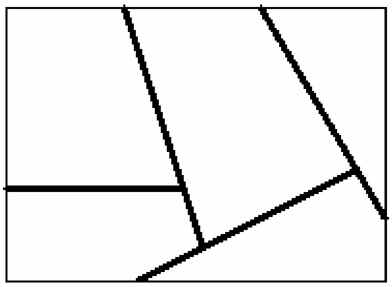
È evidente che due figure equiscomponibili sono equivalenti, dato che sono costituite dalle stesse parti disposte in modo differente. Vogliamo mostrare che per i poligoni vale anche il viceversa: due poligoni equivalenti, cioè con la stessa area, sono equiscomponibili.

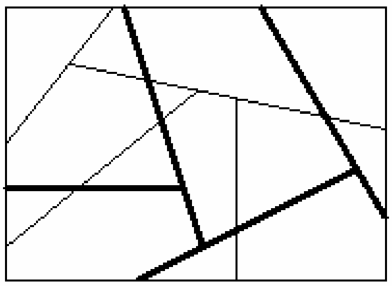
A questo scopo, cominciamo a dimostrare che l'equiscomponibilità è transitiva, cioè che se una figura *A* è equiscomponibile con una seconda figura *B*, e quest'ultima è equiscomponibile con una terza figura *C*, allora *A* è equiscomponibile con *C*. Siccome *A* e *B* sono equiscomponibili, si può dividere *A* in un certo numero di parti che ricomposte danno *B*. Supponiamo che la divisione di *B* sia quella in figura.



Questi pezzi possono essere ricomposti per formare la figura *A* (che non importa mostrare).

Supponiamo ora che la stesa figura *B* possa essere spezzata (ovviamente in maniera diversa) per dare una figura *C*, secondo le linee spesse come mostrato a destra.



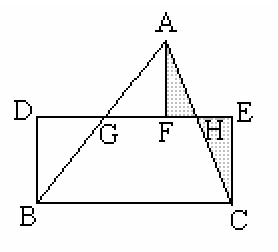


Se ora si sovrappongono le due divisioni, si ottiene una suddivisione della figura *B*, che può servire sia per comporre la *A* (se si opera come se esistessero solo le linee sottili) sia per ricomporre la *C* (se si prendono in considerazione solo le linee grosse). Di conseguenza, partendo dalla *A* si può ottenere la *C* passando prima attraverso la *B* e poi da questa alla *C*. Si può allora concludere che *A* è equiscomponibile con *C*.

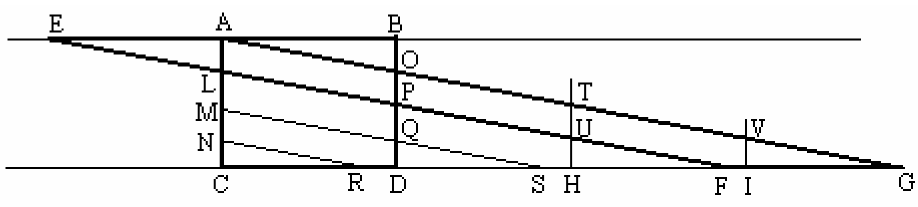
Osserviamo di passaggio, anche se non ne avremo bisogno nel seguito, che l'equiscomponibilità è una relazione riflessiva (una figura è equiscomponibile con sé stessa) e simmetrica (se *A* è equiscomponibile con *B*, allora *B* sarà equiscomponibile con *A*). Avendo appena mostrato che è anche transitiva, ne segue che l'equiscomponibilità è una relazione di equivalenza.

La transitività della relazione di equiscomponibilità è l'ingrediente essenziale per dimostrare che due poligoni equivalenti sono equiscomponibili. La dimostrazione verrà fatta in sei passi.

1. *Un triangolo è equiscomponibile con un rettangolo con la stessa base e altezza metà*, come segue immediatamente dalla figura, in cui il triangolo *ABC* è equiscomponibile con il rettangolo *DECB*, dato che i triangoli *AGF* e *BGD*, così come i triangoli *AFH* e *CEH*, sono uguali.

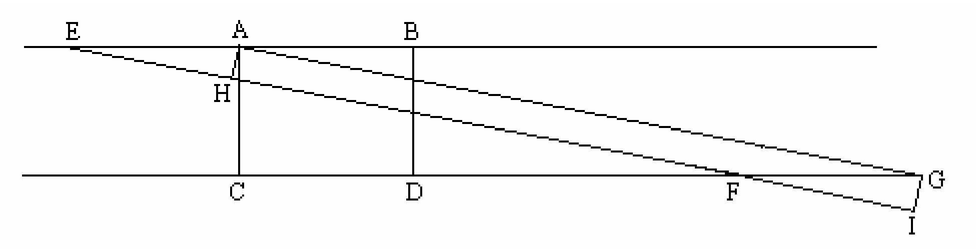


2. *Un rettangolo è equiscomponibile con un parallelogrammo che ha la stessa base e la stessa altezza.*



Sia *ABCD* il rettangolo e sia *EAGF* il parallelogrammo con base *EA=AB* e altezza *AC*. Si segnino sulla retta *CG* i punti *H* e *I* tali che *DH=HI=CD*, e si traccino le rette verticali passanti per *H* e *I*, nonché le rette *MS* e *CR* parallele ai lati *AG* ed *EF* del parallelogrammo, con *LM = MN = AL*. I triangoli *EAL* e *ABO* sono uguali, come pure sono uguali i parallelogrammi *LPQM* e *OTUP*, le figure *MQDRN* e *TVIFU* e infine i triangoli *NRC* e *VGI*.

3. *Due rettangoli con la stessa area sono equiscomponibili*.



Sia *ABCD* il rettangolo con la base più corta. Prolunghiamo i lati *AB* e *CD*, e riportiamo l'altro rettangolo *AGIH* in modo che un estremo coincida con *A* e l'altro cada in *G* sulla retta *CD*. Prolunghiamo il lato *HI* fino a incontrare la retta *AB* in *E*.
I due triangoli rettangoli *EAH* e *FGI* sono uguali perché *EA=FG* e *AH=GI*, e quindi il rettangolo *AGIH* è equiscomponibile con il parallelogrammo *EAGF* , che dunque risulta equivalente al rettangolo *ABDC*. Poichè *ABDC* e *EAGF* hanno la stessa altezza, dovranno avere anche la stessa base, e quindi *EA = FG = AB*.
Il parallelogrammo *EAGF* ha base *EA=AB* e altezza *AC*, e quindi per quanto abbiamo visto sopra è equiscomponibile con il rettangolo *ABCD*. Siccome era anche equiscomponibile con *AGIH*, ne segue che i due rettangoli *ABCD* e *AGIH* sono equiscomponibili con lo stesso parallelogrammo *EAGF*, e dunque tra loro.

4. *Un triangolo è equiscomponibile con un rettangolo che ha la stessa area e ha come base un segmento dato AB*.

Come abbiamo visto in 1., un triangolo è equiscomponibile con un rettangolo con la stessa base e altezza metà. Quest'ultimo per quanto detto sopra è equiscomponibile con un rettangolo con la stessa area e base *AB*. Per la proprietà transitiva, il triangolo di partenza è equiscomponibile con quest'ultimo rettangolo.

5. *Un poligono è equiscomponibile con un rettangolo che ha la stessa area e ha come base un segmento dato AB*.

Un poligono si può dividere in un numero finito di triangoli, ognuno dei quali è equiscomponibile con un rettangolo di base *AB*. Mettendo questi rettangoli uno sopra l'altro si ottiene un rettangolo di base *AB*, equiscomponibile con il poligono dato.

6. *Due poligoni P e Q con la stessa area sono equiscomponibili*.

Il poligono *P* è equiscomponibile con un rettangolo con la stessa area e base *AB*. Lo stesso si può dire di *Q*. Siccome *P* e *Q* hanno la stessa area, anche i due rettangoli avranno la stessa area, e dato che hanno la stessa base avranno la stessa altezza, cioè saranno uguali. Ma allora *P* e *Q* sono equiscomponibili con lo stesso rettangolo, e dunque tra loro.