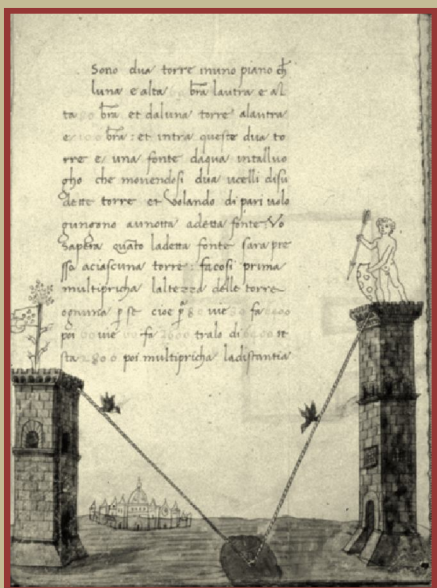
Elisabetta Ulivi

Dipartimento di Matematica e Informatica

Soluzioni algebriche di problemi geometrici nella trattatistica dell'abaco



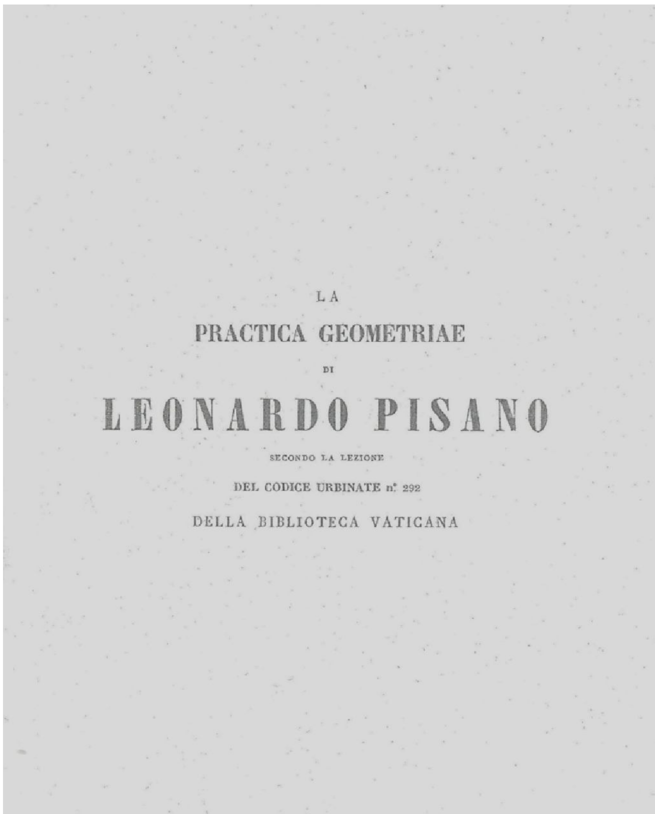
nella excelsa ciptà di Firenze

a dì XVIII di octobre MMXIV

Leonardo Pisano o Fibonacci (n.c. 1170/80-m.d. 1241)

Liber abaci **(1202, 1228)**
Practica geometriae **(1220/21)**

Boncompagni B. (a cura di), *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimo terzo*. Vol. I, Il *Liber abbaci* secondo la lezione del Codice Magliabechiano C.I.2616, Badia Fiorentina, n. 73, Roma, Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche, 1857. Vol. II, *La Practica geometriae* secondo la lezione del Codice Urbinate n. 292 della Biblioteca Vaticana; *Opuscoli* secondo un Codice della Biblioteca Ambrosiana di Milano contrassegnato E. 75, Parte superiore, Roma, Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche, 1862.


LA
PRACTICA GEOMETRIAE
DI
LEONARDO PISANO
SECONDO LA LEZIONE
DEL CODICE URBINATE n.° 292
DELLA BIBLIOTECA VATICANA

TRATTATI MANOSCRITTI

TRATTATI DI VARIO CONTENUTO

Iacopo da Firenze, *Tractatus algorismi* (1307): BRF, Ricc. 2236

Anonimo, *Libro delle ragioni d'abaco* (ca 1395): BNF, Conv. soppr. G. 7. 1137

Anonimo, *Regole di geometria e della cosa* (ca 1460): BNF, Palat. 575

Benedetto da Firenze, *Trattato d'abaco* (ca 1465): una copia in BNF, Magl. XI.1 (1473)

Piero della Francesca, *Trattato d'abaco* (ca 1470/80): BMLF, Ash. 359*

Luca Pacioli, *Tractatus mathematicus ad discipulos perusinos* (1477-1480): BAV, Vat. Lat. 3129

Filippo Calandri, *Aritmetica* (ca 1485/90): BRF, Ricc. 2669

TRATTATI DI GEOMETRIA PRATICA

Anonimo, *L'arte de la giometria* (ca 1430): BUB, Ms. 205. I

Anonimo, *Trattato di geometria pratica* (ca 1460): BCS, L.IV.18

Anonimo, *Tractato di praticha di geometria* (ca 1460): BNF, Palat. 577

Anonimo, *Tractato di praticha di geometria* (ca 1465): BAV, Ottob. Lat. 3307

Orbetano da Montepulciano, *Regole di geometria pratica* (ca 1464): BRF, Moreni 130

Leon Battista Alberti, *Ludi rerum mathematicarum* (1450-1452): BNF, Magl.VI. 243

Francesco di Giorgio Martini, *La praticha di geometria* (ca 1470): BMLF, Ash. 361

OPERE A STAMPA

LIBRI DI VARIO CONTENUTO

Filippo Calandri, *De arimethrica opusculum* (1492)

Francesco Pellos, *Compendion de lo abaco* (1492)

Luca Pacioli, *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (1494): Parte II, *Tractatus geometrie*.

Francesco Feliciano, *Scala gramaldelli* (1526)

Giovanni Sfortunati, *Nuovo lume* (1534)

Girolamo Cardano, *Practica arithmeticae* (1539)

Pietro Cataneo, *Le pratiche delle due prime matematiche* (1559)

Niccolò Tartaglia, *General trattato di numeri et misure* (1556-1560)

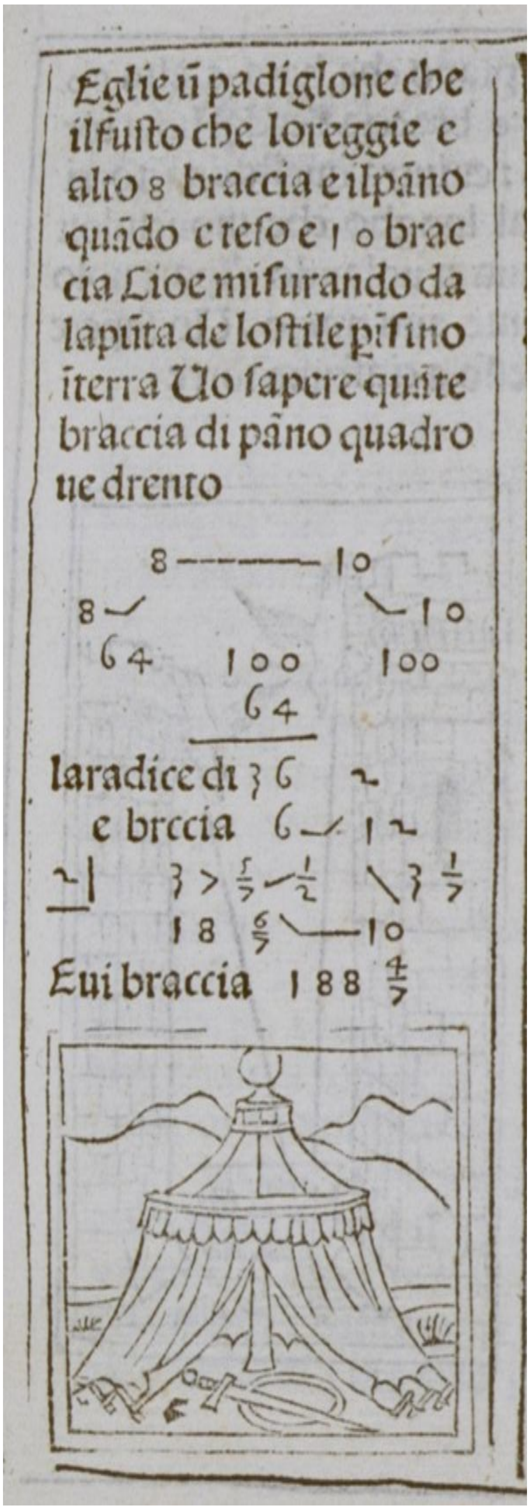
LIBRI DI GEOMETRIA

Cosimo Bartoli, *Del modo di misurare* (1564)

Geronimo Pico Fonticolano, *Geometria* (1597). Poi *Tesoro di matematiche considerationi* (1645)

Giovanni Pomodoro, *Geometria prattica* (1599)

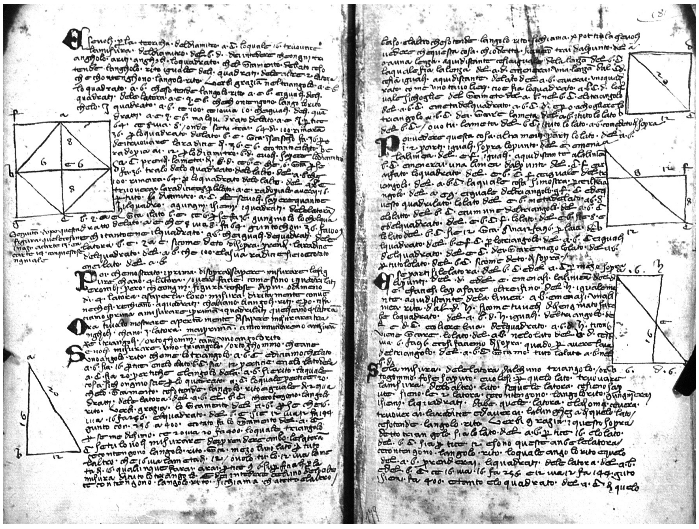
Calcolo di aree e volumi



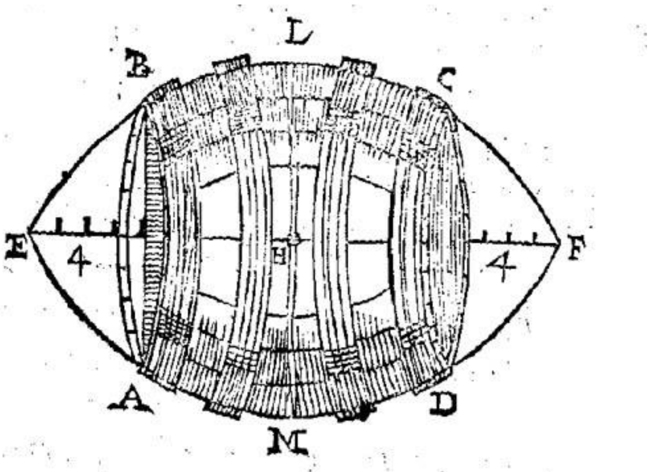
Eglie ũ padiglone che ilfusto che loreggie e alto 8 braccia e ilpãno quãdo e teso e 10 braccia Cioe misurando da lapũta de lostile p̃ifino ĩterra Uo sapere quãte braccia di pãno quadro ue drento

8 — 10
8 — 10
64 100 100
64
laradice di 36
e braccia 6 — 12
21 3 $\frac{5}{7}$ — $\frac{1}{2}$ 3 $\frac{1}{7}$
18 $\frac{6}{7}$ — 10
Eui braccia 188 $\frac{4}{7}$

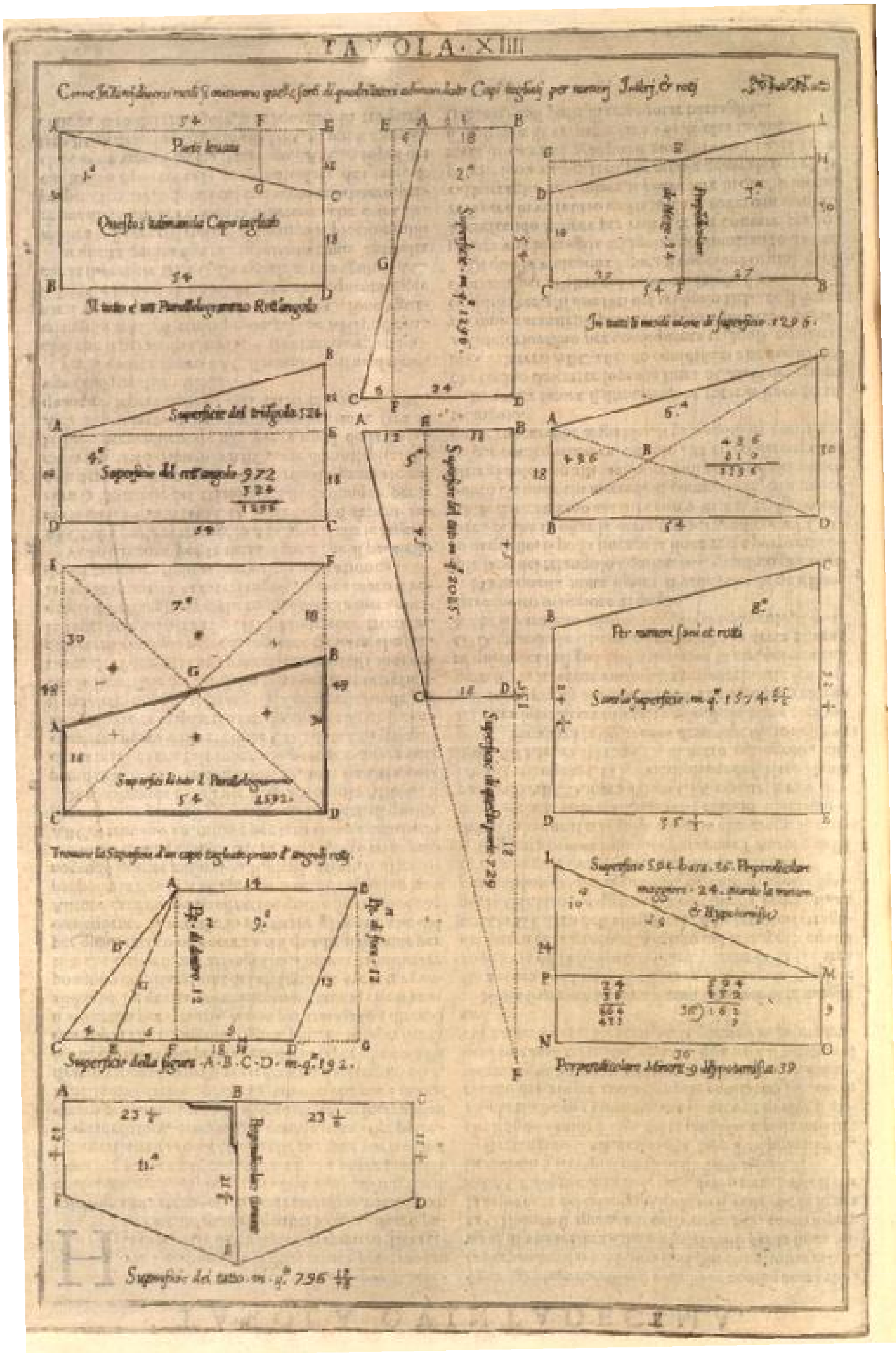
F. Calandri, *Aritmetica* (1492)



BNF, Conv. soppr. G. 7. 1137 (ca 1395)



C. Bartoli, *Del modo di misurare* (1564)



G. Pomodoro, *Geometria prattica* (1599)

Costruzioni con riga e compasso

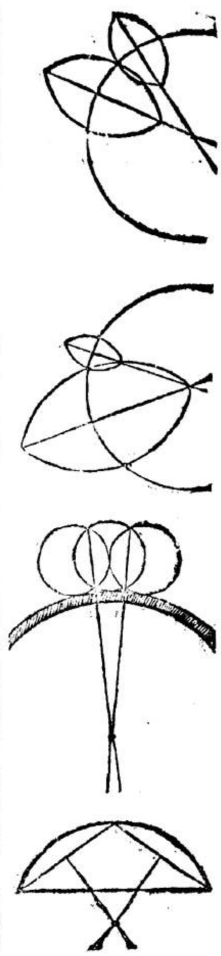
cẽtro, cioe el põto che mettẽdo el ſeſto in q̃llo põto e cõ la cir-
cõferẽtia toccaſſe q̃lli. 3. põti e vogliolo trouare a la prima vol
ta che pianta lo ſeſto p trouarlo che non e poco, farai coſi nelli
doi põti che ſe ſonno piu ap̃ſſo fali vna biangula o voi dir vna
figura che pare vno ouo, e coſi farai anchora ali altri doi potẽ-
ti facẽdo che q̃l di mezo ſerua a doi vna ſimile figura cõe vedi
qua da cãto in figura, e poi torai la riga e fendi cadauna de q̃l-
le figure ouale p mezo deli põti dele ſue giõture e tira la linea
vn poco piu fora coſi circa la mita dela figura, e doue quelle li
nee ſe interſegaranno quella interſegadura ſera lo centro e lo
ponto che cercaui &c.

Ele vno taiapietra o murar o marangõ che ha trouato una
parteſella de vn volto o da porta, o da vſſo, el voria trouare el
diametro del tõdo che p̃duce q̃l poco archetto vel volto: farai
cõe vedi in la figura qua da cãto, fa tre tõdi ſopra il ditto volto
liq̃li apelo apelo tochino ditto volto e fa che tutti tre ſiano eq̃
li, e li doi di fora apel apelo ſe tocchino, e poni el pie del ſeſto ĩ
mezo el tocamẽto deli doi tõdi e forniſſe il cerchio e tu forma
rai doe biangule vel figure ouale, e cõ la riga iuſtamente tira la
linee p mezo le giõture deli ſoi capi e tirale bone longhette e
doue q̃lle linee ſe interſegheranno q̃llo ſera lo põto ch̃ cerchi,
cioe el cẽtro del tondo che fece quella volta, fatta &c.

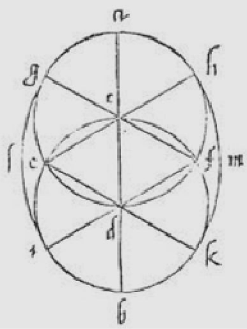
Eglie vn muraro o taia pietra che vol fare vno volto ſopra
vna porta o vſſo, e ſi ha la largheza dela porta e lalteza del vol
to el voria ſubito trouare el centro del tondo che forma quel
volto, fa coſi ſempre metti el põto nel mezo del volto che voi
fare, e poi togli la riga e tira vna linea recta dal cantone a me-
zo el volto, e coſi farai da laltro lato. E poi diuide q̃lle linee iu-
ſtamẽte nel mezo, e poi poni lo ſquadro iuſtamẽte a q̃lla linea
acanto al põto de mezo e da q̃llo tira vna linea recta vn poco
lõghetta, e coſi farai da laltro lato, e doue le ditte linee ſe inter
ſegaranno iui ſera lo cẽtro del volto che tu cerchi come qua ĩ
figura poi vedere, fatta &c.

E uoria mettere vno triangulo equilatero in vno altro triã
gulo equilatero e metterlo al cõtrario e lo magior che vi poſſi
capire: adimando quãto ſara p lato lo piccolo: ſapi che la mita
del lato del grande triãgulo ſera el lato delo piccolo cioe ſe lo
lato del grande e. 10. el lato del piccolo e. 5. fatta.

Perche molte volte accade al vero miſurador liuelare ouer
cõdure acque da vno loco a vno altro loco p far fontane ouer
p adacquare prati o cãpi &c. E p che a far tal coſe el nõ ſe getti

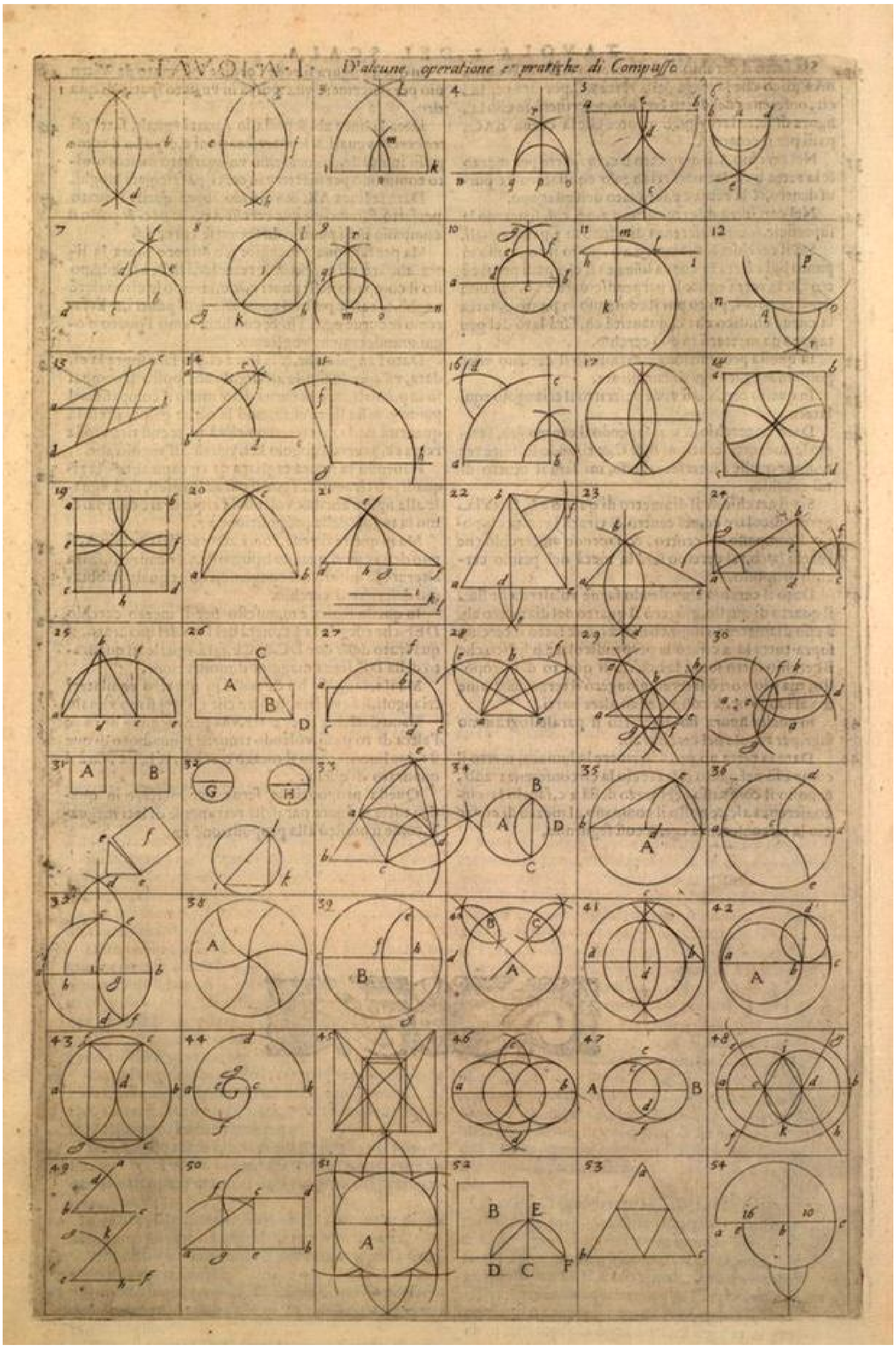


questa, volendo che la longhezza di tal figura sia quanto, che la longhezza della linea
de tal linea in tre parti eguale nelli duoi ponti. c. & . d. & ſopra il ponto. c. deſcriue il cerchio. g a
h. ſecondo la quantita di. c a. la circonferenza delquale paſſa per il ponto. d. & coſi ſopra il pon-
to. d. deſcriue il cerchio. k b i. ſecondo la medeſima quantita, la circonferenza delquale paſſa per
l'altro centro. c. & le circonferenze di queſti duoi cerchij s'interſegano (come vedi) nelli duoi
ponti. e. & . f. & dal ponto. e. tira le due linee. e c h, & . e d k. & ſimilmente dal ponto. f. tira le due
linee. f c g. & . f d i. fatto queſto farai centro il ponto. e. & ſecondo la quantita della linea. e d k,
deſignarai la circonferenza. k m h. laquale toccara ſolamente le circonferenze delli duoi pri-
mi cerchij nelli duoi ponti. k. & . h. ſimilmente farai centro il ponto. f. & ſecondo la quantita del-
la linea. f g. deſcriuerai la circonferenza. g l i. laquale ſara pur toccante li primi duoi cerchij nel-
li duoi ponti. g i. & coſi ſara compita la ricercata figura ouale, la circonferenza dellaquale ſara
la linea. a g l i b k m h. dellaquale leuandone quelle linee, che non vogliono eſſer colorate reſta-
ra (come che nella ſeconda figura ſi vede) e pero nel deſignarla ſi douerebbe tirare le linee ſen-
za colore, eccettuando quelle, che occorrono alla forma di tal figura.
Anchora che queſta tal figura ſia aſſai vaga allo aſpetto, & che in molte particolarita ſia molto



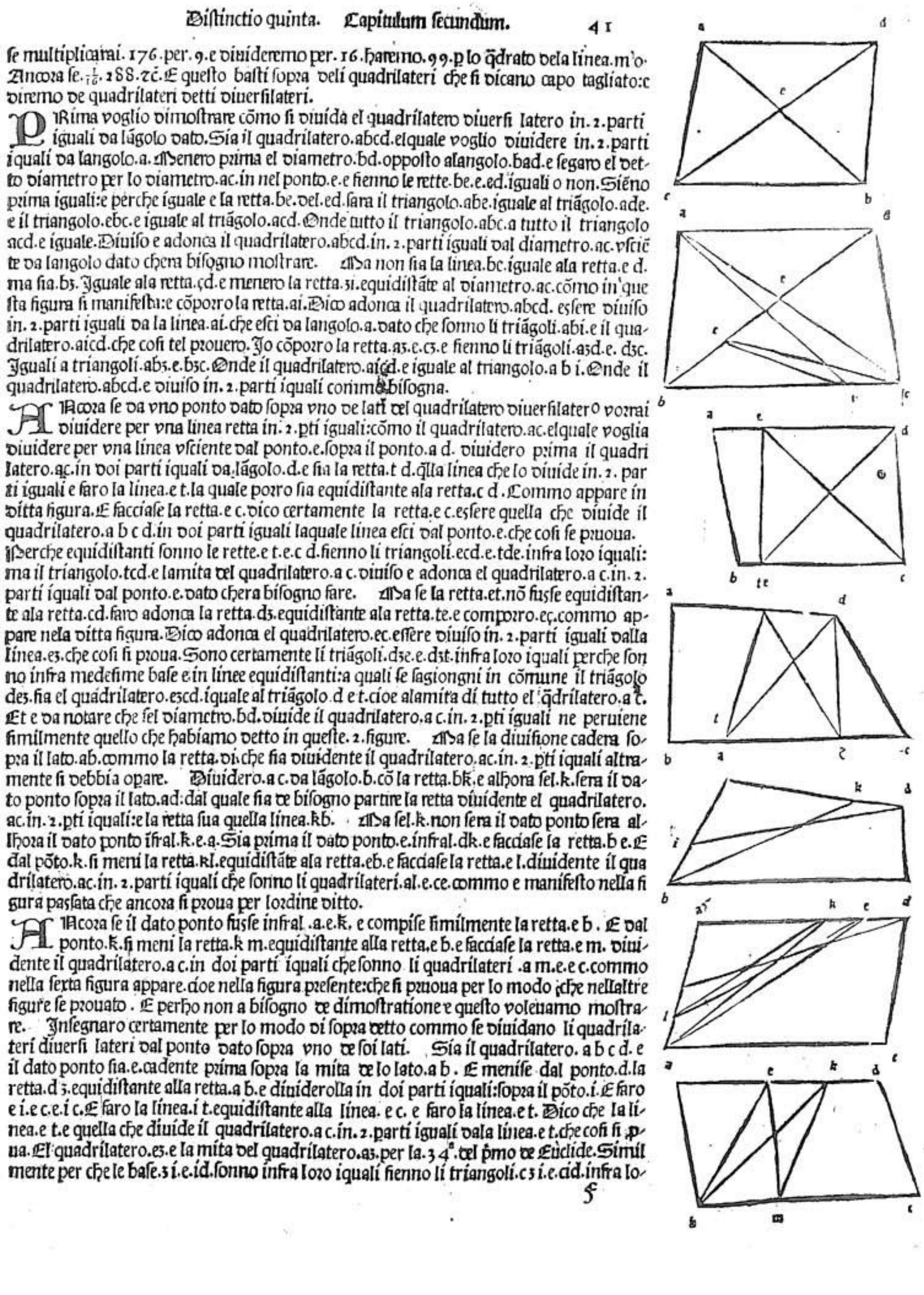
F. Feliciano, *Scala gramaldelli* (1526), Libro III

N. Tartaglia, *General trattato, Parte V* (1560), Libro I



G. Pomodoro, *Geometria prattica* (1599)

Problemi sulla divisione delle figure



Distinctio quinta. Capitulum secundum. 41

se multiplicarai. 176. per. 9. e divideremo per. 16. haremo. 99. p lo q̃drato dela linea. m'o. Ancora se. $\frac{1}{16}$. 288. &c. E questo basti sopra deli quadrilateri che si dicano capo tagliato: e diremo de quadrilateri detti diversilateri.

Prima voglio dimostrare cõmo si divida el quadrilatero diversi latero in. 2. parti iguali da lágolo dato. Sia il quadrilatero. abcd. elquale voglio dividere in. 2. parti iquali da langolo. a. Menero prima el diametro. bd. opposto alangolo. bad. e segaro el detto diametro per lo diametro. ac. in nel ponto. e. e fienno le rette. be. e. ed. iguali o non. Siéno prima iguali: e perche iguale e la retta. be. del. ed. sara il triangolo. abe. iguale al triágolo. ade. e il triangolo. ebc. e iguale al triágolo. acd. Onde tutto il triangolo. abc. a tutto il triangolo acd. e iguale. Diviso e adonca il quadrilatero. abcd. in. 2. parti iguali dal diametro. ac. vsciẽte da langolo dato chera bisogno mostrare. Ma non sia la linea. bc. iguale ala retta. e d. ma sia. bz. Iguale ala retta. zd. e menero la retta. zi. equidistáte al diametro. ac. cõmo in que sta figura si manifesta: e cõporro la retta. ai. Dico adonca il quadrilatero. abcd. essere diviso in. 2. parti iguali da la linea. ai. che esci da langolo. a. dato che sonno li triágoli. abi. e il quadrilatero. aicd. che cosi tel provero. Jo cõporro la retta. az. e. cz. e fienno li triágoli. azd. e. dzc. Iguali a triangoli. abz. e. bzc. Onde il quadrilatero. aicd. e iguale al triangolo. a b i. Onde il quadrilatero. abcd. e diviso in. 2. parti iquali commo bisogna.

Ancora se da vno ponto dato sopra vno de lati del quadrilatero diversilatero vorrai dividere per vna linea retta in. 2. pti iguali: cõmo il quadrilatero. ac. elquale voglia dividere per vna linea vsciente dal ponto. e. sopra il ponto. a d. dividero prima il quadrilatero. ac. in doi parti iquali da lágolo. d. e sia la retta. t d. q̃lla linea che lo divide in. 2. parti iguali e faro la linea. e t. la quale porro sia equidistante ala retta. c d. Commo appare in ditta figura. E facciase la retta. e c. dico certamente la retta. e c. essere quella che divide il quadrilatero. a b c d. in doi parti iguali laquale linea esci dal ponto. e. che cosi se pruova. Perche equidistanti sonno le rette. e t. e. c d. fienno li triangoli. ecd. e. tde. infra loro iguali: ma il triangolo. tcd. e lamita del quadrilatero. a c. diviso e adonca el quadrilatero. a c. in. 2. parti iquali dal ponto. e. dato chera bisogno fare. Ma se la retta. et. nõ fusse equidistante ala retta. cd. faro adonca la retta. dz. equidistante ala retta. te. e comporro. ez. commo appare nela ditta figura. Dico adonca el quadrilatero. ec. essere diviso in. 2. parti iguali dalla linea. ez. che cosi si prova. Sono certamente li triágoli. dze. e. dzt. infra loro iquali perche sonno infra medesime base e in linee equidistanti: a quali se sagiongni in cõmune il triágolo dez. sia el quadrilatero. ezcd. iquale al triágolo d e t. cioe alamita di tutto el q̃drilatero. a c. Et e da notare che sel diametro. bd. divide il quadrilatero. a c. in. 2. pti iguali ne perviene similmente quello che habiamo detto in queste. 2. figure. Ma se la divisione cadera sopra il lato. ab. commo la retta. di. che sia dividente il quadrilatero. ac. in. 2. pti iquali altramente si debbia opare. Dividero. a c. da lágolo. b. cõ la retta. bk. e alhora sel. k. sera il dato ponto sopra il lato. ad: dal quale sia de bisogno partire la retta dividente el quadrilatero. ac. in. 2. pti iquali: e la retta sua quella linea. kb. Ma sel. k. non sera il dato ponto sera alhora il dato ponto ífral. k. e. a. Sia prima il dato ponto. e. infral. dk. e facciase la retta. b e. E dal põto. k. si meni la retta. kl. equidistáte ala retta. eb. e facciase la retta. e l. dividente il quadrilatero. ac. in. 2. parti iquali che sonno li quadrilateri. al. e. ce. commo e manifesto nella figura passata che ancora si prova per lordine ditto.

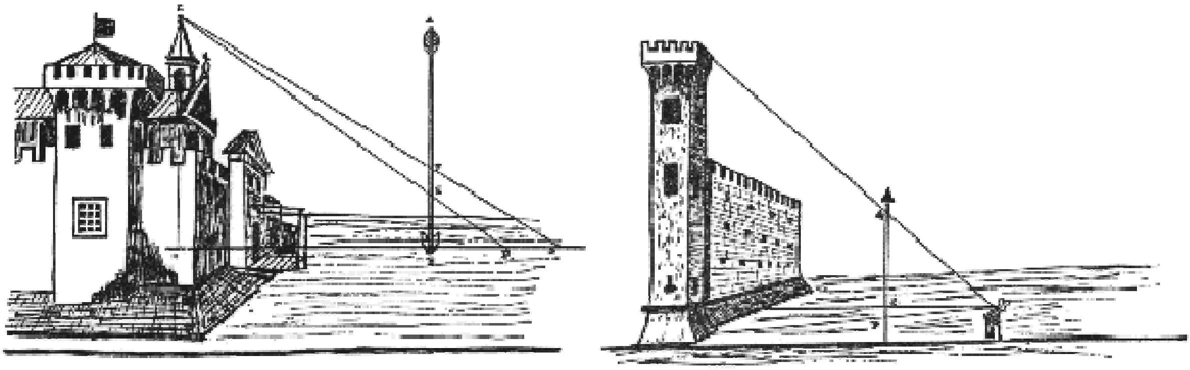
Ancora se il dato ponto fusse infral. a. e. k. e compise similmente la retta. e b. E dal ponto. k. si meni la retta. k m. equidistante alla retta. e b. e facciase la retta. e m. dividente il quadrilatero. a c. in doi parti iquali che sonno li quadrilateri. a m. e. e c. commo nella sexta figura appare. cioe nella figura presente: che si pruova per lo modo che nellaltre figure se provato. E perho non a bisogno de dimostratione e questo volevamo mostrare. Insegnaro certamente per lo modo di sopra detto commo se dividano li quadrilateri diversi lateri dal ponto dato sopra vno de soi lati. Sia il quadrilatero. a b c d. e il dato ponto sia. e. cadente prima sopra la mita de lo lato. a b. E menise dal ponto. d. la retta. d z. equidistante alla retta. a b. e dividerolla in doi parti iquali: sopra il põto. i. E faro e i. e c. e. i c. E faro la linea. i t. equidistante alla linea. e c. e faro la linea. e t. Dico che la linea. e t. e quella che divide il quadrilatero. a c. in. 2. parti iguali dala linea. e t. che cosi si prova. El quadrilatero. ez. e la mita del quadrilatero. az. per la. 34ª. del primo de Euclide. Similmente per che le base. z i. e. id. sonno infra loro iquali fienno li triangoli. c z i. e. cid. infra lo-

f

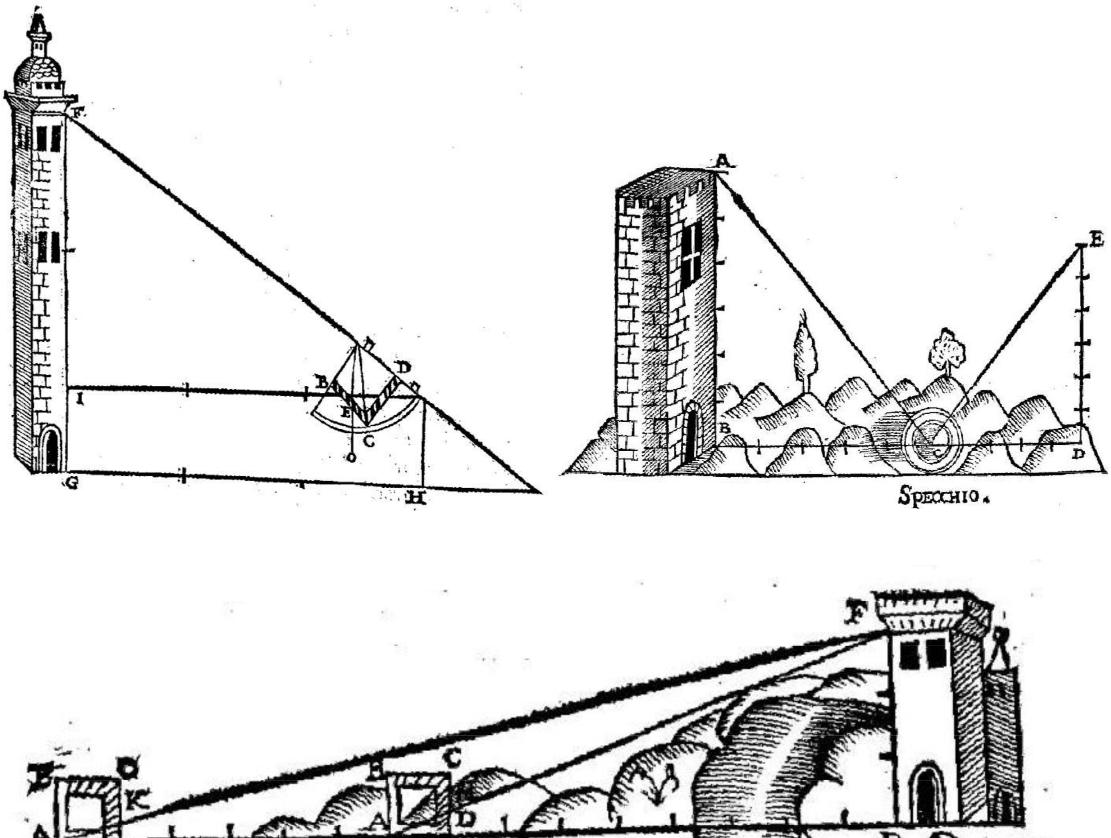
L. Pacioli, *Summa* (1494)

Celerimensura
(misure a vista o misure a occhio)

Francesco di Giorgio Martini, *La praticha di geometria* (ca 1470):
uso del quadrante



L. B. Alberti, *Ludi matematici* (1450-1452): uso del dardo



C. Bartoli, *Del modo di misurare* (1564): uso del quadrante, dello specchio e del quadrato geometrico.

Problemi geometrici risolti algebricamente

Problemi di scale appoggiate, alberi spezzati e torri (teorema di Pitagora e teorema di Pitagora generalizzato)

Benedetto da Firenze, *Trattato d'abaco* (ca 1465): BNF, Magl. XI.1

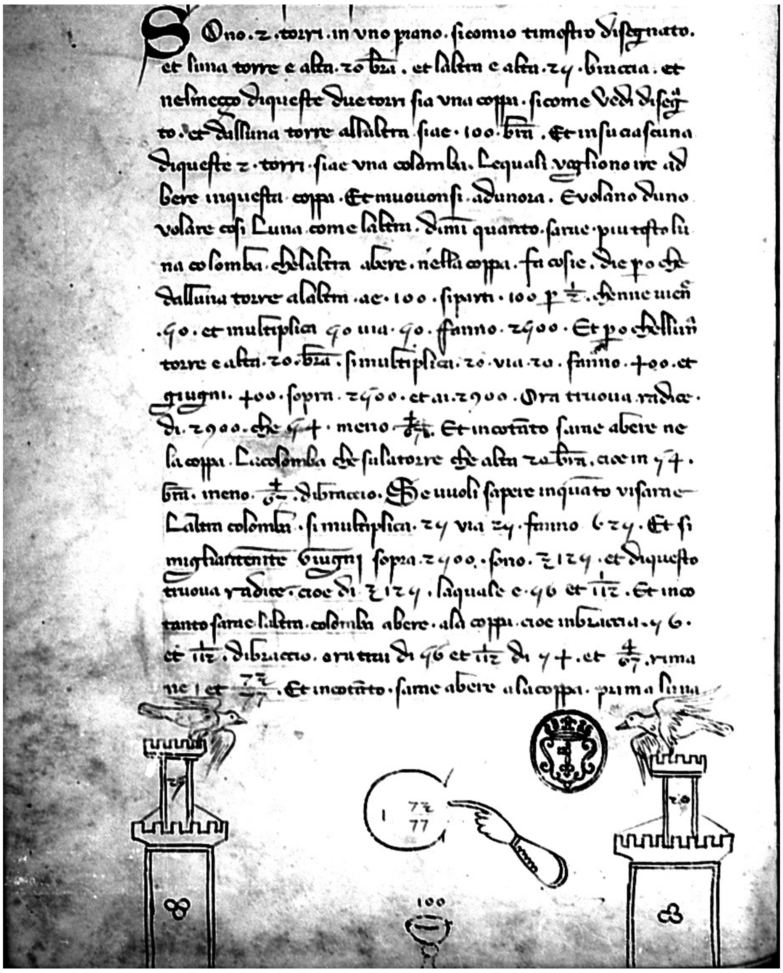
Nel trattato di Benedetto sono risolti senza l'uso dell'algebra. Problemi simili a quello dell'albero sono risolti algebricamente, ad esempio, negli anonimi **Palat. 575 (ca 1460, cc. 109v-110r), L.IV.18 (ca 1460, pp. 89-90), e nel *Tractatus mathematicus* (1477-1480, pp. 441-442) di Luca Pacioli.**

es.6.he vn quart reſta.18.he tres quarts et daq̄ſt pilha .1.rais q̄ es.4.he vnſe trēta doēs.et aq̄ſt es lo ſieu pēdicular et multip̄lica p la mitat de vna fas coma es.2.he miech.en vē.10.he ſinq̄ta he ſinc ſeſanta quatrēs et tāta es la rays de lū et p ſo coma.6. triangles multiplica.6.vegades.10.et ſincāta he ſinc ſeſanta quatres et ven.65.et ſinc trēta doens,et tantaes la rays de tota aq̄lla terra per lo semblāt faras los autres. Lo.xxxvj.exemple.

¶ Una tore ho autra cauſa es en terra plana que es alta.20.et luenh da q̄lla tore en ſpaſi de.25.ha vn albre.demādi cāt ha de la ſima de la tore fins al pe del albre aq̄ſta es la regla multiplica la alteſa de la tore enſi que es.20 votas.20.fan.400. Itē multiplica ſo que la tore es luenh del albre ſo es.25.ves.25.fan.625. aiuſtas los enſems ambe.400.ſeram.1025.et de ayſo pilha la rays q̄ es.32.he vn ſeſāta ſincē.aytāt ha de la ſima de la tore fins al pe del albre et ſi hon ty dem ādaua q̄ de la ſima de la tore fins al pe del albre ha.25.quāt aura dal pe del albre fins al pe de la tore per terra plana multiplica la alteſa de la.tore enſi ſo es.20. votas.20 fan.400.Item multiplica ſo que la ſima de la tore es luenh del albre ſo es.25.voltas.25.fan.625.abat.400.de.625. reſtā.225.et de aqueſt pilha la rays que es.15.et tant ha del pe de la tore fins al pe del albre.

F. Pellos, *Compendion de lo abaco* (1492)

Problema delle due torri



Iacopo da Firenze, *Tractatus algorismi* (1307): BRF, Ricc. 2236, cc. 42v-43r

Sono 2 torri in uno piano sicom'io ti mostro disegnato, et l'una torre è alta 20 braccia et l'altra è alta 24 braccia, et nel mezzo di queste due torri sia una coppa sicome vedi disegnato, et dall'una torre all'altra siae 100 braccia et in su ciascuna di queste due torri siae una colomba, le quali vogliono tore ad bere in questa coppa. Et muovonsi ad un'ora. E volano d'uno volare così l'una come l'altra. Dimmi quanto sarae più tosto l'una colomba che l'altra a ber nella coppa. Fa' così ... .

Qui si suppone che la coppa sia esattamente a metà della distanza tra le basi delle due torri. Si applica il teorema di Pitagora per trovare il percorso di ogni colomba.

Più complesso ad esempio **nel *Liber abaci*, nell' Ottob. Lat. 3307, in Calandri e Pacioli.** Fibonacci lo risolve sia per via geometrica sia con la falsa posizione (pp. 331-332, 398-399).

F. Calandri, ***Aritmetica*** **(ca 1485/90): BRF, Ricc. 2669, cc. 89r-89v.**

Sono dua torre in uno piano, che l'una è alta 60 bracia, l'autra è alta 80 bracia, et da l'una torre a l'autra è 100 bracia; et in tra queste dua torre è una fonte d'aqua in tal luogho che movendosi dua ucelli di sudette torre, et volando di pari volo, giungono a un'otta a detta fonte; vo' sapere quanto la detta fonte sarà presso a ciascuna torre. ***Fa' così: prima multiplicha l'altezza della torre ognuna per sé, cioè prima 80 vie 80 fa 6400, poi 60 vie 60 fa 3600, tralo di 6400, resta 2800; poi multipricha la distantia che è dal'una torre a l'autra, cioè 100 bracia vie 100 fa 10000 et questo agugni con 2800 fa 12800 et questo parti per 200, cioè per 2 volte la distanza che è fra l'una torre e l'autra, che ne viene 64 bracia. E tanto sarà dalla fonte alla torre delle 60 bracia,*** *et alla torre delle 80 bracia sarà presso a 36 braccia.*

$a = 60$, $b = 80$: altezze delle due torri ($b > a$) $d = 100$: distanza tra le due torri

la distanza della fonte dalla base della prima torre (di altezza a) è

$$\frac{b^2-a^2+d^2}{2d} = \frac{80^2-60^2+100^2}{200} = \frac{6400-3600+10000}{200} = \frac{12800}{200} = 64$$

Questa soluzione si trova risolvendo il problema algebricamente:

***Praticha di geometria* (ca 1465): BAV, Ottob. Lat. 3307, pp. 42-43**
$a = 70$, $b = 100$, $d = 150$

Luca Pacioli

***Tractatus mathematicus* (1477-1480), pp. 446-448**
$a = 40$, $b = 50$, $d = 60$

***Summa* (1494), Parte seconda, c. 59v:**
$a = 70$, $b = 100$, $d = 150$

Posta la distanza della fonte dalla base della prima torre = *una cosa* = *x*
abbiamo

$$b^2 + (d - x)^2 = a^2 + x^2$$

$$(*) \quad \boldsymbol{b^2 + d^2 - 2dx + x^2 = a^2 + x^2}$$

$$x = \frac{b^2 - a^2 + d^2}{2d} = \frac{b^2 - a^2}{2d} + \frac{d}{2}$$

Pacioli osserva:
Potresti anchora multiplicare ciascuna torre in sé e trare il quadrato dela minore al quadrato dela magiore e quello avanza partire nel dopio dela distancia da l'una torre al'altra, e quello ne viene poni sopra la mità dela distantia che è da l'una a l'altra, e quella somma è quello che la fonte è presso ala minore torre.

Nell'Ottob. Lat 3307 l'equazione (*), con i corrispondenti dati numerici , è scritta:

32500 e *uno censo meno* 300 *chose iguali a* 4900 e *uno censo*

simbolismo utilizzato anche nella *Summa.*
Nel *Tractatus*, Pacioli scrive:

$$\boldsymbol{6100\ \tilde{m}\ 120^{co}\ \tilde{p}\ 1^{\square}\ equale\ a\ 1600\ \tilde{p}\ 1^{\square}}$$

Sempre nell' Ottob. Lat 3307 (pp. 43-44) il problema viene risolto con semplici calcoli algebrici anche quando la fonte si trova

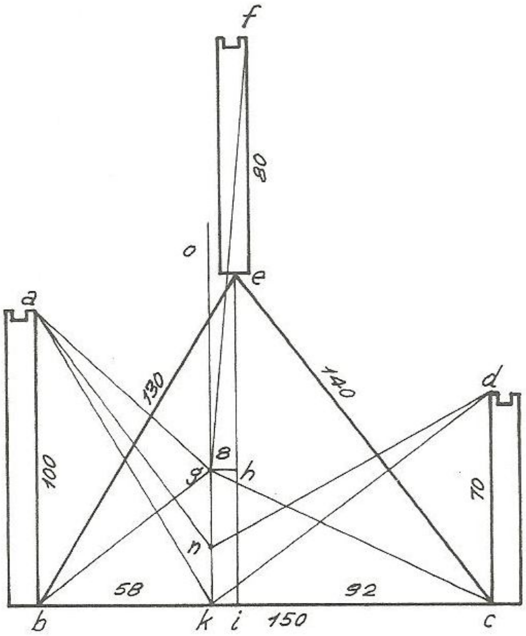
a) Sulla retta che unisce le basi delle due torri, ma da una stessa parte rispetto ad entrambe.
b) Tra le due torri ma esterna a quella retta.

Problema delle tre torri

***Praticha di geometria*, Ottob. Lat. 3307 (pp. 44-45)**

Luca Pacioli

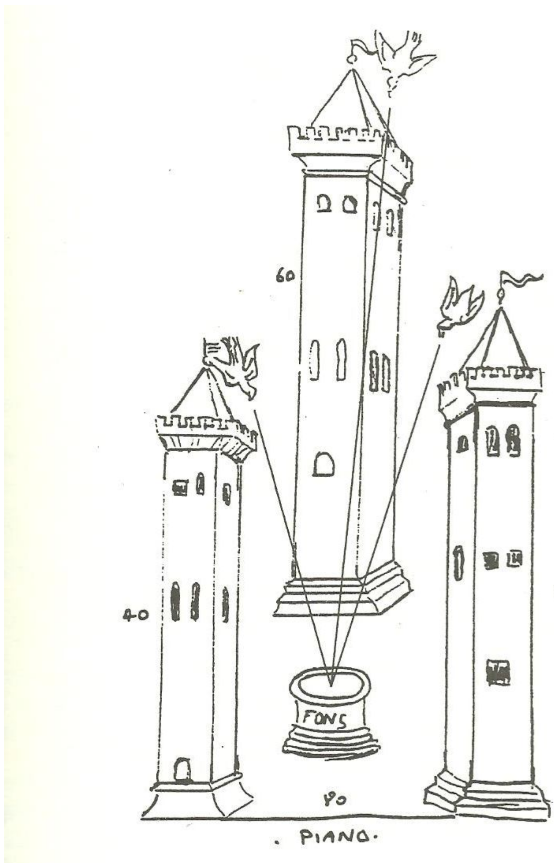
***Tractatus mathematicus* (pp. 448-450)**
***Summa,* Parte seconda (cc. 61r-61v)**



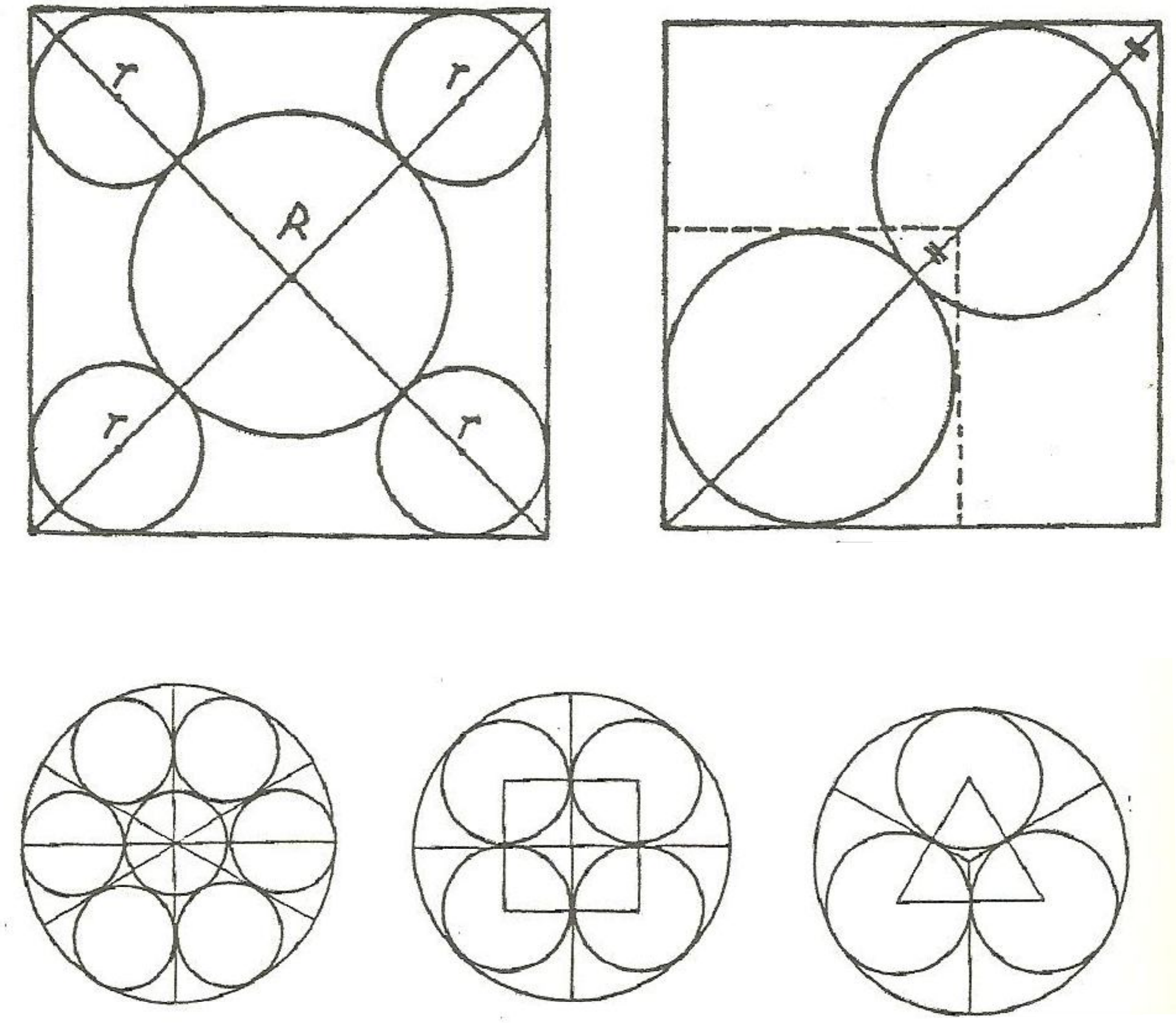

Summa de Arithmetica geometria. Proportioni: et proportionalita:

Continentia de tutta lopera:

L. Pacioli, *Summa* (1523)



Problemi di inscrizione e circoscrizione

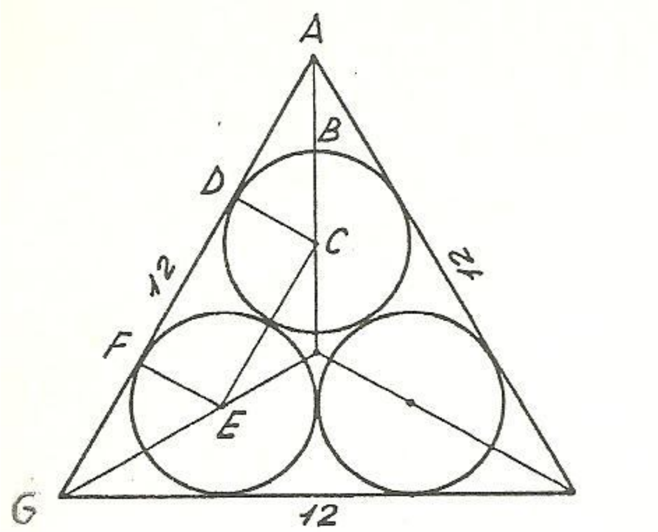


Anonimo, *Trattato di geometria pratica* (ca 1460): BCS, L.IV.18

Inscrizione di tre cerchi uguali in un triangolo

Triangolo equilatero

La più antica formulazione del problema, tuttavia corredata da una soluzione non esatta, si trova nelle *Questioni d'algebra* di M° Gilio: BCS, L.IX.28 (1384).
Nel ***Trattato di geometria pratica* del codice L.IV.18 (ca 1460)** l'autore affronta la questione in tre momenti diversi del trattato (ragioni 122, 148, 153):
La prima soluzione è errata e si può riassumere nella formula $C = \frac{5l}{56} + l$ ($l = 30$) dove C ed l rappresentano le lunghezze della circonferenza di ciascun cerchio e del lato del triangolo dato.



In una ragione successiva riporta solo la soluzione, esatta:

$$(**)\quad 2r = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} - \frac{l}{2} \qquad (l = 12)$$

Finalmente ritorna poi sulla questione risolvendola per via algebrica e giustificando la soluzione precedente:
Posto $\boldsymbol{r = DC = x}$ ricava $AD = FG = \sqrt{3x^2}$ Dunque

$AD + FG = \sqrt{12x^2}$ ma abbiamo anche $AD + FG = l - 2x$ ($12 - 2x$), eguagliando

$\boldsymbol{\sqrt{12x^2} = l - 2x}$ ed elevando al quadrato

$\boldsymbol{x^2 + \frac{l}{2}x = \frac{l^2}{8}}$ $\qquad (\boldsymbol{x^2 + 6x = 18})$ da cui

$$r = x = \sqrt{\frac{3l^2}{16}} - \frac{l}{4}$$ ($x = \sqrt{27} - 3$) e quindi la precedente soluzione (**)

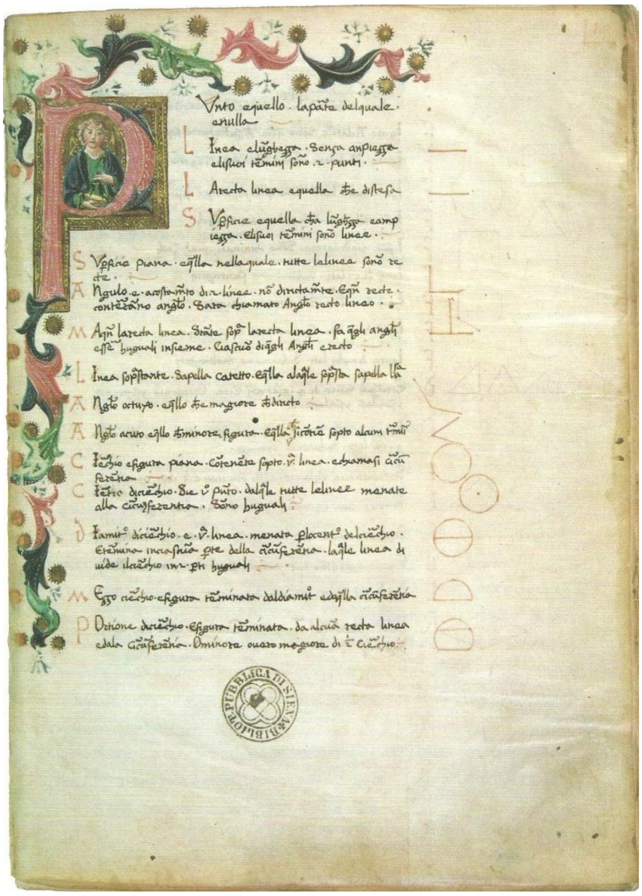
Notiamo che il testo presenta un particolare simbolismo algebrico. Ad esempio l'equazione , che incontriamo nel corso dei calcoli

$$144 - 48x + 4x^2 = 12x^2$$ viene scritta

$$\frac{144}{n} \textit{ men } \frac{48}{c} \textit{ più } \frac{4}{z} \textit{ sono huguali a } \frac{12}{z}$$

n* = *numero*, *c* = *cosa*, *z* = *zenso

Una simile notazione si trova in due manoscritti della BNR, dove la seconda potenza dell'incognita è chiamata **çenso o zenso** oppure cienso e indicata con la lettera **ç** :Vittorio Emanuele 379 (ca 1450), S. Pantaleo 13 (ca 1475). I simboli **ç** e **Z** sono talvolta utilizzati anche nella *Summa* di Pacioli al posto dell'abbreviazione ce.

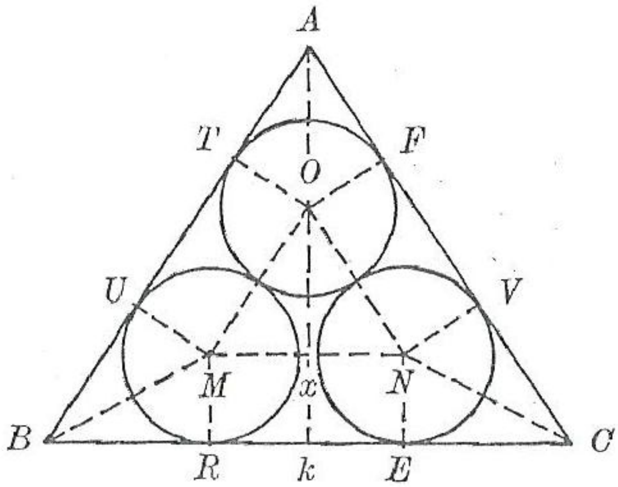


BCS, L.IV.18 (ca 1460), c. 1r

Triangolo isoscele

L'anonimo autore della *Praticha di geometria* del Palat. 577 (ca 1460) e dell'Ottob. Lat. 3307 (ca 1465), Piero della Francesca nel suo *Trattato d'abaco* (ca 1470/80) e Pacioli nella *Summa* (Parte seconda, c. 57r), ne riportano un' analoga soluzione.

Egl'è uno triangulo ABC, del quale il lato AB è 10 et il lato AC è pure 10 et il lato BC è 12; nel quale triangulo voglo mettere 3 tondi e' magiori che se po'. Domando quanto sirà il loro diametro (Piero della Francesca, *Trattato d'abaco*, pp. 203-205).



In questo caso le due circonferenze alla base non sono tra loro tangenti. Prima si determina il «catecto», ossia l'altezza AK = 8, del triangolo e la sua area S = 48. Presa anche qui come **incognita *x* il raggio dei cerchi**, dalla similitudine dei triangoli OMN e ABC abbiamo:

AB : OM = BC : MN da cui MN = $\frac{12x}{5}$

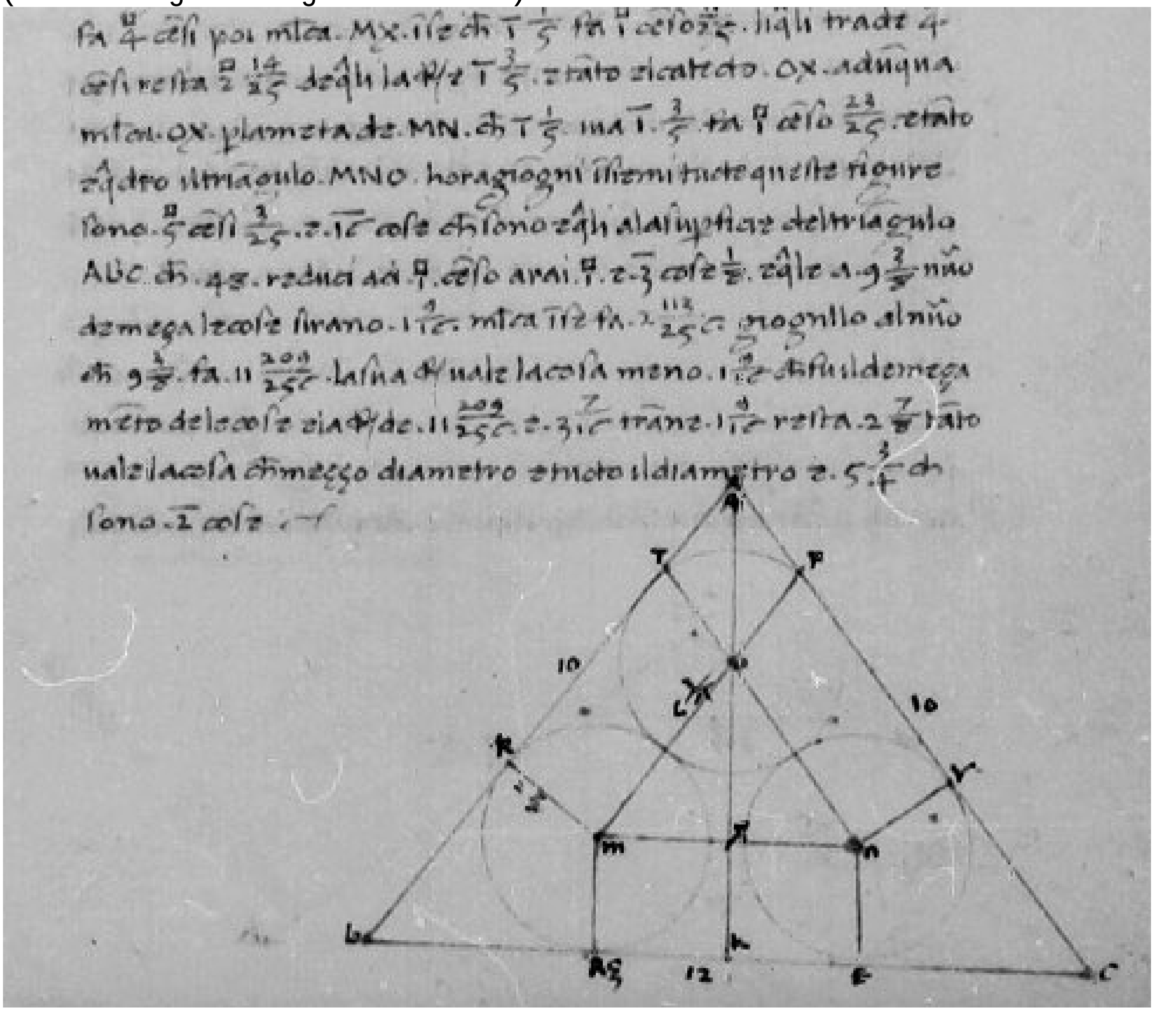
AB : OM = AK : OX da cui OX = $\frac{8x}{5}$

L'equazione risolvente si ottiene imponendo che la somma delle aree dei triangoli e dei rettangoli che compongono il triangolo ABC (ossia BMR, ENC, BMU, AOT, AOF, VNC, OMN, MNER, TOMU, NOFV) sia uguale a 48.

Così, dopo avere *ridotto ad un censo*, si trova:

$$x^2 + \frac{25}{8}x = \frac{75}{8} \qquad \text{da cui} \qquad x = \frac{15}{8}$$

(v. il sesto rigo della figura successiva)



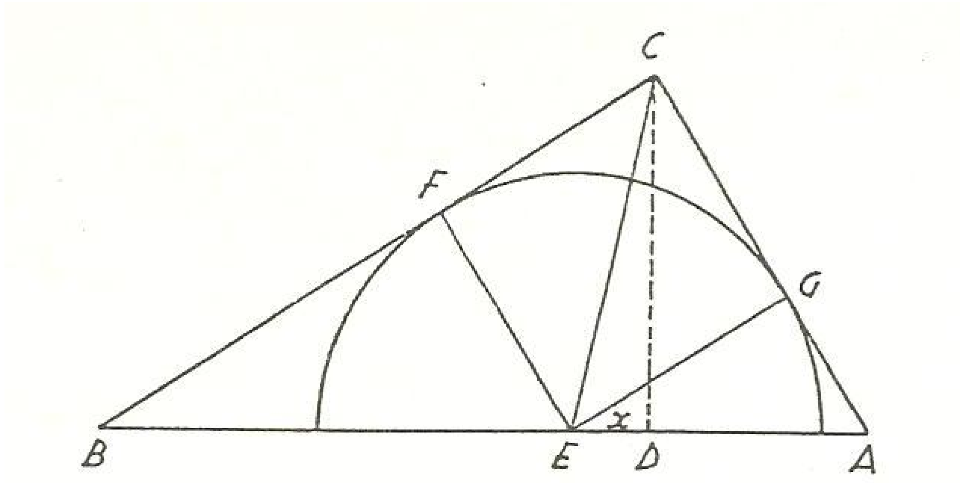
Piero della Francesca, *Trattato d'abaco* (ca 1470/80):
BMLF, Ash. 359*, c. 96r

Triangolo scaleno

Nell'Ottobon. Lat. 3307 il problema è esaminato anche nel caso di un triangolo scaleno, di lati 13, 14 e 15, con un percorso risolutivo più complesso ma simile al precedente (utilizzando il Teorema di Pitagora generalizzato, la similitudine, il confronto di aree) e tramite un'equazione risolvente di primo grado.

Problemi con più metodi risolutivi

Inscrizione di un semicerchio in un triangolo scaleno



Primo metodo

BNF, Conv. soppr. G.7.1137 (ca 1395), c. 191r
BAV, Ottob. Lat. 3307 (ca 1465), p. 50
Pacioli, *Summa* (1494), Parte seconda, c. 63r

Sia dato un triangolo di lati AB = a = 15; BC = b =14; AC = c =13, si trova innanzi tutto l'altezza CD relativa ad AB utilizzando il teorema di Pitagora generalizzato e quindi l' area S = 84 del triangolo; presa come incognita **FE = *x* il raggio** del semicerchio, in riferimento alle aree dei triangoli BCE, AEC, abbiamo:

$$\frac{bx}{2}+\frac{cx}{2}=S \quad \text{da cui} \quad x=\frac{S}{\frac{b+c}{2}}=\frac{56}{9}$$

Sfortunati nel *Nuovo lume* (1534), c. 116r, riporta questa soluzione senza alcuna motivazione.

Secondo metodo

BCS, L.IV.18 (ca 1460), pp. 165-170

L'autore determina anche qui l'altezza CD e prende come incognita **ED = *x***
Utilizzando più volte il teorema di Pitagora e il teorema di Pitagora generalizzato, trova successivamente, in funzione di x, i segmenti CE, CG e quindi EG. In modo analogo determina EF. **Dall'uguaglianza EF = EG ricava l'equazione risolvente:**

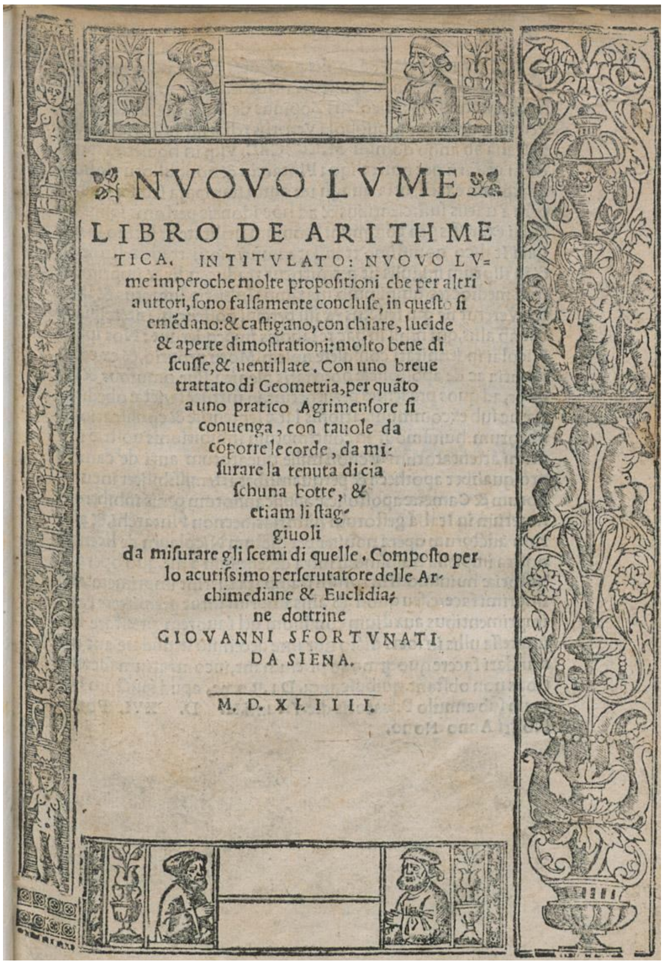
Ora dice la regola dell'alzibra che ttu ài aghuaglare questa ragione ch'è

32 e 35104/105625 più 9/c e 16851/21125 di co. più 3136/4225 di z sonno huguali a 45 99/625 men 10/c 94/125 di co. più 16/25 di z.

dalla quale ottiene

$$x^2 + \frac{9044}{45}\,x = \frac{2125}{25}$$

Trova DE = $x = \frac{28}{45}$ e poi **FE = GE** $= \mathbf{\frac{56}{9}}$

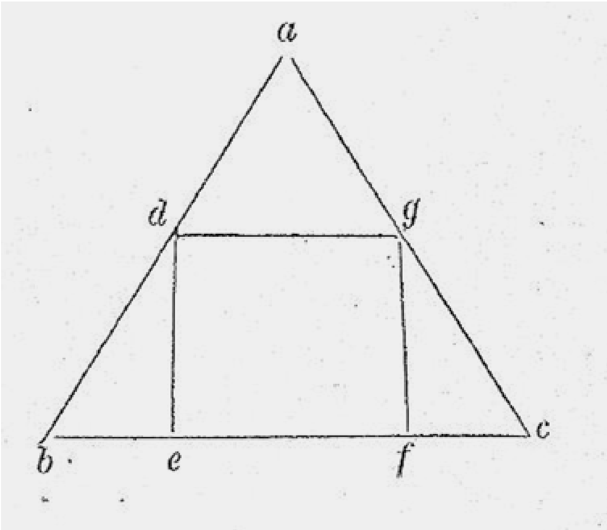


NVOVO LVME
LIBRO DE ARITHME
TICA. INTITVLATO: NVOVO LV=
me imperoche molte propositioni che per altri
auttori, sono falsamente concluse, in queste si
emēdano: & castigano, con chiare, lucide
& aperte dimostrationi: molto bene di
scusse, & uentillate. Con uno breue
trattato di Geometria, per quāto
a uno pratico Agrimensore si
conuenga, con tauole da
cōporre le corde, da mi:
surare la tenuta di cia
schuna botte, &
etiam li stag=
giuoli
da misurare gli scemi di quelle. Composto per
lo acutissimo perscrutatore delle Ar=
chimediane & Euclidia=
ne dottrine
GIOVANNI SFORTVNATI
DA SIENA.
M. D. XLIIII.

G. Sfortunati, *Nuovo lume* (1544)

Inscrizione di un quadrato in un triangolo

Fibonacci,
Practica geometriae
(1220/21)



Triangolo equilatero

Il problema, nel caso di un triangolo di lato $l = 10$, si trova già nella ***Practica geometriae* di Fibonacci** dove è risolto (pp. 223-224) ponendo il lato del quadrato **"radicem rei"** e ottenendo una semplice equazione irrazionale. Lo stesso procedimento risolutivo è proposta da Pacioli nella *Summa* (II, cc. 62r-62v), ma con $l = 6$ e assumendo come incognita **DG =** $\boldsymbol{x}$**.** Poiché

$GC^2 = (AC - AG)^2 = GF^2 + FC^2$ Pacioli ottiene l'equazione

$(l - x)^2 = x^2 + (l\text{-}x/2)^2$

da cui

$\boldsymbol{x^2 + 6lx = 3l^2}$ ($\boldsymbol{x^2 + 36x = 108}$)

Ricavando la soluzione anche qui si riconosce la regola risolutiva descritta, senza alcuna motivazione, da **Calandri, Sfortunati e Cataneo**. Ad esempio, quest'ultimo, nell'opera ***Le pratiche delle due prime matematiche*** **(1559, c. 73r)** scrive (con $l = 12$):

... debbi prima triplare un de i lati di tal triangulo che è 12, et sarà 36, e questo quadra multiplicandolo in se stesso, e sarà 1296, del quale piglia il 1/3 che è 432, e questo agiugne a 1296 et sarà 1728, et la sua radice meno il triplato di 12, che fu 36, convien esser per ogni lato il detto quadro.

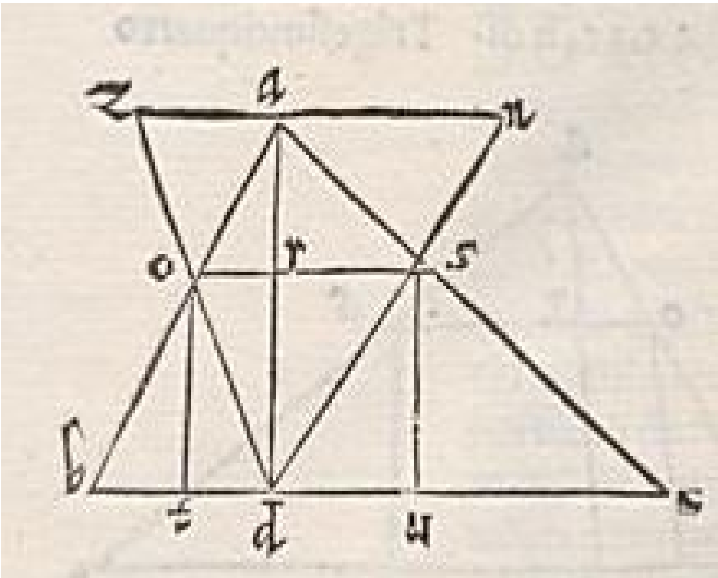
Triangolo scaleno

Piero della Francesca, *Trattato d'abaco* (ca 1470/80), p. 205
Dato un triangolo scaleno di lati assegnati, di altezza h, relativa alla base b, e di area S, si limita a riferire il seguente risultato per il lato q del quadrato iscritto.

$$q = \frac{S}{\frac{b+h}{2}}$$

BNF, Conv. soppr. G.7.1137 (ca 1395), c. 190v
BAV, Ottob. Lat. 3307 (ca 1465), p. 50
N. Tartaglia, *General trattato*, Parte sesta (1560), cc. 30r-31v

Ricavano la precedente soluzione con un analogo procedimento algebrico.



Ad esempio Tartaglia prende il *triangolo diversilatero* di lati AB = 13, AC = 15, BC = 14 = b. Posto il lato del quadrato **OS = *x***, dopo aver ricavato l'altezza AD = 12 = h, applica la similitudine ai triangoli ABD e AOR e ai triangoli ADC e ARS. Ottiene così la proporzione:

$\boldsymbol{b : x = h : (h - x)}$ da cui $\boldsymbol{b(h - x) = hx}$ e quindi $x = \frac{bh}{b+h}$ (che scritta nella forma $\frac{S}{\frac{b+h}{2}}$ corrisponde alla soluzione di Piero)

Dopo la soluzione algebrica Tartaglia riporta la **costruzione geometrica**:
Si conduce la ZN parallela alla BC e ZN = AD in modo che sia ZN : ZA = BC : BD.
Si tracciano i segmenti ZD e ND individuando i punti O ed S.

Geronimo Pico Fonticolano, *Geometria* (1597), p. 117.

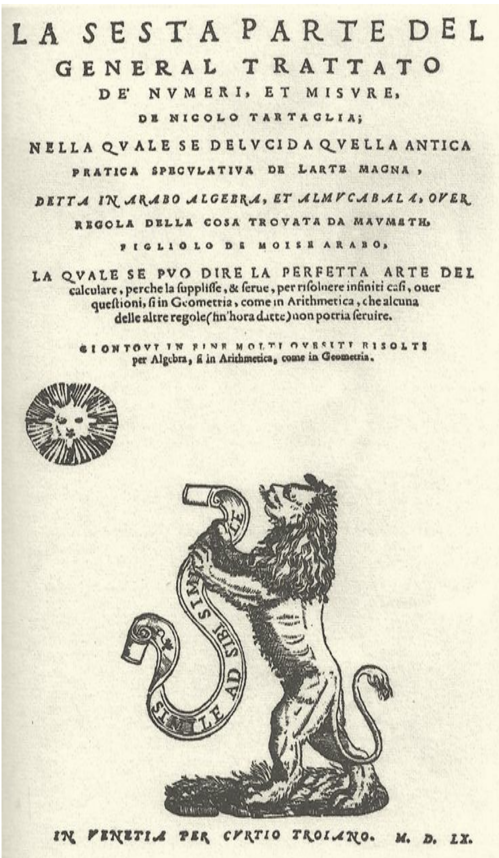
Riporta **due metodi risolutivi**. Il primo corrisponde a quello di Tartaglia. L'altro è il seguente:

area (AFG) = area (ACB) – area (FGDE) – area(CFE + GDB)

Con i dati e le notazioni precedenti, essendo CE + DB = $b - x$ abbiamo dunque

$(h - x)x / 2 = S - x^2 - bx / 2 + x^2 / 2$

da cui si ritrova la soluzione data da Piero della Francesca

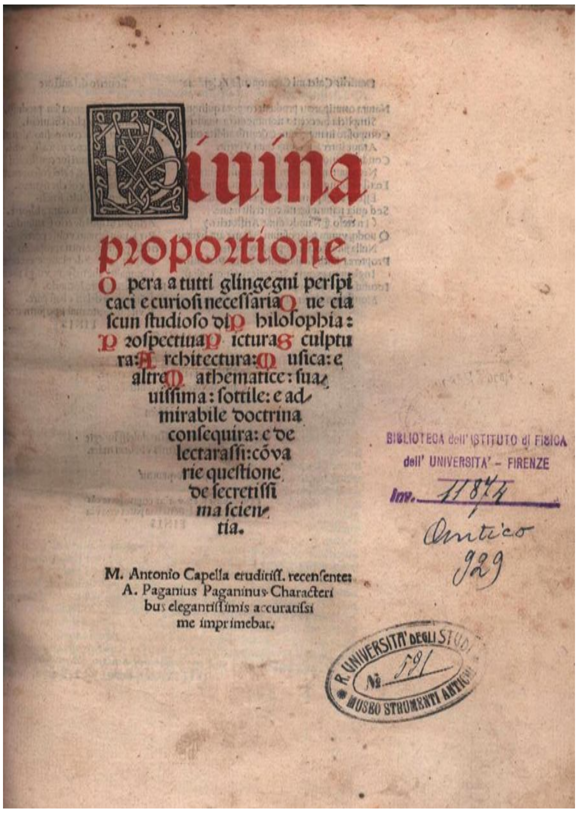

LA SESTA PARTE DEL
GENERAL TRATTATO
DE' NVMERI, ET MISVRE,
DE NICOLO TARTAGLIA;
NELLA QVALE SE DELVCIDA QVELLA ANTICA
PRATICA SPECVLATIVA DE LARTE MAGNA,
DETTA IN ARABO ALGEBRA, ET ALMVCABALA, OVER
REGOLA DELLA COSA TROVATA DA MAVMETH,
FIGLIOLO DE MOISE ARABO,
LA QVALE SE PVO DIRE LA PERFETTA ARTE DEL calculare, perche la supplisse, & serue, per risolnere infiniti casi, ouer questioni, si in Geometria, come in Arithmetica, che alcuna delle altre regole (sin'hora datte) non potria seruire.
GIONTOVI IN FINE MOLTI QVESITI RISOLTI per Algebra, si in Arithmetica, come in Geometria.
SIMILE AD SIBI SIMILE
IN VENETIA PER CVRTIO TROIANO. M. D. LX.

N. Tartaglia, *General trattato*, Parte Sesta (1560)

G. Pico Fonticolano, *Geometria* (1597)

Un cerchio inscritto in un triangolo

Nella seconda parte della ***Divina proportione* (1509)**, contenente la versione volgare del *Libellus quinque corporum regularium* di Piero della Francesca, Luca Pacioli riporta un problema riguardante un cerchio inscritto in un triangolo (cc. 26v-27r). Il problema viene risolto senza l'ausilio dell'algebra e verrà riproposto in modo identico da **Cardano nella *Practica arithmeticae*** (problema 33, cc. 289r-290r) e da **Fonticolano nella *Geometria*** (pp. 107-108).


Diuina proportione
Opera a tutti glingegni perspicaci e curiosi necessaria Oue ciascun studioso di Philosophia: Prospectiua Pictura Sculptura: Architectura: Musica: e altre Mathematice: suauissima: sottile: e admirabile doctrina consequira: e delectarassi: co varie questione de secretissima scientia.
M. Antonio Capella eruditiss. recensente A. Paganius Paganinus Characteribus elegantissimis accuratissime imprimebat.

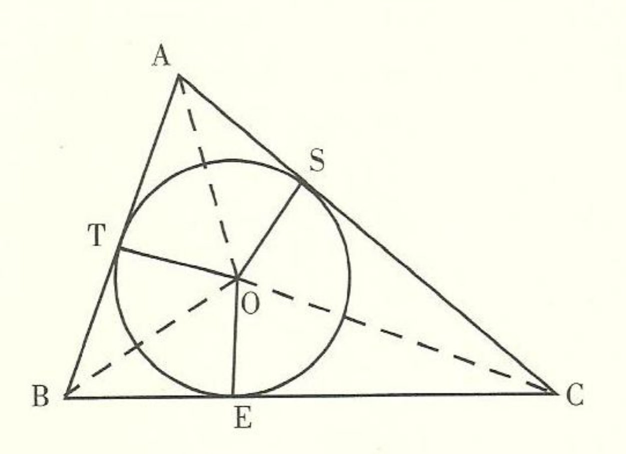
L. Pacioli, *Divina proportione* (1509)

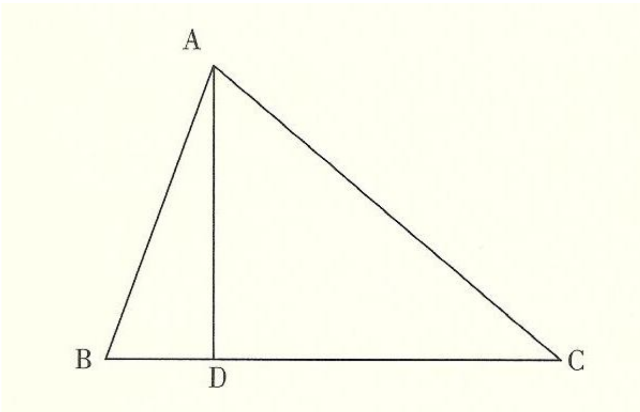

HIERONIMI C.CARDANI MEDICI MEDIOLANENSIS, PRACTICA ARITHMETICE, & Mensurandi singularis. In qua que preter alias cõtinentur, versa pagina demonstrabit.

G. Cardano, *Practica arithmeticae* (1539)

Tartaglia riprende il problema nella **Sesta parte del *General trattato*** (cc. 25r-26v), correggendolo da Pacioli e Cardano, e proponendone una generalizzazione ed una soluzione algebrica:

Frate Luca nella sua opera intitolata Divina proportione in fine del tercio trattato della seconda parte, a carte 26, pone questo quesito: Egli è uno triangulo ABC che la basa sua BC è 14, sopra la quale si posa uno circulo a sesto, che il suo diametro è 8, e il punto del contacto è discosto dal B 6. Dimandasi la quantità degli altri dui lati AB e AC del detto triangolo. Questo medesimo pone ancor Hieronimo Cardano milanese medico in una sua opra, e cadauno di questi dui auttori lo rissolveno per certe lor vie, le quali in vero non sono generali. Et di una cosa che non è generale non si può di quella conseguire construtto alcuno buono.





Tartaglia distingue tre casi, a seconda se il triangolo è acutangolo, rettangolo o ottusangolo. Il primo caso si verifica quando il piede dell'altezza AD relativa alla base cade all'interno di questa, ossia quando il raggio del cerchio è minore di entrambe le parti BE ed EC. Il secondo quando cade su un estremo della base, ossia il raggio è uguale alla parte minore della base. Il terzo quando cade fuori della base, ossia il raggio è maggiore di una delle due parti della base.

Nel caso specifico risulta BE = BT = 6 e quindi EC = 14 – 6 = 8. Poiché il raggio $r = 4$ siamo nel primo caso. Abbiamo anche SC = EC = 8.
Posto **AS = AT = *x*** risulta AB = 6 + x e AC = 8 + x

Ora Tartaglia osserva che

$AC^2 - AB^2 = DC^2 - BD^2$ (infatti dal teorema di Pitagora $AD^2 = AC^2 - DC^2 = AB^2 - BD^2$). Inoltre

$AC^2 - AB^2 = DC^2 - BD^2 = (DC + BD)(DC - BD) = BC(DC - BD) = BC(BC - 2BD)$
da cui

$$\mathbf{BD} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{BC} - \frac{\mathbf{AC^2 - AB^2}}{\mathbf{BC}}\right)$$ e quindi sostituendo si ottiene

(*) $\mathbf{BD} = 6 - \frac{x}{7}$

Detta S l'area del triangolo e p il perimetro, Tartaglia osserva poi che

$$\boldsymbol{S = \frac{rp}{2}} = 2\,(6 + x + 14 + 8 + x) = 56 + 4x \quad \text{ed è anche} \quad S = \frac{\mathrm{BC}}{2}\,\mathrm{AD} = 7\,\mathrm{AD} \quad \text{da cui}$$

$$\mathrm{AD} = 8 + \frac{4x}{7} \qquad \text{Ne segue}$$

$$\mathbf{BD^2 = AB^2 - AD^2 = (6 + \mathit{x})^2 - (8 + \frac{4x}{7})^2}$$

Utilizzando questa e la (*) otteniamo

$$(6 + x)^2 - (8 + \frac{4x}{7})^2 = (6 - \frac{x}{7})^2 \qquad \text{da cui l'equazione}$$

$\boldsymbol{x^2 + 7x = 98}$ che ha soluzione $x = 7$ ed infine AB = $6 + x = 13$, AC = $8 + x = 15$

Successivamente Tartaglia esamina gli altri due casi del triangolo rettangolo e ottusangolo.

I problemi che abbiamo discusso fino ad ora richiedono un procedimento più o meno complesso dal punto di vista geometrico e per la messa in equazione. Il calcolo algebrico si presenta sempre molto semplice, con l'utilizzo di sole equazioni di primo e di secondo grado.

Talvolta, anche se non frequentemente, nell'ambito di una problema, l'algebra assume invece un ruolo di primo piano rispetto alla geometria, con dei livelli di maggiore complessità e con l'intervento di equazioni di grado superiore al secondo.
Ne sono esempi un problema della *Summa* di Pacioli e due problemi della *Geometria* di Fonticolano, che riportiamo di seguito.

***Summa*, Parte seconda, cc. 56r-56v**

Egl'è uno quadrangulo rettangulo del quale la lunghezza è più che la larghezza 6 braccia, e la sua area col diametro è 100. Adimandase quanto è la sua lunghezza e quanto la larghezza.

Posto: a = lunghezza, b = larghezza, d = diametro ossia la diagonale, S = area
il problema si traduce nelle due condizioni

$a = b + 6 \qquad S + d = 100$

Pacioli pone $\boldsymbol{a = x + 3,\ b = x - 3}$ da cui $S = (x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$

Essendo $d = \sqrt{(x+3)^2 + (x-3)^2} = \sqrt{2x^2 + 18}$, si perviene all'equazione
$x^2 - 9 + \sqrt{2x^2 + 18} = 100$ e successivamente ad una biquadratica

$\sqrt{2x^2 + 18} = 109 - x^2$

$2x^2 + 18 = (109 - x^2)^2$

$\boldsymbol{x^4 + 11863 = 220\, x^2}$

da cui $x^2 = 110 - \sqrt{237}$ ed infine $x = \sqrt{110 - \sqrt{237}}$

In riferimento alla posizione fatta $a = x + 3,\ b = x - 3$ Pacioli osserva

E nota che tu non ponga [b] uguale una cosa [= x] e l'altro [a] una cosa e 6 [= x + 6] perché per la confusione dele cose, censi e cubi la questione non si potrebe asolvere, ma per questa via si levono via quelli nomi.

Ponendo infatti $b = x$, $a = x + 6$ si avrebbe

$S = x(x + 6), \qquad d = \sqrt{x^2 + (x+6)^2} = \sqrt{2x^2 + 12x + 36}$ da cui

$x(x + 6) + \sqrt{2x^2 + 12x + 36} = 100$

che, dopo aver elevato al quadrato, conduce ad una equazione di quarto grado completa in cui sono presenti "cose, censi e cubi", e dunque a quel tempo non risolubile. Con altri dati numerici, ma con la stessa soluzione di Pacioli, la questione verrà ripresa nella *Practica arithmeticae* di Cardano (1539), che la definisce "pulchra".

Pico Fonticolano, *Geometria* (1597), pp. 57 e 87

I due problemi del Fonticolano conducono entrambi ad una equazione di terzo grado, la cui soluzione era allora ormai nota.
Il primo problema è geometrico solo nell'enunciato ed è il **19° dei trenta quesiti che furono proposti a Tartaglia da Antonio Maria Fior nel 1535** a Venezia.

Sono dui triangoli equilateri che le loro superficie aggionte insieme fanno radice 99 $\frac{23}{27}$ *e l'area minore è la radice cuba della maggiore. Dimandase le superficie.*

Indicando con x l'area minore si perviene subito all'equazione

$\boldsymbol{x^3 + x = \sqrt{99\ \frac{23}{27}}}$ del tipo $x^3 + px = q$ che ha per soluzione

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Il secondo problema propone un quadrilatero

che li dui lati sono tra di loro come 6 a 2 e l'altri dui come 10 a 5, il quadrato del minor lato moltiplicato con l'altro lato minore ... aggionto con il prodotto dell'aggregato delli tre lati con il lato opposto alla proportione di 10 facciano 4000, dimandasi li lati.

L'autore scrive:
Poni un lato 2 cose, l'opposto 6 cose, l'altro 5 cose, l'opposto 10 cose
[2x, 6x, 5x, 10x] da cui l'equazione

$(2x)^2\, 5x + (2x + 6x + 10x)\, 5x = 4000$ ossia

$\boldsymbol{x^3 + \frac{9}{2}x^2 = 200}$ che si riduce ad una equazione del tipo precedente con la trasformazione

$x = y - \frac{3}{2}$

Terminologia

Altezza: cateto (catetto)
Triangolo: triangolo, scudo
Triangolo equilatero: equilatero, isopleuro
Triangolo isoscele: equicurio
Triangolo scaleno: scaleno, diversolatero
Triangolo acutangolo: oxigonio
Triangolo ottusangolo: ampligonio
Triangolo rettangolo: ortogonio
Rettangolo: quadrangulo rettangolo o figura parte altera longiore
Trapezio: capo ascisso o tagliato (caput absciso)
Cerchio: circulo, tondo
Semicerchio: semicirculo, mezzo tondo

BIBLIOGRAFIA

ALBERTI LEON BATTISTA, *Ludi matematici*, a cura di R. Rinaldi, Milano, Guanda, 1980.

ANONIMO FIORENTINO, *Trattato di geometria pratica, dal codice L.IV.18 (sec. XV) della Biblioteca Comunale di Siena*, a cura e con introduzione di A. Simi, Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale, 21, Pisa, ETS, 1993.

ANONIMO FIORENTINO, *Alchuno chaso sottile. La quinta distinzione della «Praticha di Geometria» dal Codice Ottoboniano Latino 3307 della Biblioteca Apostolica Vaticana*, a cura e con introduzione di A. Simi, Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale, 23, Università degli Studi di Siena, 1998.

ARRIGHI GINO, *Note sui simboli di un «Tratato d'arcibra» del '400*, «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», 20, 1965, pp. 498-501.

CALANDRI FILIPPO, *Aritmetica, secondo la lezione del codice 2669 (sec. XV) della Biblioteca Riccardiana di Firenze.* A cura di Gino Arrighi, Cassa di Risparmio di Firenze, Firenze, 2 voll., 1969.

DOLD SAMPLONIUS YVONNE, *Problem of the two towers*, in *Itinera Mathematica. Studi in onore di Gino Arrighi per il suo 90° compleanno*, a cura di R. Franci, P. Pagli, L. Toti Rigatelli. Centro Studi sulla Matematica Medioevale, Università di Siena, 1996, pp. 45-69.

FRANCI RAFFELLA, *La trattatistica d'abaco nel Quattrocento*, in *Atti del Convegno internazionale di studi Luca Pacioli e la Matematica del Rinascimento*, Città di Castello, Petruzzi, 1998, pp. 61-75.

GIUSTI ENRICO, *L'insegnamento dell'algebra nel «General trattato» di N. Tartaglia*, in *Atti della giornata di studio in memoria di Niccolò Tartaglia*, Brescia, 2007, pp. 155-179.

HØYRUP JENS, *Jacopo da Firenze's «Tractatus Algorismi» and Early Italian Abbacus Culture*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 2007.

PACIOLI LUCA, *Tractatus mathematicus ad discipulos perusinos*, a cura di Giuseppe Calzoni, Gianfranco Cavazzoni, Città di Castello, Delta Grafica, 1996.

PACIOLI LUCA, *Tractatus geometrie. Summa de Arithmetica et Geometria, Proportioni et Proportionalita Pars II*, 1494, ed. Annalisa Simi. Digital research library: The Archimedes Project (2002-2004).

PIERO DELLA FRANCESCA, *Trattato d'abaco*. Dal codice ashburnhamiano 280 (359*-291*) della Biblioteca Medicea Laurenziana di Firenze, a cura e con introduzione di Gino Arrighi, Pisa, Domus Galiaeana, 1979.

PIZZAMIGLIO PIERLUIGI, *Niccolò Tartaglia nella storia, con antologia degli scritti*, Milano, EDUCatt, 2012.

PROCISSI ANGIOLO, *Di alcuni problemi anteriori ed analoghi a quello di Malfatti*, in *Gianfrancesco Malfatti nella cultura del suo tempo. Atti del Convegno su G.F. Malfatti*, Ferrara 23-24 ottobre 1981, Bologna, "Monograf", 1982, pp. 329-336.

SIMI ANNALISA, *Problemi caratteristici della geometria pratica nei secoli XIV-XVI*, in *Scienze matematiche e insegnamento in epoca medioevale*. Atti del Convegno internazionale di Studio, Chieti 2-4 maggio 1996, Napoli, Edizioni Scientifiche Italiane, 2000, pp. 156-199.

SIMI ANNALISA, *La geometria nel Rinascimento: il Codice Ottoboniano Latino 3307 della Biblioteca apostolica Vaticana*, «Contributi di Filologia dell'Italia Madiana», XIII, 1999, pp. 41-109 (terminologia).

SIMI ANNALISA, *L'eredità della «Practica geometriae» di Leonardo pisano nella geometria del Basso Medioevo e del Primo Rinascimento*, «Bollettino di Storia delle Scienze matematiche», XXIV, 1, 2004, pp. 9-41.

ULIVI ELISABETTA, *La geometria pratica in Italia dall'inizio della stampa alla fine del XVI secolo*, Istituto Matematico Ulisse Dini, Firenze, Rapporto di ricerca 7, a.a. 1982-83.

ULIVI ELISABETTA, *Le scuole d'abaco e l' insegnamento della matematica a Firenze nei secoli XIII-XVI,* in *Atti del Convegno internazionale di studio Scienze matematiche e insegnamento in epoca medioevale*, Napoli, Edizioni Scientifiche Italiane, 2000, pp. 153-199.

ELENCO DELLE SIGLE

BAV = Biblioteca Apostolica Vaticana
BCS = Biblioteca Comunale, Siena
BMLF = Biblioteca Medicea Laurenziana, Firenze
BNF = Biblioteca Nazionale, Firenze
BRF = Biblioteca Riccardiana, Firenze
BUB = Biblioteca Universitaria, Bologna