L'ALGEBRA NEL SETTECENTO E L'EMERGERE DEI NUMERI COMPLESSI

RAFFAELLA FRANCI[1]

INTRODUZIONE

Nel Seicento il tema principale della ricerca matematica è l'algebra, mentre nel secolo successivo il soggetto più studiato è il neonato Calcolo infinitesimale, tuttavia tutti i più importanti matematici di questo secolo dedicano almeno una parte dei loro studi all'algebra, che peraltrotraggono le loro motivazioni, in gran parte, proprio dall'analisi.

Due sono i temi centrali della ricerca algebrica nel Settecento:

A. La ricerca di formule risolutive per radicali, ovvero soluzioni algebriche, per le equazioni di grado superiore al quarto
B. La dimostrazione che ogni equazione

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+ \dots +a_1x+a_0=0$$

a coefficienti reali o complessi ha n soluzioni reali o complesse. Questo enunciato è noto come *Teorema fondamentale dell'algebra,* vedi SCHEDA 1.

Entrambi questi problemi furono risolti allo scadere del secolo. Fu infatti nel 1799 che Paolo Ruffini dette una risposta negativa al primo dimostrando che in generale le equazioni di grado superiore al quarto non hanno risoluzioni per radicali. Nello stesso anno, C.F. Gauss, nella sua tesi di laurea, fornì la prima dimostrazione esauriente del secondo. Il teorema ha un significato basilare nella storia della teoria dei numeri complessi, sono infatti i tentativi di dimostrarlo che hanno determinato lo sviluppo e l'affermazione di questo sistema numerico. Storicamente, come vedremo, l'accettazione dei numeri complessi va di pari passo con i tentativi di dimostrare il teorema.

IL TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

L'espressione
$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+ \dots +a_1x+a_0$

[1] Raffaella Franci, Via Veneto 12, I-53100 SIENA, raffaellafranci@alice.it

dove n è un numero naturale non nullo e gli $a_i$sono numeri complessi si dice *polinomio di grado n in una indeterminatax.* Un numero complesso c si dice *radice del polinomio p(x)* se

$$p(c)=a_n c^n+a_{n-1}c^{n-1}+\dots+a_1 c+a_0\equiv 0.$$

Sussiste il seguente teorema:
Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(a) *Ogni polinomio di grado* $n \geq 1$ *a coefficienti in* **C** *ha almeno una radice in* **C**
(b) *Ogni polinomio di grado* $n \geq 1$ *a coefficienti in* **C** *si può fattorizzare in un prodotto di n polinomi di primo grado a coefficienti in* **C** *e ammette n radici (distinte o coincidenti)*
(c) *Ogni polinomio di grado* $n \geq 1$ *a coefficienti in* **R** *si può fattorizzare in un prodotto di polinomi a coefficienti reali di primo o di secondo grado*

Questo risultato è noto come *Teorema fondamentale dell'algebra*,[2] questa denominazione, che è dovuta a Gauss, risale a un'epoca in cui la parola algebra era sinonimo di teoria delle equazioni algebriche, mentre oggi ha un significato molto più ampio, per cui attualmente sarebbe più esatto denominarlo *Teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche.*

SCHEDA 1

L'EMERGERE DEI NUMERI COMPLESSI

Il concetto di numero naturale e quello di frazione risalgono all'alba della civiltà ed è difficile ricostruire la loro nascita ed evoluzione. I primi documenti scritti in cui essi compaiono ce li presentano, infatti, già perfettamente sviluppati. Bisogna notare inoltre che all'idea di numero naturale si è pervenuti, in modo indipendente, in varie epoche e in parti diverse del nostro pianeta e che, ancora oggi, si scoprono piccole comunità che vivono isolate nelle ultime foreste vergini della Terra, che non hanno elaborato questa nozione.

La storia dei numeri irrazionali, di quelli negativi e dei complessi si può invece ricostruire con maggiori dettagli. Questi numeri, infatti hanno avuto origine in tempi più recenti per cui disponiamo di una più adeguata documentazione sul loro emergere e affermarsi.

Mentre i numeri naturali e le frazioni sono nati da esigenze di carattere pratico di tipo amministrativo e commerciale, i numeri negativi, reali e complessi sono, invece, frutto di speculazioni interne allo sviluppo della matematica, in particolare di

2 In seguito indicheremo brevemente il teorema con la sigla TFA. Una dimostrazione dell'equivalenza degli enunciati (a) e (b) si può trovare in R. COURANT, H. ROBBINS, *Che cos'è la matematica?,* Boringhieri, Torino, 2010, a pp. 171-174.

quella parte che è denominata algebra e che fino alla metà dell'Ottocento si identificava con la teoria delle equazioni algebriche. La risoluzione e lo studio delle proprietà delle equazioni polinomiali porta, infatti, inevitabilmente allo studio della natura e delle proprietà dei vari sistemi di numeri.

Fin dalle sue origini l'algebra ha conferito dignità di numeri alle quantità irrazionali che i Greci avevano scoperto, ma bandito dall'ambito aritmetico. Senza l'uso di radici irrazionali, infatti, non si possono risolvere le equazioni di secondo grado la cui risoluzione è il nucleo teorico fondamentale del trattato di al-Khwarizmi,scritto agli inizi del nono secolo, che viene considerato dagli storici della matematica il testo fondante della disciplina. Il matematico arabo, come tutti i suoi epigoni europei fino agli inizi del Seicento, considerava solo equazioni a coefficienti positivi e soluzioni positive delle medesime. A questo proposito si può osservare che per circa sei secoli dalla sua fondazione, l'algebra non ha subito una significativa evoluzione. Il primo avanzamento notevole, infatti, si ebbe solo nella prima metà del Cinquecento con la risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado ad opera di Scipione dal Ferro, Niccolò Tartaglia, Girolamo Cardano e Ludovico Ferrari. Ed è proprio in questo contesto che si iniziano a considerare anche soluzioni negative ed emerge una problematica che porta alla introduzione dei numeri complessi.[3]

Nella sua *Algebra* pubblicata a Bologna nel 1572, RAFFAELE BOMBELLI, presentando in modo molto accurato il calcolo aritmetico relativo alle quantità che intervengono nelle soluzioni delle equazioni,introduce regole di calcolo per operare con le radici di numeri negativi e accetta queste nuove quantità numeriche anche come soluzioni per le equazioni di secondo grado con discriminante negativo che fino ad allora erano considerate impossibili, cioè prive di soluzioni.Questo tipo di soluzioni vengono denominate da Bombelli "sofistiche".

I NUMERI COMPLESSI

Consideriamo l'insieme **C** delle espressioni formali a+ib con a, b numeri reali.
In **C** definiamo un' addizione e una moltiplicazione nel modo seguente:

$$(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+i(b+b')$$
$$(a+ib)\,(a'+ib')=(aa'-bb')+i(ab'+a'b).$$

E' facile verificare che: $i^2=-1$, l'addizione e la moltiplicazione così definite sono associative, commutative, che la moltiplicazione è distributiva rispetto all'addizione, che 0 e 1 sono rispettivamente l'elemento neutro additivo e moltiplicativo, che ogni elemento ammette inverso additivo e che ogni elemento diverso da zero ammette inverso moltiplicativo. In conclusione **C** è

[3]Nella SCHEDA 2 proponiamo una rapida introduzione "moderna" di questo sistema numerico

un campo che prende il nome di *campo dei numeri complessi*.
Il numero complesso *a-ib* si dice *complesso coniugato* del numero *a+ib*. E' immediato verificare che la somma e il prodotto di un numero complesso con il suo coniugato sono numeri reali.[4]

SCHEDA 2

A partire dal Seicento l'algebra comincia a svilupparsi molto più rapidamente. Nonostante che Bombelli avesse introdotto in modo chiaro e completo le regole per operare con quelli che oggi chiamiamo *numeri complessi*, la loro compiuta accettazione non avvenne né facilmente né in tempi brevi. La resistenza a considerare soluzioni negative o complesse di equazioni algebriche derivava, in gran parte, dal fatto che l'algebra era considerata uno strumento per risolvere problemi "concreti" e le soluzioni di quel genere non avevano alcun significato reale.

Autori come Albert Girard e René Descartes, che sono tra i primi ad accettare questo nuovo tipo di soluzioni, lo fanno per motivi squisitamente matematici.

ALBERT GIRARD (1595-1632),[5] nel suo trattato *L'invention en algebre* (1629), usa disinvoltamente coefficienti negativi e calcola non solo le soluzioni negative, ma anche quelle complesse.

La parte più interessante del trattato è quella dove Girard fornisce uno dei primi enunciati di quello che sarà poi denominato Teorema fondamentale dell'algebra:

Toutes les equations reçoiventautant de solutions, que la denomination de la plus haute quantité le demonstre, excepté les incompletes. [Tutte le equazioni, tranne quelle incomplete, hanno tante soluzioni quante ne indica la denominazione della quantità più alta (cioé il grado)]

Girard non da alcuna dimostrazione o giustificazione della sua affermazione, ma la illustra mediante alcuni esempi che includono l'equazione $x^4-4x+3=0$ della quale calcola le soluzioni $1, 1, -1+\sqrt{-2}, -1-\sqrt{-2}$. In conclusione egli osserva

Si potrà dire a cosa servono queste risoluzioni che sono impossibili, io rispondo per tre cose: per la certezza della regola generale e perché non ci sono altre soluzioni e per la loro utilità. … A questo proposito noi notiamo che nessuno finora ha risolto le equazioni sopra menzionate con tutte le loro soluzioni.

---

[4]Maggiori dettagli si possono trovare per esempio in: R. COURANT, H. ROBBINS, *Che cos'è la matematica?,* Boringhieri, Torino, 2010, pp. 155-170
[5]Notizie sulla vita e l'opera di questo come degli altri matematici citati nel seguito si possono trovare in C.B. BOYER, *Storia della matematica,* Oscar Mondadori, 2011

Girard prosegue indicando alcuni punti delle opere di Stevino e Viète dove mancano queste soluzioni.Egli inoltre completa la sua affermazione sul numero di soluzioni di un’equazione con l’enunciazione delle relazioni che passano tra i coefficienti e le radici, relazioni oggi note come *formule di Viéte-Girard.*

AncheRENÉ DESCARTES (1596-1650)nel terzo capitolo della sua *Géometrié* (1637), tutto dedicato allo studio delle equazioni algebriche, fornisce un enunciato simile a quello di Girard

> Sachezdoncqu’enchaqueéquation, autant che la quantitéinconnue a de dimensions, autantpeut-il avoi de diversesracines, c’est-a-dire de valeurs de cettequantité [Sappi che ogni equazione può avere tante radici, vale a dire valori di questa quantità, quante sono le dimensioni della quantità incognita]…

Il matematico francese prosegue elencando altre proprietà generali delle equazioni:

> Ma spesso succede che alcune delle radici sono false ovvero meno di niente (cioè negative)… Si può anche conoscere il numero di radici vere (cioè positive) e di radici false in ogni equazione. Vale a dire essa ne può avere tante vere quante volte i segni + e – si trovano a essere cambiati, e tante false quante volte si trovano due segni + o due segni – di seguito.[6]

Descartes enuncia anche quello che nei testi di algebra scolasticiattualmente viene chiamato Teorema di Ruffini, il quale afferma che

“ un polinomio può essere diviso per un binomio *(x-a)* se e solo *a* è una radice del polinomio”. Tutte queste regole non sono dimostrate ma solo illustrate da alcuni esempi.

Egli conclude la sua trattazione dell'algebra con l’affermazione:

> Le radici … non sono sempre reali, talvolta esse sono immaginarie, cioè mentre noi possiamo sempre concepire tante radici per ogni equazione come ho già detto, tuttavia qualche volta non c’è alcuna quantità che corrisponde a quello che si immagina.Così sebbene si possa immaginare che l’equazione $x^3-6x^2+13x-10=0$ abbia tre radici, tuttavia ve ne è solo una reale, 2, mentre le altre due…. sono immaginarie.

Quest’ultima affermazione sembra indicare che Descartes realizzi il fatto che un’equazione di grado *n* ha esattamente *n* radici purché si considerino anche quelle complesse che lui chiama *immaginarie,* anche perché, come ha osservato in precedenza, se l’equazione ha tutte radici di questo tipo non può essere costruita geometricamente e quindi solo immaginata.

---

[6]Si tratta della prima enunciazione di quella che attualmente si denomina *Regola dei segni.*

Girard e Descartes anche se in modo un po' confuso propongono quelle che sono considerate le prime enunciazioni del TFA. Essi non solo non forniscono alcuna giustificazione del loro enunciato, ma si limitano a verificarlo su esempi che riguardano equazioni fino al quarto grado, le uniche per cui all'epoca si conoscevano formule risolutive.

ISAAC NEWTON (1642-1727) nella sua *ArithmeticaUniversalis*(1707) considera le radici complesse come una indicazione della impossibilità di risolvere un problema, di qui l'appellativo di *impossibili* da lui usato per questo tipo di numeri:

Così l'equazione deve esprimere tutti i casi del problema così bene sia quelli che sono impossibili sia quelli che sono possibili, secondo che le sue radici possono essere possibili o immaginarie.

Nello stesso trattato egli propone un' enunciato del TFA simile a quello di Descartes ed una regola, da lui trovata, per conoscere il numero delle radici immaginarie di un'equazione senza risolverla, regola analoga a quella proposta da Descartes per conoscere il numero delle radici positive e negative.

IL TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA NEL SETTECENTO

Il Settecento è il secolo dell'analisi infinitesimale, tuttavia quasi tutti i più importanti matematici si occupano anche della risoluzione delle equazioni polinomiali. In questo ambito si cercano metodi per risolvere equazioni di ogni grado. Inoltre il problema di integrare funzioni razionali reali, cioè quozienti di polinomi a coefficienti reali, porta ad indagare il problema di determinare se ogni polinomio a coefficienti reali si possa fattorizzare in un prodotto di polinomi di primo e secondo grado a coefficienti reali. L'esistenza di una tale fattorizzazione, infatti, permette di ridurre l'integrale di tali funzioni alla somma di integrali di funzioni del tipo $1/(x-a)^n$, $(cx+d)/(x^2+ax+b)$ con a,b,c,d reali e $a^2-4b<0$, che si sapevano calcolare.

I primi a fare questo collegamento furonoGOTTFRIED W. LEIBNIZ (1646-1716) e GIOVANNIBERNOULLI (1667-1748) agli inizi del 1700. In particolare Leibniz sulla base di un esempio, mal calcolato, afferma che purtroppo la decomposizione non è sempre possibile. Egli infatti considera la decomposizione

$$x^4+a^4=(x^2+a^2i)(x^2-a^2i)=(x+a\sqrt{i})(x-a\sqrt{i}))(x+a\sqrt{-i})(x-a\sqrt{-i})$$

e afferma che non vi è nessun modo di combinare due dei quattro fattori di primo grado in modo da avere un trinomio di secondo grado a coefficienti reali. Ma si sbagliava infatti se avesse visto che

$$\sqrt{i}=1/2\ \sqrt{2}(1+i) \quad \text{e} \quad \sqrt{-i}=1/2\ \sqrt{2}(1-i)$$

avrebbe ottenuto

$$x^4+a^4= (x^2+a\sqrt{2}+a^2)\ (x^2-a\sqrt{2}+a^2).$$

LEONARDO EULERO(1707-1783), invece, in una lettera del 1 ottobre 1742 a Nicola Bernoulli afferma, senza dimostrazione, che ogni polinomio a coefficienti reali può essere decomposto in fattori lineari e/o quadratici a coefficienti reali. Bernoulli non giudica corretta l'affermazione fornendo come esempio il polinomio

$x^4-4x^3+2x^2+4x+4$ che avendo le radici: $1 \pm \sqrt{2+i\sqrt{3}}$ e $1 \pm \sqrt{2-i\sqrt{3}}$ secondo lui non poteva essere fattorizzatonel modo indicato da Eulero. Quest'ultimo però mostra che il suddetto polinomio ammette i seguenti fattori a coefficienti reali

$x^2-(2+a)x+1+\sqrt{7}+a$ e $x^2(2-a)x+1+\sqrt{7}-a$, $a = \sqrt{1+2\sqrt{7}}$.

e aggiunge di essere in grado di dimostrare rigorosamente che tale scomposizione sussiste per tutti i polinomi di grado ≤ 6. Eulero continuò a cercare una dimostrazione della validità generale di questa scomposizione e in una lettera del 1744 a Nicola Bernoulli si dice convinto che per ottenere il risultato cercato è sufficiente dimostrare l'esistenza di una radiceanche se non la si sa trovare effettivamente. Eulero ne propone infine una dimostrazione in un articolo "Recherchessurlesracinesimaginairesdesequations" , pubblicato, nel 1751, nelle *Mémoires de l'Académie de Berlin*. Qui Eulero dopo aver proposto la fattorizzazione di alcuni polinomi passa alla dimostrazione del caso generale concernente polinomi a coefficienti reali così formulato:

Ogni funzione razionale di una variabile come

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+ \dots$$

si può sempre risolvere in fattori reali o semplici della forma x+p o anche doppi della forma xx+px+q.

La dimostrazione nelle sue linee generali può considerarsi corretta, tuttavia Eulero trascura molti dettagli, la sua dimostrazione fu perfezionata da Lagrange (1736-1813) in una memoria del 1774, pubblicata sulla medesima rivista.

Nel 1748 sempre negli Atti dell'Accademia di Berlino era comparsa una dimostrazione del medesimo risultato proposta da D'Alembert . La dimostrazione aveva molti punti deboli e fu criticata, tuttavia anche questa linea dimostrativa poteva essere portata a rigore come dimostrò Argand nel 1814. Anche Laplace nel 1795 pubblicò una dimostrazione del medesimo teorema.

CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855) è unanimemente indicato dagli storici della matematica come il primo ad avere dato una dimostrazione completa del TFA, anche se essa non soddisfa i moderni standard di rigore. Egli la pubblicò nel 1799 nella sua tesi di laurea "*Demostratio nova theorematisomnemfunctionemalgebraicamrationalemintegramuniusvariabilis in factoresreales primi velsecundigradusresolvi posse*" [Nuova dimostrazione del teorema che ogni funzione razionale intera si può risolvere in fattori reali di primo o secondo grado]. Gauss dopo aver mosso le sue obiezionialle dimostrazioni di D'Alembert, Eulero e Lagrange propone la sua dimostrazione, di natura topologica, in cuiparte dalla dimostrazione dell'esistenza di una radice senza calcolarla per poi dimostrare la fattorizzazione di un polinomio reale in fattori reali di primo e secondo grado. [7]Gauss diede altre tre dimostrazioni del teorema, la seconda e la terza nel 1816, l'ultima nel 1849.

RELAZIONI TRA LA FUNZIONE ESPONENZIALI E LE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

I contributi di Eulero al calcolo e alla diffusione dei numeri complessi vanno ben oltre la sua dimostrazione del teorema fondamentale. Numerose questioni legate a calcoli con i numeri complessi si trovano in molte delle sue lettere in particolare in quelle a DanieleBernoulli e Goldbach

Nel suo trattato *Introductio in analysisinfinitorum*, stampato nel 1748, ma completato nel 1740, egli maneggia con estrema disinvoltura i numeri complessi e dedica ampio spazio a questioni ad essi legate. Già nelle prime pagine afferma che una variabile può assumere qualunque valore compreso uno immaginario. Poco dopo dichiara che i fattori di primo grado di un'equazione sono reali o immaginari e che questi ultimi si presentano sempre in coppie il cui prodotto è un fattore reale.

Successivamente dimostrale relazioni

$$\cos n\theta \pm i \operatorname{sen} n\theta = (\cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta)^{n}$$ [8]

(#)$cosx \pm isenx = e^{\pm ix}$[9]

---

[7]Questa dimostrazione è chiaramente esposta in D. GIGLI, *I numeri complessi,* in *Questioni riguardanti le matematiche elementari,* Parte prima, Tomo secondo, Zanichelli, Bologna, 1924, Ristampa 1983, 1924 pp. 133-270. La dimostrazione è a pp. 192-196. Una dimostrazione facilmente leggibile del teorema si può trovare in COURANT. ROBBINS, *Che cos'è la matematica?,* cit., pp.401-404.

[8]Tale relazione, già nota al matematico Abraham De Moivre (1667-1754), viene oggi indicata con il suo nome.

[9] Per la dimostrazione vedi scheda 3.

da queste ultimericava facilmente

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad e \qquad senx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Se nell' identità $cosx + isenx = e^{ix}$poniamo x=π si ottiene:

$e^{i\pi} = -1 \;\; ovvero \;\; e^{i\pi} + 1 = 0.$

Quest'ultima relazione, considerata una delle più belle di tutta la matematica, viene ora chiamata *identità di Eulero*, ma in realtà egli non ne fa menzione in alcuno dei suoi scritti.

RELAZIONI TRA FUNZIONE ESPONENZIALE E FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Se *x* è una variabile reale si ha

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, -\infty < x < \infty$$

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

$$cosx = 1 - \frac{\mathrm{x}^2}{2!} + \frac{\mathrm{x}^4}{4!} - \frac{\mathrm{x}^6}{6!} + \frac{\mathrm{x}^8}{8!} - \cdots$$

Sostituendo nella prima formula *ix* al posto di *x* si ottiene tenuto conto che $i^2=-1$ si ha

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + i\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots\right)$$

Quindi $cosx + isenx = e^{ix}$ da cui segue facilmente ponendo –*x* al posto di *x*,$cosx - isenx = e^{-ix}$.

In una lettera a D'Alembert del 29 dicembre 1746 Eulero chiarisce la questione relativa ai logaritmi di numeri negativi oggetto di dibattito fin dai tempi di Leibniz e Giovanni Bernoulli. Egli infatti scrive: " Il logaritmo di ogni numero ha un numero infinito di valori, uno solo dei quali è reale quando il numero è positivo. Ma quando il numero è negativo tutti i valori sono immaginari ". Questa affermazione viene poi dimostrata in un lavoro pubblicato l'anno successivo sugli Atti della Accademia di Berlino. Le affermazioni di Eulero seguono facilmente dalla considerazione che da

(#) segue che la funzione $y=e^{ix}$ è periodica di periodo 2π, per cui se $ln\ a = c$ anche $c \pm 2n\pi$ sono logaritmi naturali di a.

A Eulero siamo anche debitori di molti dei simboli ancora oggi usati in matematica. Fu lui infatti a introdurre la lettera *e* per indicare la base dei logaritmi naturali, ad usare sistematicamente π per indicare il rapporto fra la circonferenza e il diametro. Dobbiamo ad Eulero anche l'uso della lettera *i* per indicare $\sqrt{-1}$ che però fu adottata solo verso la fine della sua vita in una memoria del 1777, pubblicata sugli Atti della Accademia di San Pietroburgo, dove egli getta le basi di una teoria delle funzioni di variabile complessa.

Nonostante che per molti decenni avesse maneggiato i numeri complessi con notevole padronanza e maestria, Eulero aveva grande difficoltà a spiegare la loro natura, come si evince dalla trattazione che ne fa nel suo trattato elementare di algebra del 1768, (vedi Lettura).

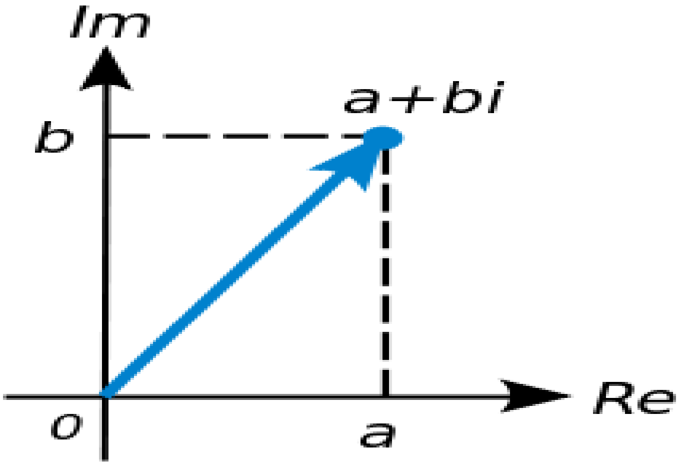
LA RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DEI NUMERI COMPLESSI E LA LORO RAPPRESENTAZIONE TRIGONOMETRICA.

Fra i motivi che hanno a lungo ostacolato la comprensione dei numeri complessi c'è sicuramente la mancanza di una loro rappresentazione geometrica. Questa fu infine proposta quasi contemporaneamente e indipendentemente tra la fine del Settecento e i primi anni dell'Ottocento da CASPARWESSEL (1745-1818), JEAN-ROBERT ARGAND (1768-1822) e CARL FRIEDERICH GAUSS (1777-1855). Fu solo comunque dopo il 1831, anno in cui fu pubblicato il lavoro di Gauss *Teoria residuarumbiquadraticorum.Commentatio seconda,* che l'idea del piano geometrico complesso cominciò ad affermarsi. Gauss pose in corrispondenza i numeri complessi con i punti di un piano cartesiano fornendo così una interpretazione geometricaall'addizione e alla moltiplicazione di due numeri complessi, facendo apparire più naturali da un punto di vista intuitivo queste operazioni.

Dobbiamo a Gauss anche la denominazione "numeri complessi" da usare in luogo di "numeri immaginari" o "numeri impossibili" allora in uso, che secondo il suo giudizio avevano reso questo concetto misterioso ed oscuro. Egli infatti scrive:

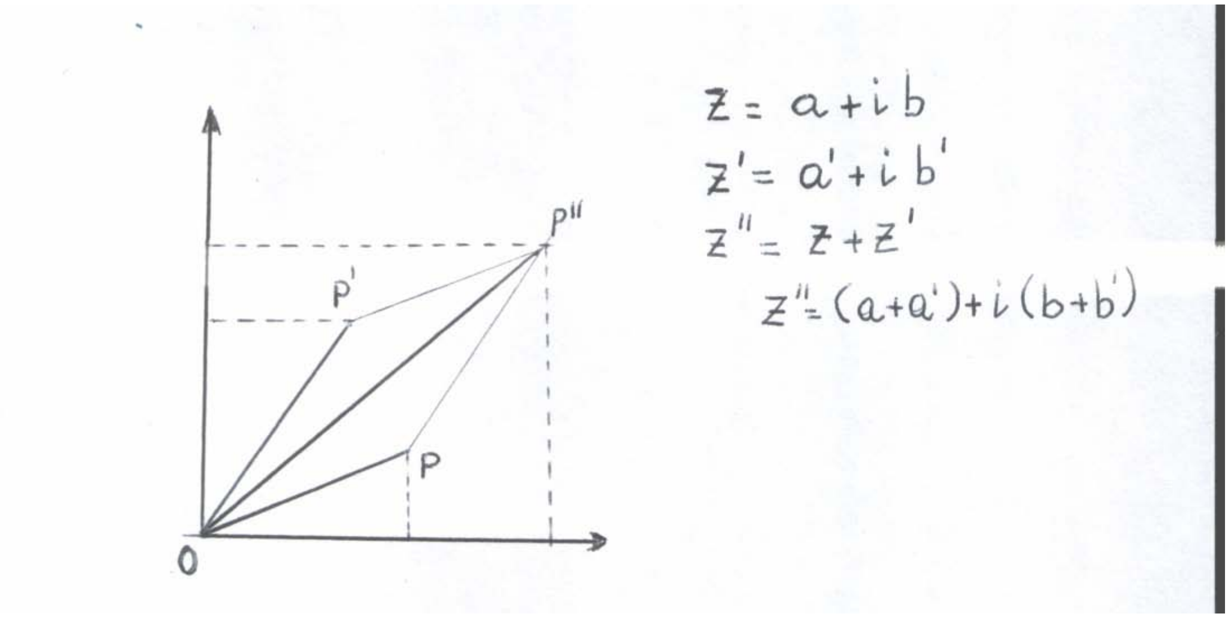
Se questo soggetto è stato finora considerato da un punto di vista sbagliato e così avvolto nel mistero e circondato da oscurità, si deve dare la colpa maggiormente a una terminologia inopportuna. Se +1, -1, $\sqrt{-1}$invece di essere chiamate unità positiva, negativa e immaginaria (o peggio impossibile) si fossero denominate diciamo unità diretta, inversa e laterale, difficilmente ci sarebbe stata possibilità di tale oscurità.

Vediamo in dettaglio questa rappresentazione. Ad ogni numero complesso $z=a+ib$ si associa il punto P del piano cartesiano Oxy, di coordinate (a,b), viceversa ad punto del piano di coordinate (a,b) si associa il numero complesso $z=a+ib$. Si viene in tal modo a stabilire **una biiezione tra l'insieme C dei numeri complessi e i punti del piano cartesiano**. In questa corrispondenza i *numeri reali* , cioè quelli della forma $a+i0$ sono in corrispondenza con i punti dell'asse Ox, che viene detto *asse reale*, mentre i numeri della forma $0+ib$, denominati *immaginari puri*, sono in corrispondenza con i punti dell'asse Oy, che viene quindi detto *asse immaginario.*



Questa rappresentazione geometrica ne suggerisce subito un'altra di grande efficacia nelle applicazioni. Una volta che si sono identificati i numeri complessi con i punti di un piano cartesiano essi si possono anche mettere in corrispondenza con i vettori che escono dall'origine e hanno secondo estremo nel punto individuato dal numero considerato.

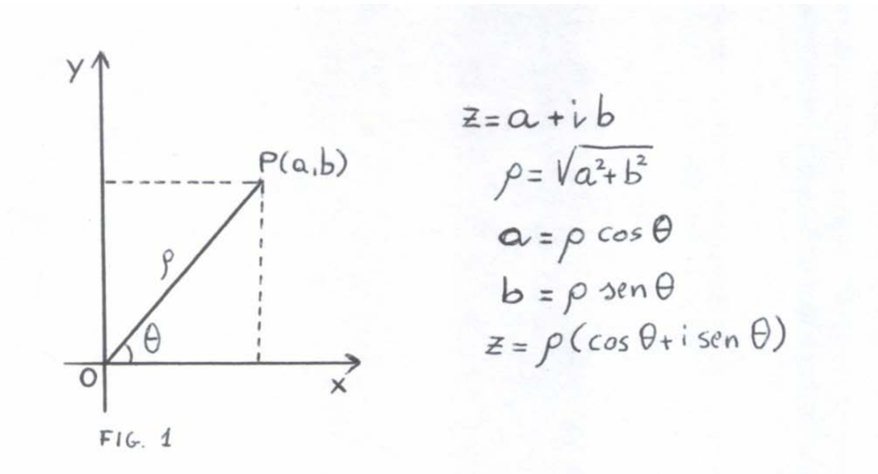
Somma di numeri complessi



Con riferimento alla figura sopra tracciata e con semplici considerazioni di geometria elementare è facile verificare *che il punto che rappresenta la somma di due numeri complessi ha per coordinate la somma delle coordinate dei punti che rappresentano ciascuno degli addendi.*

Si vede immediatamente che nella rappresentazione vettoriale *l'addizione di due numeri complessi corrisponde alla addizione vettoriale eseguita con la regola del parallelogramma.*

Un'altra utile rappresentazione dei numeri complessi è quella **trigonometrica** che si deriva facilmente dalla precedente.



Se indichiamo con ρ la distanza OP del punto P=(a,b) dall'origine, è immediato dal teorema di Pitagora che $\rho^2 = a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

si dice *modulo* del numero complesso $z=a+ib$.

L'angolo θ formato Da OP con l'asse x si dice *argomento* del numero complesso. Se $z=a+ib$ è un numero complesso e P(a,b) è il punto che lo rappresenta su un piano cartesiano dall'esame della Fig 1 segue facilmente che $a=\rho\cos\theta$e $b=\rho sen\theta$, quindiz= $\rho(\cos\theta+ i\ sen\theta)$

Questa rappresentazione presenta numerosi vantaggi, per esempio permette di dimostrare che:

Il prodotto di due numeri complessi ha come modulo il prodotto dei moduli e come argomento la somma degli argomenti.

Infatti consideriamo

$z_1=\rho_1(\cos\theta_1+isen\theta_1)$ e $z_2=\rho_2(\cos\theta_2+isen\theta_2)$

allora $z_1z_2=\rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2-sen\theta_1sen\theta_2)+i(\cos\theta_1\ sen\theta_2+sen\theta_1\cos\theta_2)=$

$=\rho_1\rho_2\ [\cos(\theta_1+\theta_2)+isen(\theta_1+\theta_2)]$.

Se $z= z_1= z_2$si ha $z^2=\rho^2(\cos 2\theta+isen 2\theta)$ e moltiplicando ancora per z

$z^3=\rho^3(\cos 3\theta+isen 3\theta)$ e più in generale qualunque sia l'intero positivo n si ha

$z^n=\rho^n(\cos n\theta+isen\ n\theta)$

che, come abbiamo già detto, è nota come *formula di De Moivre*. Questa relazione permette di calcolare facilmente le **radici n-esime di un numero complesso.**

La*radice n-esima* di un numerocomplesso $z= \rho(\cos\theta+i\ sen\theta)$, è un numero complesso $w= r(\cos\varphi+i\ sen\ \varphi)$ tale che $w^n=z$. Dovrà quindi essere

$r^n(\cos n\varphi+isen\ n\varphi)= \rho(\cos\theta+isen\theta)$

da cui segue

$r^n=\rho$ e $n\varphi=\theta+2k\pi \quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3\ldots\ldots$

Cioè

$\rho = \sqrt[n]{r}$ e $\varphi = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}, k = 0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots.$

Sembrerebbe che ogni numero complesso ammetta infinite radici n-esime, in realtà è facile verificare che le radici distinte sono solo n e si ottengono per i valori $k=0,1,2,\ldots,n-1$.

Da quanto detto finora emerge che le radici n-esime di un numero complesso si dispongono nel piano complesso nei vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nel cerchio di centro l'origine e raggio uguale alla radice n-esima aritmetica del modulo.

LETTURA

L'INTRODUZIONE DEI NUMERI COMPLESSI NELL'*ALGEBRA* EULERO

Il grande matematico svizzero Leonardo Eulero (Basilea 1707- San Pietroburgo 1783) compose anche un manuale divulgativo di algebra che apparve in edizioni tedesca e russa a San Pietroburgo nel 1770-72 e in edizione francese (sotto gli auspici di d'Alembert) nel 1774. Gli eccezionali pregi didattici dell'*Algebra* vengono spiegati con il fatto che esso fu dettato dall'autore, ormai cieco, a un domestico poco istruito. Un capitolo del trattato che qui proponiamo, in traduzione italiana, è dedicato alla introduzione dei numeri complessi che egli chiama "quantità impossibili o immaginarie".

Leonardo Eulero, *Elementi di algebra*

PARTE I, SEZIONE I , CAPITOLO XIII

Sulle *Quantità immaginarie o impossibili* che vengono dalla stessa fonte.[10]

139. Abbiamo già visto che i quadrati di numeri, sia negativi che positivi, sono sempre positivi, …, quindi, nel capitolo precedente, abbiamo supposto che tutti i numeri dei quali si chiedeva di estrarre le radici quadrate fossero positivi.

140. Quindi quando si chiede di estrarre la radice di un numero negativo sorge una grande difficoltà, poiché non c'è alcun numero il cui quadrato sia una quantità negativa. Supponiamo per esempio che desiderassimo estrarre la radice di -4; noi qui chiediamo un numero che moltiplicato per sé stesso dia -4: ora questo numero non è né $+2$ né -2, perché il quadrato di entrambi è $+4$ e non -4.

[10] Nei paragrafi precedenti vengono introdotti gli irrazionali come radici di numeri che non hanno un quadrato razionale.

141. Quindi noi dobbiamo concludere che la radice quadrata di un numero negativo non può essere un numero positivo o un numero negativo …, di conseguenza la radice in questione deve appartenere a una specie di numeri del tutto diversa. …

142. Ora, come prima osservato, i numeri positivi sono tutti più grandi di nulla, o 0, e quelli negativi sono tutti minori di nulla, o 0; …. Quindi le radici quadrate di numeri negativi non sono né maggiori né minori di nulla, inoltre non possiamo dire che siano 0, poiché 0 moltiplicato 0 produce 0, e di conseguenza non da un numero negativo.

143. E poiché tutti i numeri che è possibile concepire sono o maggiori o minori di 0 o sono 0 stesso, è evidente che non possiamo annoverare la radice quadrata di un numero negativo tra i numeri possibili, e dobbiamo dire quindi che essa è una quantità impossibile. In questo modo siamo condotti all’idea di numeri che per la loro propria natura sono impossibili; e quindi essi sono di solito chiamati *quantità immaginarie*, perché essi esistono solamente nell’immaginazione.

144. Tutte le espressioni come $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, etc. sono quindi numeri impossibili o immaginari, poiché essi rappresentano radici di quantità negative …

145. Ma tuttavia questi numeri si presentano alla mente; essi esistono nella nostra immaginazione e noi abbiamo un’idea sufficiente di loro; poiché sappiamo che per $\sqrt{-4}$ s’intende un numero che moltiplicato per sé stesso produce -4; per questo motivo niente ci impedisce di far uso di questi numeri immaginari e di impiegarli nei calcoli.

146. La prima idea che si presenta su questo argomento è che il quadrato di $\sqrt{-3}$, cioè il prodotto di $\sqrt{-3}$ per $\sqrt{-3}$, deve essere -3; che il prodotto di $\sqrt{-1}$ per $\sqrt{-1}$ è

-1; e in generale che moltiplicando $\sqrt{-a}$ per $\sqrt{-a}$, ovvero prendendo il quadrato di $\sqrt{-a}$, otteniamo $-a$.

147. Ora, poiché $-a$ è uguale a $+a$ moltiplicato per -1, e la radice quadrata di un prodotto si trova moltiplicando insieme le radici dei fattori, segue che la radice di a volte -1, o $\sqrt{-a}$, è uguale a $\sqrt{a}$ moltiplicata per $\sqrt{-1}$; ma $\sqrt{a}$ è un numero possibile o reale, quindi l’intera impossibilità di una quantità immaginaria può essere sempre ridotta a $\sqrt{-1}$. Per questa ragione $\sqrt{-4}$ è uguale a $\sqrt{4}$ moltiplicata per $\sqrt{-1}$, o uguale a $2\sqrt{-1}$, perché $\sqrt{4}$ è uguale a 2, … .

148. Inoltre poiché $\sqrt{a}$ moltiplicato per $\sqrt{b}$ fa $\sqrt{ab}$, noi avremo $\sqrt{6}$ per il valore di $\sqrt{-2}$ moltiplicato per $\sqrt{-3}$,[11] …. Così vediamo che due numeri immaginari moltiplicati insieme producono un numero reale o possibile.[12]

Ma al contrario un numero possibile moltiplicato per un numero impossibile da sempre un prodotto immaginario: così $\sqrt{-3}$ per $\sqrt{+5}$ da $\sqrt{-15}$ … …. ….

151. Ci rimane da rimuovere ogni dubbio che possa essere venuto riguardo all'utilità dei numeri di cui abbiamo parlato; poiché quei numeri essendo impossibili non sarebbe sorprendente se essi fossero ritenuti completamente inutili e oggetto solo di una oziosa speculazione. Questo comunque sarebbe un errore, poiché il calcolo di quantità immaginarie è della più grande importanza, in quanto spesso si presentano questioni delle quali noi non possiamo immediatamente dire se esse includano qualcosa di reale oppure no; ma quando la soluzione di tali questioni porta a numeri immaginari noi siamo certi che quello che è richiesto è impossibile.

Allo scopo di illustrare quello che abbiamo detto con un esempio, supponiamo che ci sia proposto di dividere il numero 12 in due parti tali che il loro prodotto sia 40. Se risolviamo questo problema con le regole usuali troviamo per le parti cercate $6+\sqrt{-4}$ e $6-\sqrt{-4}$, ma essendo questi numeri immaginari concludiamo che è impossibile risolvere la questione.

La differenza si percepisce facilmente se supponiamo che il problema sia dividere 12 in due parti tali che moltiplicate insieme facciano 35, poiché è evidente che quelle parti devono essere 7 e 5.[13]

---

11 Qui Eulero incorre in un errore infatti $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=2\sqrt{-1}\times 3\sqrt{-1}=(2\times 3)(\sqrt{-1})^2=-6$. L'errore nasce dall'aver esteso ai numeri immaginari la regola $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ valida solo per a, b positivi o nulli.

12 Questa affermazione è comunque esatta.

13 A questo proposito osserviamo che Girolamo Cardano nell'*Ars Magna* nel capitolo 37, nella risoluzione del problema che chiede di "*dividere 10 in due parti tali che il loro prodotto faccia 40*", Cardano, dopo aver posto che le due parti siano *5+x* e *5-x*, con semplici calcoli perviene all'equazione $25-x^2=40$ che riduce alla $x^2=-15$. A questo punto, dopo aver osservato che il problema è impossibile, prosegue proponendo di considerare le due quantità $5+\sqrt{-15}$ e $5-\sqrt{-15}$ e di sommarle secondo le regole aritmetiche usuali ottenendo così $(5+\sqrt{-15})+(5-\sqrt{-15})=$*40*. Le due quantità soddisfano alle condizioni del problema e quindi possono esserne considerate soluzioni. Egli osserva però che la natura di queste quantità è *sofistica* non essendo la stessa di 10 e 40 e che con tali quantità non si possono

fare tutte le operazioni che si possono fare con i numeri alludendo forse alla circostanza che i radicali di numeri negativi non si possono moltiplicare come quelli dei numeri positivi.