La soluzione per radicali delle equazioni di terzo e quarto grado e la nascita dei numeri complessi: Del Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari, Bombelli

Veronica Gavagna

Indice

1 Girolamo Cardano e le equazioni di III grado

E' ben noto che la formula risolutiva delle equazioni di terzo grado venne pubblicata nel 1545 nell'*Ars magna*[1], ma è forse meno noto che Cardano avesse iniziato a occuparsi della questione già alcuni anni prima, precisamente dai tempi in cui si accingeva a redigere la sua prima opera matematica a stampa, la *Practica arithmetice et mensurandi singularis.*

Iniziata nel 1537 e pubblicata nel 1539, la *Practica* è un trattato di aritmetica e geometria pratica, arricchito da una sezione dedicata all'algebra, fatto questo non raro ma nemmeno usuale, che colloca l'opera nella fascia medio-alta della cosiddetta trattatistica dell'abaco. La *Practica* è caratterizzata da un continuo confronto con la *Summa de arithmetica, geometria proportioni et proportionalita* (1494) di Luca Pacioli, e la cosa non deve stupire perché chiunque, nei primi decenni del XVI secolo, si fosse cimentato con questo genere letterario non poteva ignorare la *Summa*, ormai un ineludibile punto di riferimento del mondo abachistico. Per riuscire a competere con una enciclopedia talmente ponderosa di aritmetica e geometria pratica inframmezzata da lunghe digressioni teoriche, Cardano decise di scrivere un manuale con caratteristiche pressochè antitetiche, redigendo quindi un testo agile e fruibile, articolato in due parti principali: la prima era costituita da sintetiche regole di calcolo corredate da pochi esempi esplicativi; la seconda raccoglieva ulteriori esercizi ed applicazioni in una miscellanea finale di problemi aritmetici e geometrici. Per enfatizzare la distanza dalla *Summa*, Cardano dedicò le pagine iniziali della *Practica* all'enumerazione delle novità presenti nella sua opera, disseminata peraltro di critiche pungenti nei confronti di Pacioli e dei più noti autori d'abaco dell'epoca, come Giovanni Sfortunati e Pietro Borghi. Tali critiche, generalmente ben fondate, culminavano nell'ultimo capitolo della *Practica*, una puntigliosa elencazione e analisi degli errori presenti nella *Summa.* Mentre questi espedienti servivano evidentemente a ritagliarsi un proprio spazio nel mercato librario nazionale, la scelta di scrivere il trattato in latino anziché in volgare, prassi comune per questo genere letterario, fece della *Practica* uno dei principali veicoli di diffusione della matematica abachistica italiana in tutta l'Europa[2].

1.1 La polemica con Tartaglia

Mentre stava redigendo la *Practica*, Cardano venne a sapere che il matematico bresciano Niccolò Tartaglia (1499-1557) aveva trovato la formula risolutiva delle equazioni di terzo grado e l'aveva usata per vincere una pubblica sfida con Antonio Maria Fior. Una tale scoperta era molto importante non solo per l'intrinseco rilievo matematico, ma anche perché avrebbe potuto segnare un ulteriore punto a svantaggio di Pacioli, che si era mostrato scettico sulla possibilità di trovare una formula risolutiva generale per le equazioni cubiche, dato che non si era andati oltre la risoluzione di qualche caso particolare[3]. Riuscire ad avere quella formula diventò un obiettivo

[1]Dopo l'*editio princeps* stampata a Norimberga nel 1545, Girolamo Cardano (1501-1576) pubblicò una nuova edizione dell'*Ars magna* nel 1570, sulla quale si basò poi Charles Spon per la versione pubblicata nel quarto volume dell'*Opera omnia* del 1663.

[2]Sulla *Practica arithmetice* e la tradizione abachistica si veda V. Gavagna, *Medieval Heritage and New Perspectives in Cardano's* Practica arithmetice, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, 30/1 (2010), p. 61-80.

[3]Scriveva infatti nella *Summa*: "Ma de numero, cosa e cubo tra loro stando composti ... non se possuto finora troppo bene trovar regole generali ... se non ale volte a tastoni in qualche caso

importantissimo per Cardano. In un primo tempo, incaricò il suo libraio di fiducia a Venezia di prendere contatti con Tartaglia

> et per tanto sua eccellentia vi prega che voi gli vogliati mandare di gratia tal regola da voi trovata [cosa e cubo uguale a numero], & se 'l vi pare lui la dara fora in la presente sua opera sotto vostro nome, & se anchor el non vi pare, che lui la dia fora, la tenera secreta ... (lettera del 2 gennaio 1539)[4]

Tartaglia, comprensibilmente, non cedette alla richiesta

> Diceti a sua eccellentia, che quella mi perdona, che quando vorò publicar tal mia inventione la voro publicar in opere mie, & non in opere de altri, si che sua eccellentia mi habbia per iscuso.

Il 12 febbraio 1539 Cardano scrisse direttamente a Tartaglia: la lettera ha un tono sprezzante, ma Cardano è abile a lasciar credere di poter intercedere per il matematico bresciano presso il Governatore di Milano

> e trarvi fora di fantasia che voi vi crediate essere si grande vi faro conoscere con amorevole admonitioni per le vostre parole medesime che seti più appresso a la valle che alla sumita del monte . . . vi domando di gratia con che credeti di parlare con li vostri scolari, over con huomini . . . oltra a ciò vi laudai molto al Signor Marchese, pensando fosti più gentil riconoscitore et piu humano, et piu cortese (lettera del 12 febbraio 1539)

Qualche giorno dopo, ritornò con più forza sull'argomento, facendosi portavoce del supposto desiderio del Marchese d'Avalos di incontrarlo

> . . . et mi comandò di subito vi scrivesse la presente con grande instantia in nome suo, avvisandovi che vista la presente dovesti venire à Milano senza fallo, che vorria parlar con voi. Et così ve essorto à dover venir subito, et non pensarvi su, perche il detto S. Marchese è si gentil remuneratore delli virtuosi, si liberale, et si magnanimo che niuna persona che serve sua eccellentia . . . resta discontento (lettera del 19 febbraio 1532)

Dopo molte insistenze e qualche abile stratagemma riuscì alla fine a estorcere la formula a Tartaglia, seppure in forma "criptata" e vincolato dalla promessa di non farne parola nella sua *Practica* di imminente pubblicazione. Tartaglia scelse di affidare la formula a una filastrocca[5] che riportiamo avendo cura di trascrivere il significato in termini moderni fra parentesi quadre.

---

particulare . . . larte ancora a tal caso non a dato modo si commo ancora non e dato modo al quadrare del cerchio" (c. 150r).

[4] Le lettere che ricostruiscono la vicenda editoriale vennero poi pubblicate da Tartaglia nel *Quesiti et inventioni diverse* nel 1546.

[5] L'espediente della filastrocca è meno bizzarro di quanto possa apparire a prima vista. Tartaglia era un maestro d'abaco ed era prassi diffusa richiedere agli studenti la memorizzazione delle procedure più importanti attraverso acronimi o versi in rima.

E' infatti appena il caso di osservare che il simbolismo moderno è del tutto estraneo al linguaggio algebrico dell'epoca, che è essenzialmente retorico e per questo poco familiare al lettore di oggi. Per non appesantire troppo la discussione, nel seguito continueremo ad adottare il simbolismo attuale, ma per non tradire troppo lo spirito rinascimentale, eviteremo di riferirci, parlando di equazioni cubiche, alla forma generale $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, preferendo mantenere la tradizionale classificazione nei tre casi canonici o *capitula*, conseguenza del fatto che i coefficienti p e q dovevano essere numeri positivi:

1. $x^3 + qx = p$, "cubus et res aequalia numeris"
2. $x^3 + p = qx$, "cubus et numerus aequalia rebus"
3. $x^3 = p + qx$, "cubus aequalis numeris et rebus"

Leggiamo dunque le parole di Tartaglia:

Quando chel cubo con le cose appresso
Se agguaglia a qualche numero discreto $[x^3 + px = q]$
Trovan due altri differenti in esso $[u - v = q]$
Ch'el lor produtto sempre sia eguale
Al terzo cubo delle cose netto $[uv = (p/3)^3]$
El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sottratti
Varra la tua cosa principale $[x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}]$

Nel primo caso $x^3 + px = q$, dunque, si tratta di risolvere un sistema di due equazioni nelle due incognite u e v

$$\begin{cases} u - v = q \\ uv = \frac{p^3}{27} \end{cases}$$

che si trasforma nella risolvente quadratica

$$t^2 - qt - \frac{p^3}{27} = 0$$

e ammette le soluzioni

$$u = \tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}$$
$$v = \tfrac{q}{2} - \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}$$

Dovendo poi essere

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$$

ne segue che

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}}$$

Tartaglia passa poi a esaminare il secondo caso

In el secondo de cotesti atti
Quando che'l cubo restasse lui solo [$x^3 = px + q$]
Tu osservarai quest'altri contratti
Del numero farai due tal part'à volo [$u + v = q$]
Che l'una in l'altra si produca schietto
El terzo cubo delle cose in stolo [$uv = (p/3)^3$]
Delle qual poi, per comun precetto
Terrai li lati cubi insieme gionti
Et cotal somma sara il tuo concetto [$x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$]

Eseguendo i calcoli, l'incognita assume la forma

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

E infine, Tartaglia conclude osservando che l'ultimo caso $x^3 + q = px$ dipende dal caso precedente $x^3 = px + q$ perché ammette le stesse radici, ma con segni diversi[6].

El terzo poi de questi nostri conti
Se solve col secondo se ben guardi
Che per natura son quasi congionti
Questi trovai, et non con passi tardi
Nel mille cinquecentè quatro e trenta
Con fondamenti ben sald'è gagliardi
Nella citta dal mare intorno centa

Dopo aver correttamente interpretato la filastrocca e saggiato la bontà dell'algoritmo, Cardano si rende conto che nel secondo caso $x^3 = px + q$ ("cubus aequalis numeris et rebus") e nel terzo correlato, la formula risolutiva non funziona quando il cubo della terza parte del coefficiente dell'incognita è maggiore del quadrato della metà del termine noto ($\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$). In tal caso, infatti, si dovrebbe estrarre la radice quadrata di un numero negativo, e poiché l'operazione non è possibile, l'incognita non è "riducibile" a una differenza di radici cubiche: da qui l'espressione "caso irriducibile" frequentemente usata.

Cardano scrive immediatamente a Tartaglia per avere chiarimenti

> io ve ho mandato a domandare la resolutione de diversi quesiti alli quali non mi haveti risposto, et tra li altri quello di cubo equale a cose e numero ... quando che il cubo della terza parte delle cose eccede il quadrato della metà del numero, allora non posso farli seguir la equatione come appare (lettera del 4 agosto 1539)

[6]Tartaglia era infatti perfettamente consapevole che la somma delle radici (cambiata di segno) e il loro prodotto sono rispettivamente uguali al coefficiente del termine lineare e al termine noto.

ma quest'ultimo non comprende (o forse finge di non comprendere) il legittimo dubbio e risponde accusando il primo di non aver ben capito la formula risolutiva

> E pertanto ve rispondo, et dico che voi non haveti appresa la buona via per risolvere tal capitolo; anzi dico che tal vostro procedere è in tutto falso. Ma avertite ... se voi mancareti di fede a me, ... certamente io non vi mancarò a voi (per non esser mio costume). Anzi, vi prometto di attendervi più di quello che vi ho promesso (lettera del 7 agosto)

Cardano ha in realtà perfettamente compreso di trovarsi di fronte al punto debole dell'algoritmo ed è del tutto consapevole di non poterlo ignorare tanto facilmente, dato che i numerosi esempi che riesce a costruire suggeriscono inequivocabilmente l'esistenza di tre radici (reali e distinte) per l'equazione cubica. Per di più, non si tratta nemmeno di un caso da poter tenere ai margini di una trattazione esauriente delle equazioni di terzo grado perché, come mostrerà nell'*Ars Magna*, molti tipi di equazione cubica completa o priva del termine lineare si trasformano proprio in un'equazione di questo tipo.

1.2 L'*Ars magna*

A partire dalla primavera del 1539, dunque, Cardano era in grado di risolvere una qualsiasi equazione di terzo grado, a patto che non fosse irriducibile. Nella successiva disfida a suon di "cartelli" che vide scontrarsi Tartaglia con l'allievo prediletto di Cardano, Ludovico Ferrari, quest'ultimo raccontava che durante un viaggio a Bologna nel 1542 compiuto col suo maestro, ebbe l'opportunità di leggere un libretto di Scipione del Ferro, risalente almeno al 1515, in cui compariva la formula risolutiva indipendentemente ritrovata da Tartaglia. Questo autorizzò Cardano a sentirsi sciolto dall'impegno di riserbo che si era preso, e a decidere di pubblicare un'opera interamente dedicata all'algebra e ai suoi più recenti sviluppi, da inserire nell'ambizioso progetto dell'enciclopedia aritmetica chiamata *Opus perfectum.*[7] Quest'opera, che fu l'unico volume dell'*Opus perfectum* a essere realmente stampato, è l'*Ars magna.*

1.2.1 La soluzione delle equazioni di III grado

I capitoli XI, XII e XIII dell'*Ars magna* sono dedicati alla risoluzione delle tre equazioni di terzo grado.

Per avere un'idea dell'approccio cardaniano, proponiamo di seguito una libera traduzione di qualche stralcio del capitolo XI, *De cubo et rebus aequalibus numero*, dedicato quindi all'equazione $x^3 + px = q$.

> Il bolognese Scipione del Ferro ha risolto questo caso già da trent'anni e ha trasmesso la soluzione al veneto Antonio Maria Fior, che una volta sfidò il bresciano Niccolò Tartaglia, dandogli l'opportunità di scoprire a

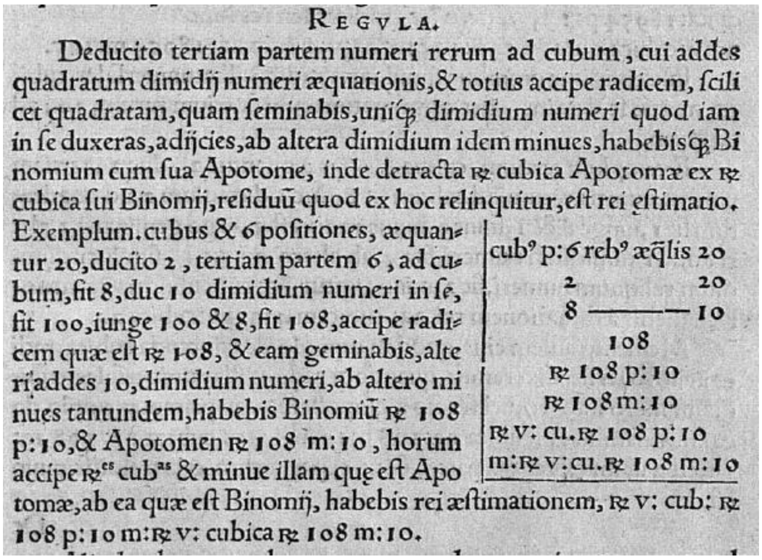
[7]Sulla questione si rimanda a M. Tamborini, *Per una storia dell'* Opus Arithmeticae Perfectum, in M.L.Baldi, G.Canziani (a cura di) *Cardano e la tradizione dei saperi*, cit., pp.157-189; V.Gavagna, *L'* Ars magna arithmeticae *nel* corpus *matematico di Cardano*, in M. Massa Estève, S. Rommevaux, M. Spiesser (cur.), *Pluralité ou unité de l'algèbre à la Renaissance*, Paris, Éditions Honoré Champion (in stampa).

sua volta la formula risolutiva. Tartaglia l'ha poi rivelata a me dopo che l'avevo più volte pregato, senza però darmi la dimostrazione. Con l'aiuto della formula sono riuscito a trovare questa difficile dimostrazione e a proporla di seguito [...][8]

Regola

Cuba la terza parte delle cose ed aggiungi il quadrato della metà del numero, considera la radice quadrata di questa somma e aggiungila alla metà del numero che prima avevi elevato al quadrato; sottrai invece la stessa metà del numero da un'uguale radice quadrata. Avrai così trovato un binomio con la sua apotome e dunque, sottratta la radice cubica dell'apotome dalla radice cubica del binomio, quello che rimane è l'incognita richiesta ("rei aestimatio").

Per esempio, consideriamo un cubo e sei posizioni uguali a 20. Eleva al cubo 2, la terza parte di 6, e ottieni 8; eleva al quadrato 10, che è la metà del numero, e ottieni 100; somma 8 a 100 e avrai 108; prendi la radice di 108 e considerala due volte: una volta la sommi alla metà del numero e una volta sottrai da essa la metà numero. Avrai dunque il binomio R. 108 p. 10, del quale prenderai la radice cubica, e sottrarrai la corrispondente apotome ottenendo così l'incognita R.V.cub. R. 108 p: 10 m: R.V.cub. R. 108 m: 10.


REGVLA.

Deducito tertiam partem numeri rerum ad cubum, cui addes quadratum dimidij numeri æquationis, & totius accipe radicem, scilicet quadratam, quam seminabis, uniq; dimidium numeri quod iam in se duxeras, adijcies, ab altera dimidium idem minues, habebisq; Binomium cum sua Apotome, inde detracta ℞ cubica Apotomæ ex ℞ cubica sui Binomij, residuũ quod ex hoc relinquitur, est rei estimatio.

Exemplum. cubus & 6 positiones, æquantur 20, ducito 2, tertiam partem 6, ad cubum, fit 8, duc 10 dimidium numeri in se, fit 100, iunge 100 & 8, fit 108, accipe radicem quæ est ℞ 108, & eam geminabis, alteri addes 10, dimidium numeri, ab altero minues tantundem, habebis Binomiũ ℞ 108 p: 10, & Apotomen ℞ 108 m: 10, horum accipe ℞es cubas & minue illam quę est Apotomæ, ab ea quæ est Binomij, habebis rei æstimationem, ℞ v: cub: ℞ 108 p: 10 m: ℞ v: cubica ℞ 108 m: 10.

cub9 p: 6 reb9 æq̄lis 20
2 20
8 —— 10
108
℞ 108 p: 10
℞ 108 m: 10
℞ v: cu. ℞ 108 p: 10
m: ℞ v: cu. ℞ 108 m: 10

1.2.2 La soluzione di Ludovico Ferrari delle equazioni di IV grado

Nel capitolo XXXIX dell'*Ars magna*, dal titolo *De regula qua pluribus positionibus invenimus ignotam quantitatem*, Cardano introduce la formula risolutiva dell'equazione di IV grado attribuendone la paternità a Ludovico Ferrari con le seguenti parole (molto liberamente tradotte dal latino):

Esiste un'altra regola, più elegante della precedente, ed è di Ludovico Ferrari che me l'ha concessa su mia richiesta. Questa regola consente di trovare le soluzioni di tutte le equazioni di quarto grado prive del

[8]La dimostrazione a cui allude Cardano è di tipo geometrico ed è basata sulla scomposizione di un cubo in parallelepipedi e altri cubi.

termine cubico o del termine lineare [segue elenco dei 20 casi possibili e la dimostrazione geometrica della regola *NdR*]

Per risolvere l'equazione devi sempre trasformare il membro dell'equazione che contiene la quarta potenza alla radice quadrata – cioè aggiungendo una quantità tale ad entrambi i membri in modo tale che i termini di quarto e di secondo grado e il termine noto ammettano una radice [cioè siano il quadrato di un binomio, *NdR*]: questo è facile a farsi, non appena si prenda come termine noto il quadrato della metà del coefficiente del termine di secondo grado. Fai questo in modo tale che si ammettano solo radici positive, altrimenti perderai una radice del trinomio o del binomio trasformato in un trinomio.

Dopo aver fatto tutto questo, aggiungi ad entrambi i membri un termine quadratico e un coefficiente in modo da rendere un quadrato perfetto anche il trinomio che contiene il termine lineare. Dovrai dunque aggiungere dei quadrati e dei numeri ad entrambi i memebri, dopo di che estrai la radice quadrata di entrambi i membri. In uno dei membri ti troverai il quadrato dell'incognita più o meno un numero, nell'altro membro ti troverai l'incognita (eventualmente con un coefficiente diverso da 1) più o meno un numero. Puoi ora trovare facilmente la soluzione.

4 Hoc peracto, ſemper reduces partem q̄d'q̄drati ad ℞, id eſt addendo tantum utriq; parti, ut 1 q̄d'q̄dratum cū quadrato & numero, habeant radicem, hoc facile eſt, cum poſueris dimidium numeri quadratorum, radicem numeri, item facies, ut denominationes extremæ ſint plus, in ambabus æquationibus, nam ſecus, trinomium ſeu Binomium redactum ad trinomium, neceſſario careret radice.

5 Quibus iam peractis, addes tantum de quadratis, & numero uni parti, per tertiam regulam, ut idem additum alteri parti, in qua erunt res faciat trinomium habens ℞ quadratam per poſitionem, & habebis numerum quadratorum, & numeri addendi utriq; parti, quo habito, ab utroq; extrahes ℞ quadratam, quæ erit in una, 1 quadratum p: numero, uel m: numero, ex alia, 1 poſitio uel plures p: numero, uel m: numero, uel numerus m: poſitionibus, quare per quintum capitulum huius, habens propoſitum.

Vediamo come Cardano risolve l'equazione

$$60x = x^4 + 6x^2 + 36$$

Per rendere il secondo membro (che contiene x^4) un quadrato perfetto basta aggiungere $6x^2$ (6 è infatti la metà di $\sqrt{36}$) e si ottiene

$$60x + 6x^2 = x^4 + 12x^2 + 36$$

essendo $x^4 + 12x^2 + 36 = (x^2 + 6)^2$

A questo punto si pone il problema di rendere anche il primo membro il quadrato perfetto di un binomio avendo però cura di trasformare il secondo membro nel quadrato di un trinomio. Per capire meglio il ragionamento seguito da Cardano e Ferrari è forse più opportuno aiutarsi con il caso generale. Consideriamo dunque l'equazione

$$x^4 + ax^2 + b = cx$$

Per rendere il primo membro un quadrato dobbiamo aggiungere $(2\sqrt{b}-a)x^2$ in modo che

$$x^4+\sqrt{b}\,x^2+b=cx+(2\sqrt{b}-a)x^2$$

Aggiustiamo un po' i coefficienti, per rendere più leggibile l'algoritmo e poniamo $\sqrt{b}=2q$, $b=q^2$, $2\sqrt{b}-a=p$ sicché

$$x^4+2qx^2+q^2=cx+px^2$$

Per trasformare il primo membro nel quadrato di un trinomio si può aggiungere $2yx^2+y^2+2yq$ (dove y è un coefficiente da determinare) essendo

$$x^4+2qx^2+q^2+2yx^2+y^2+2yq=(x^2+q+y)^2$$

Il secondo membro si trasforma invece in $cx+px^2+2yx^2+y^2+2yq=x^2(p+2y)+cx+y^2+2yq$

Per assicurarci che si tratti del quadrato di un binomio dobbiamo imporre la condizione che il discriminante dell'equazione associata sia nullo, ovvero

$$\frac{c^2}{4}=(y^2+2yq)(p+2y)$$

Si perviene dunque a un'equazione di terzo grado nella nuova incognita y: si tratta della cosiddetta *risolvente cubica*

$$y^3+y^2(4q+p)+2qpy=\frac{c^2}{4}$$

Nell'esempio precedente, la risolvente cubica è

$$y^3+15y^2+36y=450$$

Trovato il valore di y, basta sostituirlo nei due membri, ottenendo il quadrato di un binomio in x^2 da una parte e il quadrato di un binomio in x dall'altra. A questo punto, estratte le radici quadrate, siamo di fronte ad un'equazione di secondo grado, facilmente risolubile.

1.3 Il caso irriducibile e le *radices sophisticae*

Per riuscire a costruire una formula davvero generale, in grado di risolvere qualsiasi equazione di terzo e di quarto grado[9], bisognava però affrontare e risolvere il caso anomalo. Le due possibili direzioni lungo le quali indirizzare i tentativi di dare una soluzione al problema – stabilire delle regole per manipolare le radici quadrate di numeri negativi (*radices sophisticae*) oppure trovare una formula risolutiva in cui non esse comparissero – non erano a priori mutuamente esclusive, ma finirono per rivelarsi tali nel pensiero di Cardano.

[9]Il dover trovare le radici della risolvente cubica, naturalmente, portava spesso a fare i conti con il caso irriducibile anche nella risoluzione delle equazioni di quarto grado.

Vista la difficoltà con la quale si era giunti alla formula di Tartaglia, è ragionevole supporre che Cardano, almeno in un primo momento, abbia concentrato i propri sforzi nella prima delle due direzioni e in effetti nell'*Ars magna* rimane qualche traccia di un tentativo di manipolazione algebrica di espressioni di tipo $a \pm \sqrt{-b}$, ma non nel contesto della discussione del caso irriducibile, bensì nell'analisi delle soluzioni *false* dell'equazione di secondo grado. Nel capitolo XXXVII *De regula falsum ponendi* si esaminano tre regole per risolvere problemi che presentano soluzioni *false*, termine che sta rispettivamente a indicare soluzioni negative ("minus puro"), soluzioni in cui compaiono radici quadrate di numeri negativi ("minus sophistico") e soluzioni ibride ("componitur haec regula quasi ex ambobus").

La prima regola spiega come determinare le soluzioni negative di un'equazione di secondo grado del tipo $x^2 = ax + b$ ("censi uguali a cose e numeri" $a, b > 0$)

Il secondo genere di soluzione *falsa* riguarda proprio la radice quadrata di termini negativi, ovvero il *minus sophistico*. L'autore esordisce con un esempio che potrebbe suonare come uno dei problemi più comuni dell'aritmetica abachistica: "Dividi 10 in due parti, tali che il loro prodotto sia 40". Il problema si traduce nella risoluzione dell'equazione $x^2 + 40 = 10x$, ma – prosegue Cardano – "sebbene sia chiaro che il caso è impossibile, tuttavia faremo così" ("manifestum est quod casus seu quaestio est impossibilis, sic tamen operabimur"). Se si applica formalmente l'algoritmo risolutivo, si ottengono le due espressioni (*partes*) $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$, che sono veramente le soluzioni del problema, precisa l'autore, dato che la loro somma vale 10 e il loro prodotto, effettuato con le regole valide per moltiplicare i recisi[10] vale esattamente 40. La regola è seguita da un tentativo di rappresentazione geometrica della formula risolutiva di $x^2 + 40 = 10x$ che però è subordinata alla possibilità di sottrarre il rettangolo di lati 4 e 10 dal quadrato di lato 5, cosa che non è ammessa nel caso in esame, perché superfici negative sono prive di senso.

La terza e ultima regola del capitolo XXXVII dell'*Ars magna* riguarda un altro genere di "meno", che può intendersi, secondo Cardano, come una combinazione dei precedenti. La regola viene illustrata solo da un esempio, senza alcun commento. Si tratta di "trovare tre numeri in proporzione tali che il secondo sia pari alla differenza tra il primo e la sua radice quadrata, e il terzo sia pari alla differenza tra il secondo e la sua radice quadrata". Ponendo la prima quantità pari a x^2 e impostando la proporzione

$$x^2 : (x^2 - x) = (x^2 - x) : (x^2 - x - \sqrt{x^2 - x})$$

Cardano giunge a trovare i tre numeri $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4} - \sqrt{-\frac{1}{4}}$.

A suo avviso, il quadrato del secondo termine, cioè $\frac{1}{16}$, è pari al prodotto del primo per il terzo, perché

$$\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4} - \sqrt{-\frac{1}{4}}\right) = -\frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$$

Il risultato presuppone dunque che valga l'identità

[10] I termini *binomium* e *recisum* sono mutuati dalle traduzioni latine del libro X degli *Elementi*, dedicato alla classificazione degli irrazionali quadratici. Indicano, rispettivamente, le espressioni del tipo $a + \sqrt{b}$ e $a - \sqrt{b}$ o, più in generale $a + x$ e $a - x$, dove i termini sono di nature diverse ("quantitas quae additur vel detrahitur, non est eiusdem naturae cum prima").

$$-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{64}}=\frac{1}{8}$$

basata, a quanto sembra, su un affrettato tentativo di applicazione della regola dei segni "meno per meno uguale a più", che conduce a un risultato del tutto errato.

In effetti, l'aspetto davvero critico di queste *radices sophisticae* non è tanto di carattere fondazionale quanto piuttosto di natura operativa. Cardano non si chiede se questi nuovi oggetti siano o meno dei numeri perché, come per i matematici del suo tempo, il solo numero è quello definito all'inizio del libro VII degli *Elementi*: "Un numero è una moltitudine composta di unità". Esistono tuttavia delle quantità che si comportano *come se* fossero dei numeri, ovvero obbediscono a regole di somma, sottrazione, moltiplicazione, divisione ed estrazione di radice.[11] Nell'*incipit* della *Practica arithmetice* Cardano dichiara esplicitamente che "l'oggetto dell'aritmetica è il numero intero e *per analogia* esistono altri quattro oggetti, cioè il numero intero, come ad esempio 3, il numero frazionario, come $\frac{3}{7}$, il numero irrazionale, come $\sqrt{7}$, il numero denominato, come 3 censi".[12] Si noti però che dopo questa unica dichiarazione di carattere metodologico – il termine "analogia" infatti ricorre solo una volta nell'intera *Practica* – Cardano non ha più alcuna remora a riferirsi a queste quantità come ai "numeri surdi, fracti, denominati" e dedica i successivi capitoli dell'opera a definire le operazioni tra questi "numeri" e le proprietà che li caratterizzano.

Cardano cerca dunque di capire se le radici quadrate dei numeri negativi si comportino "per analogia" come dei numeri e il primo passo da compiere in questa direzione è stabilire se siano quantità positive o negative. Di certo per le *radices sophisticae* la usuale regola tradizionale dei segni non può valere perché, dovendo necessariamente essere, ad esempio, $(\sqrt{-15})^2 = -15$, si finirebbe per provare la paradossale esistenza di un quadrato negativo. Per salvaguardare la regola dei segni, bisogna ammettere che la "quantità sofistica" non sia una quantità negativa né positiva ma, come già Cardano aveva affermato nell'*Ars magna arithmeticae*, "un terzo genere di cosa".[13]

Nell'*Ars magna*, la questione del segno della "quantità sofistica" rimane confinata a questi due esempi del capitolo XXXVII e non viene ulteriormente sviluppata; l'autore ritornerà sull'argomento nel *De regula aliza libellus*, una breve opera pubblicata nel 1570 in un unico volume assieme all'*Opus novum de proportionibus* e alla seconda edizione dell'*Ars magna.* Il termine *aliza* significa "irrisolta" e allude al caso irriducibile dell'equazione cubica.[14] in quest'opera, infatti, Cardano raccoglie i vari

[11]Sull'argomento si veda in particolare A. Malet, *Renaissance notions of number and magnitude*, Historia Mathematica, 33 (2006) p. 63-81.

[12]"Subiectum Arithmeticae numerus est integer, *per analogiam* quatuor subiecta sunt: videlicet numerus integer ut 3, fractus ut $\frac{3}{7}$, surdus ut Radix 7, denominatus ut census tres, quae omnia explicabo" (*Practica arithmetice*, Caput primum, *De subiectis arithmetice*, corsivo nostro.)

[13]L'unica edizione a stampa dell'*Ars magna aritmeticae* è quella conservata nel volume 4 dell'*Opera omnia* pubblicata da Charles Spon a Lione nel 1633. Sul ruolo dell'opera nello sviluppo della matematica di Cardano si rimanda a V.Gavagna, *L'* Ars magna arithmeticae *nel* corpus *matematico di Cardano*, cit. L'opera è composta di 40 capitoli e di 40 problemi; il problema 38 tratta anche dell'equazione $x^2 + 16 = 6x$ e, a proposito del discriminante negativo, osserva: "Osserva che $\sqrt{9}$ è +3 o -3, perché più per più e meno per meno fanno più. Quindi $\sqrt{-9}$ non può essere +3 e nemmeno -3 ma un terzo e riposto genere di cosa", *Ars magna arithmeticae*, p. 373.

[14]Fino ad oggi, lo studio più completo del *De regula aliza* si deve a Pietro Cossali, *La storia del caso irriducibile*, trascrizione, introduzione e note a cura di R.Gatto, Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Venezia 1996. Per un *excursus* dei vari approcci al caso irriducibile, si veda anche R. Gatto, *Il caso irriducibile delle equazioni di terzo grado da Cardano a Galois*, Atti e memorie dell'Accademia Nazionale di scienze, lettere e arti di Modena, Ser.VII, vol.X 1992.

(e vani) tentativi, sviluppati nel corso di trent'anni, di risolvere il problema.

Nel *De regula aliza* sono ormai uscite di scena le *radices sophisticae*, tuttavia rimane ancora un'eco del problema del segno nel capitolo XXII *De contemplatione $\tilde{p}$ et $\tilde{m}$ et quod $\tilde{m}$ in $\tilde{m}$ facit $\tilde{m}$* ove Cardano cerca di fondare dal punto di vista geometrico una nuova regola dei segni[15].

Pur "dimostrando" che meno per meno fa meno, Cardano non riesce tuttavia a costruire un'aritmetica delle radici quadrate di numeri negativi basata su questa nuova legge di composizione. Abbandona quindi l'argomento e si dedica al tentativo (fallimentare) di risolvere il caso irriducibile per altra via, ovvero cercando di generalizzare casi che possono essere risolti con particolari artifici.

2 L'*Algebra* di Bombelli

Due anni dopo la comparsa del *De regula aliza*, Rafael Bombelli pubblicò i primi tre libri de *L'algebra* (1572). L'ingegner Bombelli è un personaggio dalla biografia ancora in parte sconosciuta, che attorno al 1550, durante l'interruzione dei lavori di bonifica in Val di Chiana, si dedicò alla stesura della prima redazione della sua opera in volgare italiano. Dopo il 1567 soggiornò a Roma e qui, insieme ad Anton Maria Pazzi, tradusse i primi cinque libri dell'*Aritmetica* di Diofanto, ma non potè finire il lavoro per il sopraggiungere di più pressanti impegni[16]. L'opera di Diofanto ebbe una profonda influenza su Bombelli, il quale, dopo aver rimaneggiato il proprio lavoro, preferì dare alle stampe solamente tre dei cinque libri dell'*Algebra*, riservandosi di pubblicare i due rimanenti dopo una completa revisione. Il progetto rimase incompiuto per l'improvvisa morte dell'autore. Solo nel 1929, lo storico della matematica Ettore Bortolotti ritrovò a Bologna due redazioni manoscritte – una completa dei cinque libri e una limitata agli ultimi due – e mise finalmente a disposizione degli studiosi l'intera opera[17].

Nella prefazione a stampa dell'*Algebra*, Bombelli dichiara che lo scopo dell'opera non è quello di rivelare nuove scoperte in campo algebrico, ma quello di ridurre "a perfetto ordine" una disciplina in pieno sviluppo che non può ancora contare su buoni testi "o per la difficultà della materia o per il confuso scrivere de' scrittori". Bombelli dunque presenta la propria opera come una risistemazione di materiale in larga parte già esistente; l'accenno all'oscurità dei testi è presumibilmente indirizzato, almeno in larga parte, all'*Ars magna* e al *De regula aliza*, opere con le quali imbastisce, come vedremo, un serrato dialogo a distanza.

Come già Cardano nella *Practica*, Bombelli si muove nell'ambito dell'aritmetica euclidea dei numeri naturali, ma quando deve operare concretamente non esita a trattare come numeri degli oggetti che formalmente non lo sono, ma che si comportano come tali[18]. E' il caso delle radici quadrate e cubiche che, sottolinea l'autore, non

[15]Per un'analisi dettagliata di questo tema, si rimanda a R.C.H. Tanner, *The Alien Realm of the Minus: Deviatory Mathematics in Cardano's Writings*, Annals of Science, 37 (1980), p. 159-178.

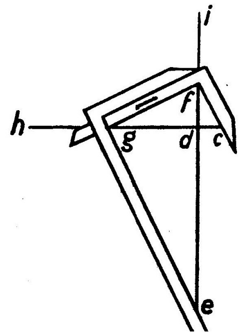
[16]Vale la pena ricordare che la prima edizione a stampa dell'*Aritmetica* di Diofanto uscì dai torchi solo nel 1575 a Basilea per opera di Xylander.

[17]L'edizione più recente è R.Bombelli, *L'algebra* con prefazioni di E. Bortolotti e di U. Forti, Milano, Feltrinelli 1966. Le redazioni dei libri IV e V ritrovate da Bombelli, tuttavia, presentano un testo ancora imperfetto, non certo pronto per la pubblicazione.

[18]Nel primo capitolo *Diffinitione del numero quadrato* Bombelli evoca indirettamente Euclide spiegando che "se bene l'unità non è numero, pur nelle operationi serve come li numeri". Sul

sono numeri in senso stretto, ma *lati*, rispettivamente quadrati e cubici, di numeri[19]. Nella prima parte dell'*Algebra* Bombelli cerca dunque di trovare le condizioni che rendono chiuse le addizioni e sottrazioni tra radici dello stesso indice e in questo non si discosta troppo dalla migliore trattatistica di aritmetica pratica, mentre è più originale quando descrive alcune costruzioni geometriche che rappresentano le radici quadrate e cubiche di segmenti dati, affiancandole a più consueti algoritmi di calcolo[20].

Per quello che riguarda l'estrazione di radice cubica, Bombelli sottolinea che il problema di trovare il *lato cubico* di un segmento noto l è riconducibile al classico problema della duplicazione del cubo "dalli antichi molto cercato al tempo di Platone" ed equivale a inserire due segmenti medi proporzionali fra l e un segmento unitario ("misura commune"). Bombelli propone due costruzioni "in linea", che corrispondono a quelle attribuite a Erone e Platone rispettivamente nelle *Collezioni matematiche* di Pappo e nel commento di Eutocio al secondo libro della *Sfera e cilindro* di Archimede[21]. Si noti che l'interpretazione di Bombelli della costruzione geometrica di Platone, prevede l'uso di quegli "squadri materiali" che, come vedremo, consentiranno anche la rappresentazione "in linea" della soluzione di una cubica. In questo caso si tratta di tracciare il segmento unitario cd perpendicolarmente al segmento dato de del quale si deve trovare il *lato cubico,* e di disporre il primo squadro in modo che uno dei lati passi per il punto c e il vertice appartenga al prolungamento di de e il secondo squadro in modo che un lato passi per e e il vertice giaccia sul prolungamento di cd. In tal modo si ottengono due triangoli rettangoli e, per il corollario alla proposizione VI.8[22] i segmenti fd e dg sono medi proporzionali tra cd e de e il segmento fd rappresenta il *lato cubico* di de



concetto di numero in Bombelli si veda anche R. Wagner, *The nature of numbers in and around Bombelli's* L'algebra, Archive for History of Exact Sciences, 64 (2010), p. 485-523.

[19] Ad esempio, così viene definita la radice quadrata: "La Radice quadrata è il lato di un numero non quadrato; il quale è impossibile poterlo nominare: però si chiama Radice sorda, overo indiscreta, come sarebbe se si havesse a pigliare il lato di 20, il che non vuol dire altro, che trovare un numero, il quale moltiplicato in se stesso faccia 20; il ch'è impossibile trovare, per essere il 20 numero non quadrato" (Bombelli, *L'algebra*, cit. p.13). Le definizioni successive di radice n-sima ($n = 3, 4, 5$) sono del tutto analoghe.

[20] Non sono molto gli autori che presentano la costruzione geometrica della radice cubica di un segmento assegnato e tra questi, Fibonacci, Pacioli e Tartaglia. Sull'argomento si veda M.T.Rivolo, A.Simi, *Il calcolo delle radici quadrate e cubiche in Italia da Fibonacci a Bombelli*, Archive for History of Exact Sciences, 52 (1998), p. 161-193.

[21] Su questo si veda ad esempio E. Giusti, *Algebra and geometry in Bombelli and Viète*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, 2 (1992), p. 303-328.

[22] "Se in un triangolo rettangolo si conduce la perpendicolare dal vertice dell'angolo retto all'ipotenusa, allora tale segmento risulta medio proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

La trattazione entra nel vivo con l'aritmetica dei binomi e dei residui, nella quale Bombelli inserisce il capitolo *Dimostratione come meno via meno faccia più* che riecheggia apertamente il titolo del capitolo XXII *De contemplatione* $\tilde{p}$ *et* $\tilde{m}$ *et quod* $\tilde{m}$ *in* $\tilde{m}$ *facit* $\tilde{m}$ del *De regula aliza* considerato in precedenza. Pur basandosi su argomentazioni non dissimili da quelle di Cardano, Bombelli raggiunge uno scopo diametralmente opposto, legittimando pienamente la regola dei segni[23].

Nell'ambito dei binomi e dei residui cubici, cioè espressioni del tipo $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$, compare finalmente un oggetto che oggi chiamiamo radice cubica di un numero complesso ma che Bombelli definisce " un'altra sorte di Radici cubiche legate, molto differenti dall'altre, la qual nasce dal capitolo di cubo eguale a tanti e numero, quando il cubato del terzo delli tanti è maggiore del quadrato della metà del numero" (*L'algebra*, p. 133).[24] Bombelli non si sofferma a specificare la natura delle *radici cubiche legate* $\sqrt[3]{a \pm \sqrt{-b}}$ $(b > 0)$ ma osserva subito che per i radicandi $a \pm \sqrt{-b}$ non possono valere le usuali regole di calcolo, perché la radice quadrata di una quantità negativa non può dirsi né negativa, né positiva, essendo, come già aveva intuito Cardano "un terzo genere di cosa". Questa considerazione costringe Bombelli a inventarsi dei nuovi segni, piuttosto che dei nuovi numeri, e a stabilire per essi delle appropriate leggi di composizione. Nel notissimo passo che segue, si evidenzia l'improcrastinabile necessità di riuscire a manipolare queste radici cubiche legate in modo da riuscire a superare lo scoglio del caso irriducibile, molto frequente nella risoluzione delle equazioni di terzo e di quarto grado

> la qual sorte di Radici quadrate ha nel suo Algorismo diversa operatione dall'altre e diverso nome; perché quando il cubato del terzo delli tanti è maggiore del quadrato della metà del numero, lo eccesso loro non si può chiamare né più né meno, però lo chiamarò più di meno quando egli si dovrà aggiongere, e quando si doverà cavare lo chiamerò men di meno, e questa operatione è necessarissijma più che l'altre Radici cubiche legate per rispetto delli capitoli di potenze di potenze, accompagnati con li cubi, o tanti, o con tutti due insieme, ché molto più sono li casi dell'agguagliare dove ne nasce questa sorte di Radici che quelli dove nasce l'altra, la quale parerà a molto più tosto sofistica che reale, e tale opinione ho tenuto anch'io, sin che ho trovato la sua dimostratione in linee [...] e prima trattarò del moltiplicare, ponendo la regola del più e del meno
>
> Più via più di meno, fa più di meno;
>
> Meno via più di meno, fa meno di meno;
>
> Più via meno di meno, fa meno di meno;
>
> Meno via meno di meno, fa più di meno;
>
> Più di meno via più di meno, fa meno;
>
> Più di meno via men di meno, fa più;
>
> Meno di meno via più di meno, fa più;

[23]Osserva Ettore Bortolotti: "Questo capitolo si dovrebbe piuttosto intitolare: Dimostrazione di come sia necessario porre $- \cdot - = +$ perché resti valida la proprietà distributiva del prodotto", Bombelli, *L'algebra*, cit., p.77, n.30

[24]Per un'analisi di questo passo e del caso irriducibile in Bombelli si rimanda a F. La Nave, B. Mazur, *Reading Bombelli*, The Mathematical Intelligencer, 24 (2002), p. 12-21; E. Kenney, *Cardano: "Arithmetic subtlety" and impossible solutions*, Philosophia mathematica, 2 (1989), p. 195-216.

Meno di meno via men di meno, fa meno

Per risolvere il caso irriducibile bisogna però compiere un passo ulteriore, cioè bisogna 'ridurre' queste particolari radici cubiche "legate" a espressioni più semplici da manipolare algebricamente; in altri termini, si deve estrarre la radice cubica di $a \pm \sqrt{-b}$ [25]. Il procedimento sviluppato da Bombelli si basa sul fatto che, applicando la precedente legge dei segni, il cubo di $x \pm \sqrt{-y}$ rimane un'espressione dello stesso tipo, cioè

$$(x \pm \sqrt{-y})^3 = a \pm \sqrt{-b}$$

dove a e b sono coefficienti opportuni. Se questa relazione viene letta in senso inverso, lascia supporre che la radice cubica dell'espressione $a \pm \sqrt{-b}$ sia sempre del tipo $x \pm \sqrt{-y}$ purché siano soddisfatte le condizioni

$$\begin{cases} \sqrt[3]{a^2 + b^2} = x^2 + y^2 \\ a = x^3 - 3xy^2 \end{cases}$$

che si traducono in un sistema nelle incognite x e y risolubile, come dice Bombelli, "a tentone".[26]

A questo punto, il caso irriducibile può dirsi dunque completamente risolto, almeno per i casi particolari in cui sia semplice trovare le incognite x e y.

Queste considerazioni preliminari aprono la strada alla trattazione vera e propria delle equazioni di terzo grado che si trova nel secondo libro dell'*Algebra* e si sviluppa secondo lo schema espositivo già seguito da Cardano nell'*Ars magna*: enunciazione della regola in forma retorica, esempi numerici e costruzione geometrica della soluzione. E' su quest'ultimo aspetto che concentreremo ora la nostra attenzione.

Nell'*Ars magna*, Cardano aveva proposto una rappresentazione geometrica delle soluzioni dei tre tipi di equazioni cubiche, basata sulla rilettura, in termini di decomposizione in cubi e parallelepipedi, dell'algoritmo risolutivo di Tartaglia[27]. Ad esempio, nel caso dell'equazione $x^3 + px = q$, se si assume che le quantità u e v $(u > v)$ definite dalle condizioni

$$\begin{cases} u - v = q \\ uv = \frac{p^3}{27} \end{cases}$$

[25] Si veda il paragrafo *Modo di trovare il lato cubico di simil qualità di radici*, p. 180 e segg. Lo stesso problema, del resto, si presentava anche quando l'incognita era espressa come somma o differenza delle usuali radici cubiche legate del tipo $\sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}}$. Tanto nell'*Ars magna* quanto nell'*Algebra* si trovano alcuni procedimenti, validi in casi particolari, atti a razionalizzare queste espressioni.

[26] "Volendo trovare il lato cubico di simil specie di radici per prattica si terrà in questo modo: Giongasi il quadrato del numero col quadrato della R. e della somma si pigli il lato cubico, poi si cerchi a tentone di trovare un numero et una R.q. che li loro quadrati gionti insieme faccino tanto quanto fu il lato cubico detto di sopra". Applicando questo metodo, Bombelli ottiene a esempio $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm \sqrt{-1}$, $\sqrt[3]{52 \pm \sqrt{-2209}} = 4 \pm \sqrt{-1}$. Nel primo caso, si tratta delle radici cubiche ottenute dalla formula cardanica per l'equazione $x^2 = 15x + 4$: sommando $2 + \sqrt{-1}$ e $2 - \sqrt{-1}$ si ottiene la soluzione *vera* 4. Si veda R. Bombelli, *L'algebra*, cit., p.180-5.

[27] Nell'*Ars magna* Cardano attribuisce la paternità della formula risolutiva a Scipione del Ferro e a Tartaglia, ma rivendica con forza la paternità della dimostrazione geometrica della formula, che legittima rigorosamente la validità dell'algoritmo aritmetico.

rappresentino dei cubi, allora la soluzione è data dalla differenza dei loro lati, ovvero da $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$. Partendo dall'equazione generica $x^3 + 6x = 20$, Cardano considera un cubo di lato $\sqrt[3]{u}$ e uno interno a esso, di lato $\sqrt[3]{v}$ tali che $u - v = 20$ e $uv = 8$ e scompone opportunamente il cubo maggiore in cubi e parallelepipedi in modo che il segmento $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$ soddisfi l'equazione di partenza.

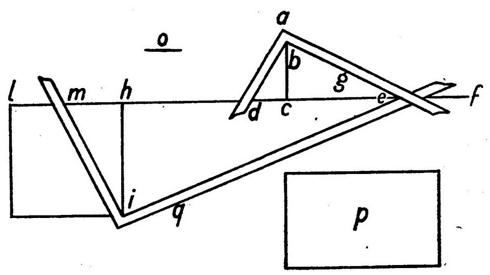
Anche le due equazioni cubiche rimanenti ammettono analoghe rappresentazioni geometriche, ma in questo caso Cardano esclude tacitamente il caso irriducibile, dal momento che la possibilità della decomposizione è subordinata alla positività del discriminante $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$. Queste, tuttavia, non sono le uniche costruzioni geometriche proposte da Cardano.

Nel capitolo XII del *De regula aliza*, intitolato *De modo demonstrandi geometrice aestimationem cubi et numeri aequalium quadratis* viene infatti costruita la soluzione dell'equazione $x^3 + 192 = 12x^2$, esempio particolarmente interessante perché l'equazione si trasforma facilmente (ponendo $x = y - 4$) nella cubica irriducibile $y^3 = 48y + 64$. Ispirato dal commento di Eutocio al secondo libro della *Sfera e il cilindro* di Archimede[28], Cardano mostra che la soluzione dell'equazione può essere rappresentata come intersezione di una parabola e di un'iperbole, ma conclude amaramente che, pur essendo semplice dal punto di vista geometrico, la costruzione è difficile da tradurre in termini aritmetici. Aggiunge inoltre, senza una vera giustificazione, di non ritenere pienamente soddisfacente una tale costruzione e si può congetturare che l'impossibilità di usare solo la riga e il compasso abbia giocato un ruolo preponderante in questo rifiuto[29].

Quando Bombelli, nella sua *Algebra*, deve affrontare il problema della rappresentazione geometrica delle equazioni cubiche, riprende il dialogo a distanza con l'*Ars magna* e il *De regula aliza*. La prima delle due costruzioni che corredano il caso $x^3 + px = q$ ricalca infatti sostanzialmente il metodo cardaniano di decomposizione in cubi e parallelepipedi ed è addirittura basata sullo stesso esempio guida $x^3 + 6x = 20$. La seconda costruzione "in linea", cioè in due dimensioni, riecheggia invece il metodo grafico proposto per l'estrazione della radice cubica, poiché utilizza sempre due squadri materiali, che vengono disposti per tentativi, sfruttando una specie di principio di continuità. Infatti, data la generica equazione-guida $x^3 + 6x = 20$ si costruisce il quadrato lhi di lato $hi = \sqrt{20}$ e il segmento hc di lunghezza 6 perpendicolare a uno dei suoi lati. Fissata l'unità di misura dc, si posizionano gli squadri in modo che un vertice coincida col punto i e l'altro scorra sul segmento bc perpendicolare a dc e in modo che i segmenti bc e mh risultino uguali. Applicando ancora semplici teoremi euclidei si dimostra che bc e mh rappresentano la soluzione della cubica data.

[28] "Et hoc nos docet facere Eutocius Ascalonita in secundum de Sphaera et Cylindro bifariam, sed sufficiat adduxisse primam illius demonstrationem", *De aliza regula*, 1570 p.25; 1663, vol. 4, p.389-390.

[29] "Et ideo facilis operatio Geometrica difficillima est arithmetice, nec etiam satisfacit" (Cardano, *De regula aliza*, cit., 1570, p. 27; 1663 p. 390). Tale costruzione viene riportata in sintesi in S. Maracchia, *Algebra e geometria in Cardano*, in M.L.Baldi, G.Canziani, *Cardano e la tradizione dei saperi*, Milano, FrancoAngeli 2003, p. 145-155.



A differenza di Cardano, Bombelli non solo non rifiuta la costruzione non eseguibile con riga e compasso, ma anzi la considera come inevitabile nel caso dei problemi di questo tipo:

> ... e perché si sa che a trovare le due medie proportionali fra due linee date non ci è via reale, ma si opera a tentoni (come si è mostrato nella estrattione delle Radici cubiche in linea) però non si deve tenere questa dimostratione di poco valore per havere ad alzare et abbassare lo squadro .g. tanto che la .bc. sia pari alla .hm. perché dove intervengono corpi non si può fare altrimente[30]

La trattazione del secondo tipo di equazione $x^3 = px + q$ comincia con l'enunciazione della regola seguita da esempi numerici; il caso irriducibile viene introdotto da un esempio nel quale è tuttavia applicabile "la regola messa dal Cardano" di aggiungere a entrambi i membri un numero tale da rendere possibile la divisione per un polinomio di tipo $x \pm a$ ed abbassare il grado dell'equazione[31]. Nel caso in cui questa manipolazione non sia possibile, come nell'equazione $x^3 = 15x + 4$ la regola risolutiva deve ricorrere, finalmente, alle nuove radici cubiche legate:

> piglisi il terzo delli Tanti, ch'è 5, cubisi fa 125 e questo si cavi del quadrato della metà del numero, ch'è 4, resta -121. Il qual si chiamerà più di meno che di questo pigliata la Radice quadrata sarà + di - 11, che pigliatone il lato cubico ed aggionto col suo residuo fa 2 + di - 1 et 2 - di -1, che gionti insieme fanno 4 e 4 è la valuta del Tanto. Et benché a molti parerà questa cosa stravagante, perché di questa opinione fui ancho già un tempo, parendomi più tosto fosse sofistica che vera, nondimeno tanto cercai che trovai la dimostratione, la quale sarà qui sotto notata, sì che questa ancora si può mostrare in linea, che pur nelle operationi serve senza difficultade alcuna, et assai volte si trova la valuta del Tanto per numero (come si è trovato in questo esempio)[32]

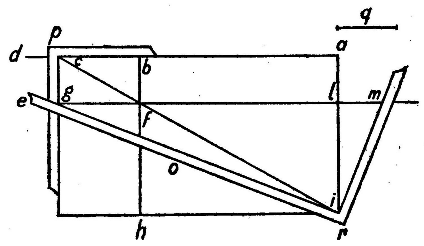
Bombelli osserva che la rappresentazione geometrica di un'equazione cubica attraverso cubi e parallelepipedi è possibile solo quando ammette una risolvente quadratica a discriminante non negativo; quando questo non accade, è ancora possibile dare una dimostrazione geometrica generale dell'esistenza della radice, purché si accetti l'uso

[30] Bombelli, *L'algebra*, cit. p.220.

[31] Il caso in esame è $x^3 = 12x + 9$; si aggiunge 27 in entrambi i membri in modo che siano divisibili per $x + 3$.

[32] Bombelli, *L'algebra*, cit. p.225.

degli squadri al posto della riga e del compasso, ovvero si accetti l'idea di determinare un punto in maniera approssimata[33]. Assunto ml come segmento unitario e lf di lunghezza pari al coefficiente del termine lineare 6 (l'esempio guida è $x^3 = 6x+4$) si costruisce il rettangolo $abfl$ di area uguale al termine noto 4 e si dispongono gli squadri in modo che il vertice di uno sia vincolato a scorrere sulla retta li e a passare per m e l'altro in modo tale che un braccio possa scorrere sulla retta ad; quando i due bracci si intersecano nel punto g si ottiene una configurazione nella quale li rappresenta la radice dell'equazione cubica data[34]



Molto ingegnosamente, Bombelli suggerisce anche il modo di rappresentare geometricamente espressioni del tipo $\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{-b}}$, risalendo a ritroso alla cubica di cui sono radici e poi procedendo alla costruzione "in linea" che abbiamo appena visto[35].

La legittimità che Bombelli accorda a questo tipo di costruzioni lo convince dell'utilità delle *radices sophisticae* cardaniane e lo sollecita a costruire delle opportune regole di calcolo, che invece non appariranno per nulla soddisfacenti per Cardano, che nel *Sermo de plus et minus* – opera dal titolo assai eloquente, rimasta inedita e pubblicata solo da Spon nel 1663 – ribadirà le sue non poche perplessità di fronte ai risultati di Bombelli.[36]

Per quanto l'*Algebra* avesse potuto contare su estimatori di prestigio come Stevin e Leibniz, la sua diffusione in seno alla comunità scientifica fu molto limitata e le particolari *radici cubiche legate*, nonché i "nuovi segni" inventati da Bombelli, non conobbero un reale sviluppo. Nei primi decenni del XVII secolo, tuttavia, il problema di calcolare il numero delle radici di un'equazione algebrica fece tornare alla ribalta le *radices sophisticae*.

Tale questione non era estranea né a Cardano, né a Bombelli, ma i due non erano andati oltre alcune considerazioni, certo importanti, ma non collocate in un quadro

[33] "tal agguagliatione non si potrà fare con detto taglio, però non parendo tale agguagliatione generale sono andato tanto investigando che ho trovato una dimostratione in superficie piana generalissima, ma perché dove intervengono li corpi le linee medie non si possono ritrovare se non per via d'instromento, però non paia ad alcuno strano se questa dimostratione haverà la medesima difficultà, che quando non l'havesse saria stata vana la inventione di Platone ed Archita Tarentino con tanti altri valent'huomini nel voler duplare l'altare, overo Cubo (come largamente ne ha parlato il Barbaro nel Comento del suo Vitruvio), però havendo lo scudo di tanti valent'huomini non mi affaticarò in volere sostentar tal dimostratione non di potere far altramente che con l'instromento", Bombelli, *L'algebra*, cit. p.227-8.

[34] Considerato il triangolo rettangolo mgi, dalla proporzione $ml : li = li : lg$ dove $mi = 1$ e $li = x$ si deduce che $lg = x^2$ e che l'area del rettangolo rlg è pari a x^3. Dal momento che i due rettangoli $abfl$ e fgh sono uguali, il rettangolo rlg è anche uguale a $6x + 4$.

[35] In particolare, l'esempio proposto da Bombelli è $\sqrt[3]{4+\sqrt{-11}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{-11}}$ e l'equazione a cui si risale è $x^3 = 9x + 8$.

[36] H. Cardanus, *Sermo de plus et minus*, in *Opera Omnia*, cit., volume 4, p. 435-439.

teorico organico. Nel primo capitolo dell'*Ars magna*, Cardano aveva osservato, anche se in maniera tutt'altro che chiara, che un'equazione di terzo grado poteva avere al massimo tre radici, sia *vere* che *false*. Nell'*Algebra*, Bombelli aveva constatato che nelle cubiche irriducibili, le *radici cubiche legate* comparivano sempre in coppia [37] ovvero, in termini moderni, si era reso conto che, almeno nelle equazioni di terzo e quarto grado, il numero delle radici complesse è pari, essendo sempre presente una radice e la sua coniugata.

3 Conclusioni

La formula risolutiva dell'equazione di terzo grado scoperta attorno al 1515 da Scipione del Ferro e pochi anni dopo ritrovata anche da Tartaglia, pose Cardano di fronte al problema di studiare espressioni del tipo $a \pm b\sqrt{-1}$, unico ostacolo che impediva di poter dare una soluzione davvero generale alle equazioni di terzo e di quarto grado. Prima ancora di porsi questioni di carattere fondazionale circa la natura delle *radices sophisticae* o la loro rappresentabilità geometrica, Cardano cercò di trovare delle regole per poter operare aritmeticamente con queste strane espressioni, ma si scontrò subito col problema di stabilire quale segno avessero. Sebbene si rendesse conto che tali quantità non potevano considerarsi negative né positive, Cardano cercò di attribuire loro un segno, tentando addirittura di formulare una nuova legge dei segni per adattarla alle proprie esigenze. Di fronte al palese insuccesso, Cardano tentò allora di cercare una formula risolutiva che non presentasse radici di numeri negativi ma i suoi sforzi, raccolti nel *De regula aliza*, non vennero premiati (né avrebbero potuto esserlo, peraltro).

Nel tentativo di collocare le nuove scoperte algebriche in un quadro teorico organico, Bombelli riconsiderò il problema del segno delle espressioni di tipo $b\sqrt{-1}$ e inventò i nuovi segni "più di meno" e "meno di meno", per i quali stabilì delle opportune regole di moltiplicazione. Su questa base, Bombelli costruì un'aritmetica delle quantità sofistiche cardaniane che gli consentì di dare un senso al caso irriducibile delle equazioni cubiche e, nei casi particolari in cui era semplice estrarre le *radici cubiche legate* $\sqrt[3]{a \pm b\sqrt{-1}}$, gli permise anche di risolvere concretamente l'equazione ottenendo le radici reali. Per Bombelli questo non era ancora sufficiente per decretare la piena legittimità matematica di queste quantità, che si sentì di riconoscere solo quando riuscì costruire le radici di una cubica irriducibile, anche se si trattava di una costruzione per approssimazione che esulava dall'ambito euclideo, al quale invece Cardano rimase saldamente legato. Le intuizioni di Bombelli non furono colte e sviluppate dalla comunità matematica europea e quando le quantità sofistiche si ripresentarono sulla scena seicentesca, nella forma delle *solutions impossibles* di Girard o delle *racines imaginaires* di Descartes esse avevano lo scopo di assicurare validità al cosiddetto *Teorema fondamentale dell'algebra*.

Nel tardo Rinascimento dunque, tanto nel caso di Cardano-Bombelli quanto in quello di Girard-Descartes, i numeri complessi sono concepiti come soluzioni di problemi, dando un senso rispettivamente alla formula risolutiva dell'equazione cubica e a un fondamentale risultato sul numero delle radici di un'equazione polinomiale. Le loro proprietà formali risultano però ancora molto riposte e altri problemi dovranno im-

[37] "Si deve avertire che tal sorte di Radici legate non possono intravenire se non accompagnato il Binomio col suo Residuo".

porsi all'attenzione dei matematici perché i numeri complessi diventino uno specifico oggetto di studio e acquistino un'oggettiva "esistenza matematica"[38].

4 Fonti reperibili in rete

Su Girolamo Cardano si può consultare il sito *Girolamo Cardano. Strumenti per la storia del Rinascimento in Italia settentrionale* alla pagina web

http://www.cardano.unimi.it

In questo sito è pubblicata l'intera *Opera omnia* del 1663 in 10 volumi

http://www.cardano.unimi.it/testi/opera.html

Il quarto volume raccoglie la quasi totalità degli scritti matematici.

L'*editio princeps* dell'*Ars Magna* del 1545, e anche la *Practica arithmetice* del 1539 si trovano nella Biblioteca Digitale del Museo Galileo

http://bibdig.museogalileo.it/rd/bd

Le opere di Tartaglia e Bombelli si possono trovare nella Biblioteca Digitale del Museo Galileo e nel sito di *Mathematica Italiana* della Scuola Normale Superiore di Pisa

http://mathematica.sns.it

ove sono disponibili anche notizie biografiche di questi e di altri matematici italiani.

Sugli squadri di Bombelli e altre 'macchine matematiche' si rimanda al sito *Associazione macchine matematiche*

http://www.macchinematematiche.org/

e al *Laboratorio di matematica* dell'Università di Modena

http://www.museo.unimo.it/theatrum/

e in particolare

http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/149ogg.htm http://www.macchinematematiche.org

[38]Sul concetto di "oggetto matematico" e sulla sua formazione, si rimanda al saggio di E.Giusti, *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici* (Torino, Bollati Boringhieri 1999, pp. 87-93), in cui un capitolo è dedicato ai numeri complessi.