L'expansion arabe. 1

Au milieu du septième siècle, un peuple marginal encore a fait une entrée dramatique sur la scène du monde. En raison de la faiblesse de l'empire romain d’Orient et du royaume Sassanide, provoquée par de longues, exigeantes guerres, les Arabes ont rapidement conquis un territoire énorme et ont créé un empire de proportions sans précédent. Un siècle après la mort de Mahomet, l'empire arabe s'est étendu de l'Espagne jusqu'en Inde, unifiant des régions très éloignées et des cultures profondément différentes sous la loi de l'Islam.

Chronologie de l'expansion arabe.

632	Mort de Mahomet.
635	Conquête de Damas.
636	Prise de Jérusalem.
637	Occupation de la Syrie et de la Palestine. Invasion de la Perse. Conquête de Ctésiphon.
639-41	Invasion de l'Egypte
640-44	Occupation de l'Irak et de la Perse.
647	Commencement de la pénétration en Afrique méditerranéenne.
673	Siège de Constantinople.
680	Conquête de l'Algérie.
681-82	Conquête du Maroc. Les armées arabes parviennent à l'Océan Atlantique.
698	Prise de Carthage.
711	Conquête de l'Espagne. Occupation de l'Afghanistan et d’une partie du Pakistan. Prise de Boukhara et de Samarkand.
717-18	Second siège de Constantinople.
724	Prise de Tachkent et occupation de la Transoxiane.
732	Bataille de Poitiers et fin de l’expansion arabe en Occident.

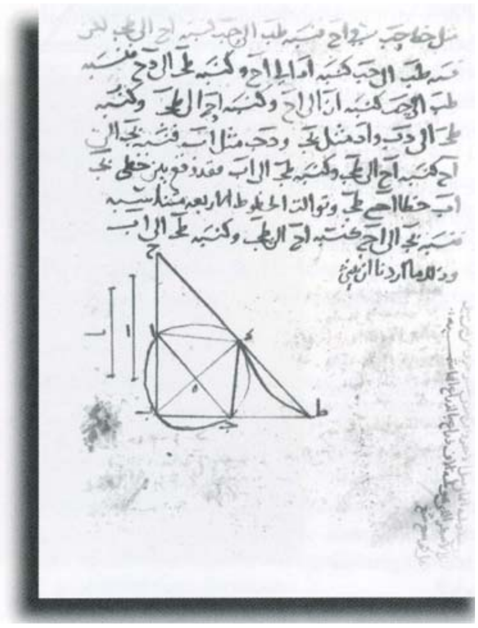
La culture arabo-islamique. 2

En dépit de la vitesse de l'expansion et des destructions inévitables qui se sont produites pendant la guerre de conquête, le nouvel état a immédiatement montré une grande vitalité. Avec la magnificence des cours et le niveau de vie de ses sujets, il a bientôt rivalisé avec des empires de traditions très anciennes. En contact avec différents peuples et civilisations, et grâce aux politiques tolérantes et à un degré sans précédent de curiosité intellectuelle, les Arabes ont pu assimiler rapidement des cultures très différentes et les unir dans une synthèse originale et vitale. De cette façon, ils ont créé une culture qui durant plusieurs siècles devait être un modèle pour des sociétés moins avancées, et qui constituait un pont entre la civilisation classique et le monde moderne.

Quand l'Occident latin reprendra les fils de la culture et de l'art après le haut Moyen Age, il trouvera dans ses contacts avec le monde arabe un héritage dans presque chaque champ de la connaissance, de l'astronomie à la médecine, de la philosophie aux mathématiques.

3

La transmission de la connaissance scientifique.



Les Khalifes les plus progressifs ont promu et ont soutenu les savants, médecins et scientifiques, dans l'œuvre de traduction des textes scientifiques et philosophiques et dans la création d'une culture arabo-islamique. Avec la fondation à Bagdad de la Bayt al-Ḥikhma (la "Maison de la connaissance") par le khalife Abbasside al-Ma'mūn, l'activité de traduction a acquis de vastes proportions, et a conduit rapidement à l'assimilation de la plus grande part de la science grecque. Les ouvrages les plus importants des mathématiques classiques ont été traduits en arabe, incluant la plupart des travaux d'Euclide, d'Archimède et d'Apollonius. Dans plusieurs cas, la traduction en arabe est le seul témoignage d'un original grec perdu.

En contact avec les mathématiques indiennes, les scientifiques arabes en ont rapidement acquis les résultats principaux, en particulier l'utilisation des chiffres indiens, la représentation positionnelle et les techniques relatives de calcul. Les mathématiciens arabes ont également rassemblé les derniers échos des mathématiques égyptiennes et babyloniennes, obtenant ainsi une contamination et une fusion de différents concepts dans une science nouvelle et pour l'essentielle originale: l'algèbre.

La floraison des mathématiques arabes. 4

Les premiers travaux mathématiques originaux conçus par la culture arabe remontent au neuvième siècle, une période où le processus d'assimilation des différents peuples de l'empire arabe s'était déjà produit. Par conséquent, plutôt que de parler des mathématiques arabes dans le sens littéral, il est plus précis de parler des mathématiques islamiques.

En fait, le premier mathématicien important, al-Khwārizmi (c. 780-850), était né en Asie centrale, ainsi que l'astronome al–Bīrūnī (973-vers 1040), tandis que le mathématicien et poète Omar al-Khayyām (1048-vers 1131) était iranien.

Au dixième et au onzième siècle, les mathématiques étaient à leur apogée. Forts d'une tradition classique bien assimilée, et s »appuyant sur la contribution des nombreux savants provenant de toutes les parties du monde islamique, la science arabe connu pendant ces années un développement sans précédents, atteignant un niveau de connaissance inaccessible aux autres civilisations contemporaines.

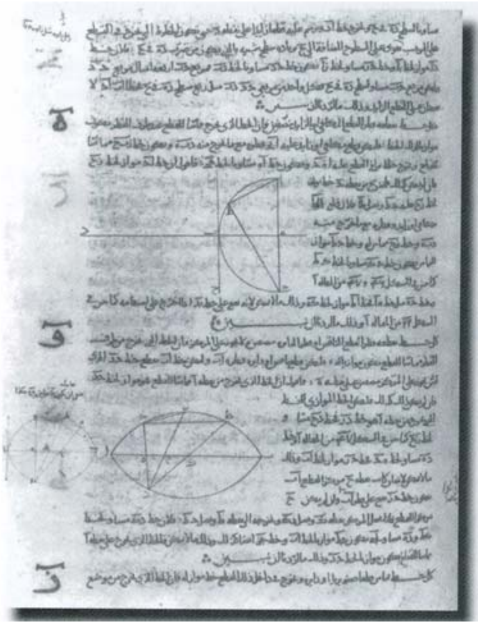
Entre les mathématiciens actifs pendant cette période sont à mentionner : Abū Kāmil (c. 850- c. 930), Abu'l Wafa (940-997), les Banu Musa et Al-Haytam, connu dans le monde occidental comme Alhazen (965-1039).

Le ciel verse des pétales blancs des nuages
on dirait qu'une pluie des fleurs se disperse dans le jardin
dans la tasse de lis je verse le vin rose
du nuage pourpre une pluie des jasmins descend.

Termes arabes dans les mathématiques occidentales. 5

En même temps que les chiffres indo-arabes et la représentation positionnelle, les mathématiques européennes ont adopté une terminologie dérivée de l'arabe. Dans beaucoup de cas, il s'agissait d'une translittération relativement fiable, parfois une simple traduction des termes arabes correspondants, à leur tour, à des traductions du grec ou du sanskrit. La présence de termes arabes était considérable pendant le Moyen âge, même dans les traductions des classiques grecs faites à partir de l'arabe. Au seizième siècle, quand on put lire directement les ouvrages classiques, la plupart des termes géométriques arabes furent remplacés par le grec correspondant et inévitablement, ils disparurent du langage scientifique, ne laissant que ceux sans équivalent grec.

Les sources du *Liber Abaci*: al-Khwārizmi et Abu Kāmil. 6



Abū Ja'far Muh'ammad ibn Mūsā fut appelé al-Khwārizmī parce que sa famille, et probablement lui-même, étaient originaires de la ville de Khwārizm en Asie centrale. Son nom, latinisé comme *Algorismus*, est l'origine du terme « algorithme » qui indique aujourd'hui un procédé de calcul. Sur sa vie, on sait seulement qu'il a vécu dans la première moitié du neuvième siècle. Il était astronome, géographe et historien, mais il doit sa renommée à ses deux travaux mathématiques : *Le calcul indien*, dont seulement les versions latines du douzième et treizième siècle ont survécu, et l'*Algèbre* (Al-Kitāb al-muktas'ar fi h'īsāb al-jabr wa'l-muqābala).

Dans ce dernier travail, al-Khwārizmī intègre dans un tout organique des notions dérivant des mathématiques indiennes (l'utilisation du zéro et la représentation positionnelle) et des *Éléments* d'Euclide, notamment du deuxième livre, dont il se sert pour donner une démonstration géométrique des règles de solution des équations du deuxième degré.

Comme dans le cas de al-Khwārizmī, presque aucune information biographique n'est connue au sujet de Abū Kāmil. Puisqu'il est connu comme al h'āsib al-Mis'rī, le calculateur égyptien, il est probablement né en Egypte. Il a presque certainement vécu entre 850 et 930.

Abū Kāmil fut probablement le premier des mathématiciens arabes à étudier des solutions en nombres entiers des problèmes indéterminés, comme le mathématicien grec Diophante l'avait fait avant lui. Dans son algèbre, il a employé des puissances des inconnues plus grandes que deux et a étudié des équations avec des coefficients irrationnels. Plusieurs des exemples donnés par al-Khwārizmī et Abū Kāmil peuvent être trouvés dans les oeuvres de Fibonacci.

Pise et la mer méditerranée au treizième siècle.

7

Pise est une métropole des "Rums", très renommée et centre d'un vaste territoire. Elle prospère avec ses marchés et ses bâtiments et s'étend sur une grande surface ; les jardins y abondent, les champs cultivés s'étendent partout où l'œil peut voir. Sa position est éminente, ses exploits stupéfiants. Pise est dotée de fortifications élevées, de terres fertiles, d'eaux abondantes et de monuments merveilleux. Les Pisans possèdent des navires et des chevaux et sont aguerris aux entreprises maritimes contre tout autre pays.

Cette page du géographe arabe al-Idrisi décrit la période de pré-éminence économique dont Pise a joui durant le douzième siècle, jointe à une considérable puissance militaire.

Profitant des luttes intestines qui troublaient le monde arabe occidental, Pise et Gênes avaient acquis le contrôle de la Méditerranée occidentale et étaient sur le point de commencer une guerre pour la suprématie qui ne se terminerait qu'avec la bataille de la Meloria en 1284.

Les Almohades et le développement du commerce.

8

Dans une première période, les relations entre Pise et le Maghreb arabe ont été caractérisées par un conflit permanent, où des véritables guerres plus ou moins longues s'entremêlaient avec des périodes relativement tranquilles, caractérisées par des actions rapides et de surprise, avec destructions et saccages. Après 1150, les intérêts commerciaux réciproques avaient conduit à une amélioration des relations et à l'établissement d'une période de paix, favorisée aussi par l'établissement d'une puissance centralisée dans les territoires maghrébins.

Après une période de grande instabilité, caractérisé par des divisions politiques et religieuses, l'Occident musulman avait vu l'expansion des Almoravides (al-Murābiṭūn), bientôt remplacée par les Almohades (al-Muwah-ḥidūn) : Ces derniers donnèrent une unité politique au Maghreb et remportèrent aussi quelque succès en Espagne, provoquant l'arrêt du processus de la *Reconquista*.

Après 1133, Pise inaugura une politique de coopération avec les nouveaux souverains, se traduisant par la signature de plusieurs traités de paix, périodiquement renouvelés et contenant nombres de clauses pour le développement et la protection du commerce.

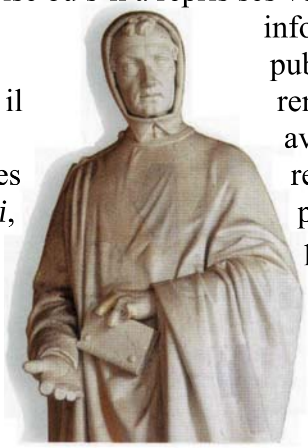
Extrait du traité de paix de 1186 entre Pise et Tunis.

1. Il est permit aux marchants de Pise de commercer dans le royaume almohade, en se limitant aux territoires de Ceuta, d'Oran, de Bugia et de Tunis mais avec l'intedition absolue de débarquer et de séjourner dans les autres villes de l'empire, sauf en cas de force majeure. En dehors des ports mentionnés, il est défendu d'acheter, de vendre, et même de parler avec les habitants. La ville espagnole d'Almeria est exempte de cette interdiction, mais les marchants pisans ne sont autorisés qu'à s'approvisionner de vivres et à faire réparer leurs navires. Les violations de ces règles peuvent être punies par la mort ou l'esclavage à l'arbitraire du souverain.
2. Le Pisans s'engagent à punir sévèrement toute action effectuée à l'encontre des citoyens musulmans du khalife.
3. Aux mêmes Pisans il est interdit sous des peines très sévères de transporter des citoyens du khalife sur leurs bateaux.
4. L'impôt sur les marchandises vendues est fixé au dixième de leur prix, "selon l'usage".
5. La liberté de commerce, la liberté de navigation et la garantie de la sécurité des personnes et des biens sont réaffirmées.

Leonardo Fibonacci de Pise.

La plupart des informations biographiques sur Leonardo Fibonacci se trouvent dans ses propres travaux, en particulier dans le *Liber Abaci*. La date de sa naissance est inconnue et a été le sujet de beaucoup de conjecture ; aujourd'hui on la considère comme ayant eu lieu peu après 1170. Dans sa jeunesse, son père l'amena avec lui à Bougie, une ville voisine d'Alger, où il était notaire de la commune de Pise. Là, Leonardo apprit les premiers éléments des mathématiques, qu'il perfectionna dans au cours de plusieurs voyages dans tous les pays méditerranéens qui lui valurent le surnom de « Bigollo ».

Une fois rentré dans sa patrie, Fibonacci publia en 1202 le *Liber Abaci*, qui lui apporta une vaste renommée. On ne sait pas si après cette date Fibonacci est resté à Pise ou s'il a repris ses voyages dans le monde, car nous n'avons aucune information sur sa vie avant 1220, date de la publication de la Practica Geometriae. En 1226, il rencontra à Pise l'empereur Frédéric II à sa cour, avec laquelle il aurait conservé de très bonnes relations. En effet, la version révisée du *Liber Abaci*, publiée en 1228, est dédiée à Michel Scot, un philosophe de la cour impériale. Pendant ces années, il a également écrit trois ouvrages plus petits mais pas moins importants : le *Liber Quadratorum*, le *Flos* et la *Lettre à Maître Théodore*. De deux autres ouvrages, un *Commentaire au dixième livre des Éléments d'Euclide* et un *Livre de moindre façon*, probablement un abrégé du *Liber Abaci*, nous ne connaissons que les noms, sans rien savoir sur leur contenu ni sur la date de leur composition.



Un document daté de 1241, où la municipalité de Pise accordait au mathématicien une pension, montre qu'il était encore vivant en cette année. Rien n'est connu de Fibonacci après cette date.

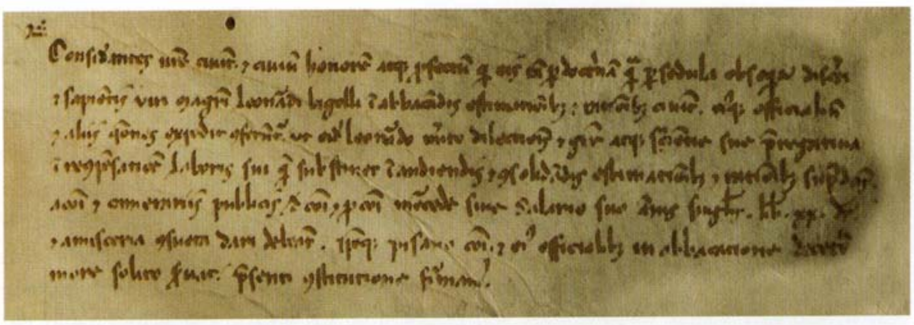
Le *Liber Abaci.* 10

Dans le *Liber Abaci,* publié en 1202, Fibonacci a inséré toute la connaissance qu'il avait acquise pendant ses voyages dans les pays arabes, ainsi que ses propres réflexions et élaborations. Le résultat est un ouvrage qui concourt en doctrine avec ses modèles et qui les dépasse en quantité, un travail qui pendant longtemps restera sans égal dans les mathématiques occidentales.

Il n'y a aucun aspect des mathématiques commerciales qui ne reçoive la place qui lui est propre dans le *Liber Abaci*; des compagnies aux prêts, du change à la fonte des monnaies, des achats à l'échange des biens, tout est systématiquement expliqué avec une série d'exemples pris des opérations commerciales courantes. Pour la culture mathématique européenne, toujours modelé sur les auteurs latins tardifs, tels Boethius et Cassiodorus, le *Liber Abaci* a représenté une solution de continuité ; pour le commerce, qui était en train de dépasser les limites de la gestion familière pour assumer des dimensions européennes, il a fourni la base pour une comptabilité précise et fiable.

Une pension pour Leonardo Pisano. 11

Vu l'honneur et le bénéfice de notre ville et de ses citoyens, découlant de la doctrine et des services du sage et instruit maître Leonardo Bigollo dans les problèmes et les évaluations d'abaque, nécessaires à la ville et à ses fonctionnaires et dans d'autres domaines si nécessaire, nous délibérons avec cet acte qu'au même Leonardo, pour son attachement et sa connaissance et comme rémunération pour le travail qu'il soutient afin d'étudier et déterminer les évaluations et les problèmes mentionnés ci-dessus, soient données par la municipalité et le trésor public 20 Livres à titre de salaire annuel, plus les bénéfices usuels. Nous lui demandons également de servir la municipalité de Pise et ses fonctionnaires dans la pratique de l'abaque.



La représentation positionnelle. 12

Une des contributions les plus importantes du *Liber Abaci* est la diffusion de la représentation positionnelle et des chiffres Indo-arabes. Les civilisations méditerranéennes anciennes avaient élaboré plusieurs méthodes différentes pour écrire des nombres : les Egyptiens et les Romains utilisaient des signes différents pour les unités, les dizaines, les centaines etc..... Par exemple, les Romains désignaient les unités par I, les dizaines par X, les centaines par C, et donc pour noter deux cents trois, ils écrivaient CCIII. Les Grecs et les Hébreux employaient les lettres de l'alphabet : les Grecs écrivaient α pour 1, β pour 2, γ pour 3, et ainsi de suite. Pour indiquer 10 ils écrivaient κ ; 20 était λ, …, 100 était ρ, 200 s'écrivait σ ; ainsi 203 s'écrivait σγ. Les plus proches d'un système positionnel étaient les Babyloniens, qui ont employé un système mixte additif-positionnel : les nombres de 1 à 59 étaient écrits à la manière des Egyptiens et des Romains ; pour les nombres plus grands on employait un système positionnel à base 60 : par conséquent 203 été indiqué avec un 3 suivi de 23, à savoir 3 fois 60 plus 23 unités. Sauf ce dernier, tous les autres systèmes présentaient beaucoup de difficultés dans l'écriture des grands nombres.

Dans la notation moderne, inventée par les Indiens et arrivée en Occident grâce aux Arabes, chaque nombre a une valeur dépendant de sa position : celle la plus à droite est la place des unités, et procédant vers la gauche viennent les dizaines, les centaines et ainsi de suite. De là vient la nécessité d'un signe, le zéro, indiquant que la place correspondante est vide : dans 203 il y a deux centaines, aucune dizaine et trois unités.

Problèmes du *Liber Abaci*: la règle du trois.

Si un canthare se vend pour 40 livres, quelle est la valeur de 5 rouleaux ?

Pour trouver ce nombre inconnu, on écrit du côté droit le premier nombre, c'est-à-dire la quantité des marchandises, et son prix à sa gauche. Si maintenant la deuxième quantité des marchandises est connue, on doit l'écrire sous les marchandises, si au contraire est connu le chiffre à dépenser, il doit être écrit sous le prix ; toujours un genre sous le même genre : marchandises sous marchandises et argent sous argent. Une fois qu'on a fait ceci, on multipliera les nombres opposés; le produit divisé par le nombre qui reste donnera le quatrième nombre cherché.

Dans notre cas, on peut écrire un canthare, qui vaut 100 rouleaux, du côté droit, et son prix, qui est 40 livres, à sa gauche. Puis on écrira 5 rouleaux au-dessous de 100 rouleaux, puisqu'ils sont du même type. On multipliera les nombres opposés -- 5 par 40 fait 200 -- et ce résultat sera divisé par 100, donnant 2 livres comme prix des 5 rouleaux.

Les mesures de poids à Pise au treizième siècle

4 grains de blé font une caroube
6 caroubes font un denier du canthare

25 deniers de canthare font une once de livre	39 et demi deniers de canthare font une once
12 onces de livre font une livre	12 onces font un rouleau
158 livres font un canthare de Pise	100 rouleaux font un canthare de Pise

Problèmes du *Liber Abaci*: la fausse position. 14

Il y a un arbre, dont 1/3 et ¼ sont sous terre. La partie qui reste au-dessus de la terre est de 21 paumes. Nous demandons la longueur de l'arbre.

Supposez que la longueur de l'arbre soit de 12 paumes. Si nous retranchons $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$, c'est-à-dire 7, restent au-dessus de la terre 5 paumes. On dira alors : si quand je pose 12 je trouve 5, que dois-je poser pour obtenir 21 ? Multipliez les nombres extrêmes, c'est-à-dire 12 par 21, et divisez le résultat par le nombre moyen 5 ; on trouvera 50 et $\frac{2}{5}$.

La méthode s'appelle "de la fausse position" parce que d'une première hypothèse, normalement fausse, on peut obtenir la solution en appliquant la règle de trois. Dans le *Liber Abaci* la méthode de la fausse position et ses généralisations sont employées avec la plus grande compétence et virtuosité.

Problèmes du *Liber Abaci*: si 3 était 4.

Si 3 était 4, combien serait 5 ? Si ce problème (ou un problème semblable) n'était pas dans le *Liber Abaci* il pourrait sembler n'être que le délire d'un fou. C'est Leonardo lui-même qui nous donne la réponse:

Si on demande de 5, avec quel nombre il a la même proportion que 3 a avec 4 ? faites ceci : multipliez 4 par 5, cela fait 20 ; divisez-le par 3, ce qui donne 6 et $\frac{2}{3}$ qui est le nombre désiré. Alors : si 3 était 4, 5 serait 6 et $\frac{2}{3}$.

Le même problème peut également être regardé sous un autre point de vue. Fibonacci dit encore:

Si 3 était 4, combien serait 5? C'est équivalent à dire : si 3 rouleaux coûtent 4 besants, combien coûteront 5 rouleaux? Cette question doit être traitée comme les achats, d'après les règles que nous avons enseignées pour ces questions.

Ainsi, derrière un problème apparemment extravagant se cache une formulation abstraite de la règle du trois, et une méthode de calcul générale.

Lapins et nombres de Fibonacci. 16

Combien de couples de lapins descendent d'un couple par année.

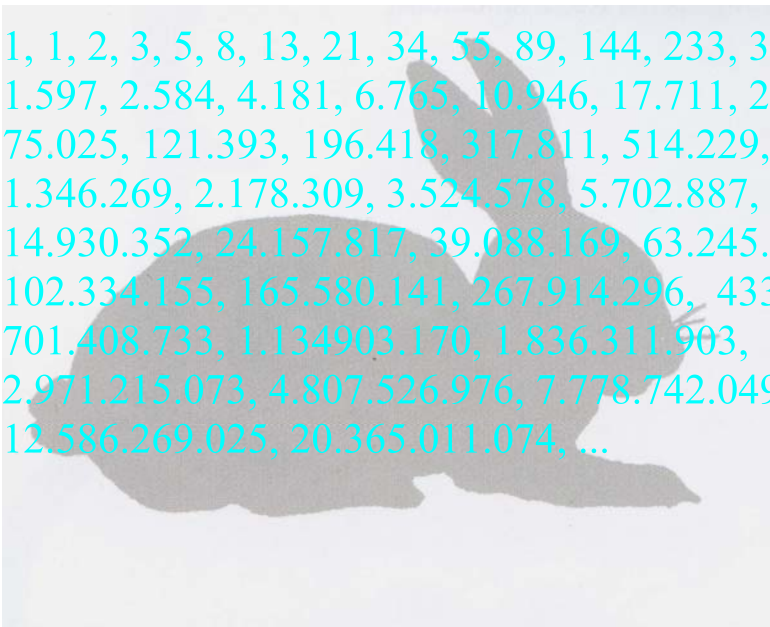
Un jeune homme a mis un couple de lapins dans un lieu complètement entouré de murs, afin de découvrir combien de couples des lapins descendent de celui-ci dans une année. Par nature, chaque couple des lapins engendre chaque mois un autre couple, mais ils commencent à procréer seulement à partir de leur deuxième mois d'existence.

Pour résoudre ce problème, supposons par exemple qu'en novembre il y ait un certain nombre de couples, disons 21, et qu'en octobre il y en avait 13. Entre les couples de novembre, 8 (c'est-à-dire 21-13) sont des nouveau-nés qui ne procréent pas. Ainsi en décembre il y aura les 21 couples de novembre plus 13 couples engendrés par les lapins qui étaient déjà là en octobre.

Cela est toujours vrai et donc – remarque Fibonacci – pour trouver le nombre de lapins

on doit seulement sommer le premier nombre au second, c'est-à-dire 1 à 1 ; puis le second au troisième, le troisième au quatrième, le quatrième au cinquième, et ainsi de suite, jusqu'à ce que le dixième soit additionné au onzième, c'est-à-dire 89 à 144, pour obtenir la quantité finale de 233 couples de lapins ; et on peut continuer sustématiquement pour un nombre infini de mois.

La suite 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610... s'appelle aujourd'hui "suite de Fibonacci" et les nombres qui la composent s'appellent "nombres de Fibonacci". Plus tard, on a noté que cette série se trouvait spontanément dans la nature et dans l'art, et aujourd'hui le nom de Fibonacci est connu au grand public grâce à une suite qu'il a probablement considérée seulement comme une curiosité.



Coquillages et autres curiosités. 17

Un problème géométrique qui mène aux nombres de Fibonacci est la construction de carrés adjacents. On part d'un carré de côté 1, et sur ce côté on construit un deuxième carré adjacent. Les deux carrés formeront un rectangle 2×1 et donc le prochain carré adjacent aura un côté 2. Avec les précédents, ce carré formera un rectangle 3×2, sur lequel on posera un nouveau carré de coté 3. Procédant de la même façon, on formera une série de carrés dont les côtés sont les nombres de Fibonacci successifs : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, etc.

Si l'on trace dans chaque carré un quart de cercle, on obtient la "spirale de Fibonacci", une forme qui peut également être trouvée dans certains coquillages.

Les coquillages sont seulement un exemple d'un phénomène récurrent : la présence des nombres de Fibonacci dans la nature. On retrouve les nombres de Fibonacci dans l'arrangement des pétales des fleurs, dans les ramifications de quelques plantes, dans la disposition des graines des tournesols et des écailles dans les pommes de pins. Ces dernières sont disposées en deux séries de spirales opposées qui convergent au centre ; dans le même cône ou dans le même tournesol, le nombre de spirales qui tournent dans les deux directions sont deux nombres de Fibonacci consécutifs.

Les nombres de Fibonacci et le nombre d'or.

Une propriété inattendue des nombres de Fibonacci est que le rapport d'un de ces nombres à celui qui le précède s'approche de plus en plus près au nombre irrationnel $\gamma = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}61803398874989484820458 6\ldots$ Ce rapport, qu'on trouve déjà dans les *Éléments* d'Euclide comme solution au problème "de la division du segment en moyenne et extrême raison", fut appelé la "divine proportion" par Luca Pacioli, qui a consacré un volume entier avec ce titre au sujet, et plus tard "section d'or" ou "nombre d'or".

Le nombre d'or a des propriétés particulières de symétrie et a un rôle important dans les arts visuels : Leonardo da Vinci s'en est servi pour établir les proportions du corps humain et plus récemment il a été largement utilisé par Mondrian et par Severini. Le Modulor de Le Corbusier est également lié aux nombres de Fibonacci et à la section d'or, alors que l'axe de la tour du Palazzo Vecchio à Florence divise la largeur du bâtiment selon la moyenne et extrême raison.

Monnaies et intérêts. 19

Les prêts et les intérêts ont toujours eu un rôle particulier dans l'arithmétique commerciale. L'unité monétaire standard est la livre, composée de 20 sous qui ont chacun la valeur de 12 deniers ; donc, la lire vaut 240 deniers.

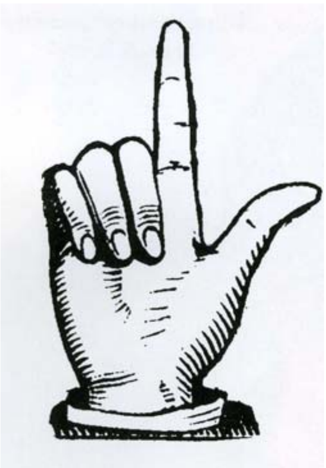
L'intérêt est calculé seulement à la fin de l'année (ce qu'on appelle : "mériter au nouvel an") ; pour les fractions de l'année, on calcule l'intérêt simple. Ce dernier est exprimé en deniers par livre par mois ; un denier par livre par mois est équivalent à 12 deniers par livre par an, et puisque 12 deniers font un sous, c'est-à-dire un vingtième de livre, il correspond à un taux d'intérêt de 5%. Par conséquent, 4 deniers par livre par mois donnent un taux d'intérêt annuel de 20%.

Mémoire de mains.

Au Moyen âge le papier était un produit précieux et par conséquent beaucoup d'opérations qui sont de nos jours effectuées en écrivant sur du papier étaient réalisées mentalement ou en écrivant de façon précaire sur la poussière ou sur le sable. Il était donc très important de mémoriser des résultats partiels, afin de les rappeler et de les employer plus tard.

La manière la plus courante de se rappeler un nombre était "de le tenir dans des ses mains" au moyen d'un système raffiné de position des doigts. Les unités et les dizaines (c'est-à-dire les nombres de 1 à 99) étaient tenus dans la main gauche, alors que la main droite était utilisée symétriquement pour enregistrer les centaines et les milliers. Ainsi, la position qui indiquait un nombre dans la main gauche, par exemple 35, indiquait autant de centaines – donc le nombre 3500- dans la main droite.

L'art de tenir des nombres dans ses mains représentait une partie très importante de l'étude de l'arithmétique et les traités d'abaque ne manquaient pas de rapporter en leur début deux pages avec les figures représentant les positions des doigts.



Problèmes du *Liber Abaci*: vieilles et chats. 21

Certains des problèmes du *Liber Abaci* ont des origines très anciennes et ont été transmis pendant des millers d'années avant d’arriver à Leonardo Pisano et enfin jusqu’à nous. Parmi les problèmes les plus anciens il y en a un qui se trouve déjà dans le Papyrus Rhind et qui se ramène à la somme d’une progression géométrique de raison 7 :

Sept maisons ; dans chacune sept chats ; chaque chat tue 7 souris ; chaque souris avait mangé 7 grains d'orge ; chaque grain produit 7 hekat. Quelle est la somme de tout ça ?

Sous une forme différente, ce problème est arrivé jusqu’à nos jours.

Sur la route du Bois des Dames
j'ai rencontré un homme avec sept femmes.
Chaque femme a sept sacs,
dans chaque sac il y a sept chats,
chaque chat a sept chatons.
Entre sacs, chats, chatons et femmes,
combien allaient-ils au Bois des Dames?

Dans le *Liber Abaci* le problème devient :

Sept vieilles dames vont à Rome ; chacune a sept mules, chaque mule a sept sacs, dans chaque sac il y a sept morceaux de pain, chaque morceau de pain a sept couteaux, chaque couteau a sept gaines. On demande la somme de tous.

Dans le papyrus de Rhind il y a cinq termes, dans la comptine du Bois des Dames quatre, dans le problème de Fibonacci six.

Problèmes du *Liber Abaci*: l'échiquier.

Un autre problème très ancien qui nous est parvenu inaltéré concerne le jeu d'échecs. On raconte que son inventeur demanda pour toute récompense un grain de froment pour la première case, deux pour la seconde, quatre pour la troisième, huit pour la quatrième et ainsi de suite, toujours doublant jusqu'à la dernière case de l'échiquier, la soixante-quatrième.

Fibonacci ne mentionne pas la légende, mais il évalue à 18.446.744.073.709.551.615 le nombre total de grains de froment.

Un si grand nombre ne nous dit rien, et il est difficile de se faire une idée de son énormité. Après tout, une fois écrit, il ne parait pas si terriblement grand. Pour que le lecteur puisse s'en faire une meilleure idée, Leonardo se demande : combien de bateaux pourraient être chargés si chacun d'eux peut porter 500 boisseaux de Pise pesant 24 setiers chacun, un setier étant composé de 140 livres de 12 onces chacune, qui à leur tour valent 25 deniers, dont chacun pèse 24 grains ? Le résultat est surprenant : on chargerait 1.525.028.455 bateaux -- plus d'un milliard et demi, un nombre "qui est apparemment innombrable et presque infini"

Le succès du *Liber Abaci.*

Le *Liber Abaci* tombant dans un environnement mathématiquement peu développé, il lui a fallu un temps considérable avant de porter ses fruits : ce n'est que dans la dernière partie du treizième siècle que nous avons des preuves concrètes de l'influence de Fibonacci sur le développement des mathématiques en Italie, presque toujours en liaison avec les activités des écoles d'abaque. En effet, la plupart des traités d'abaque ont tiré leur inspiration du travail du Pisan, qui est universellement reconnu comme le fondateur et le plus important présentateur des mathématiques médiévales.

Vers le milieu du quinzième siècle, l'invention de la presse vient bouleverser la transmission de la culture, causant la disparition progressive de la connaissance publique de ces auteurs dont les oeuvres n'étaient pas imprimés. Fibonacci lui-même n'a pu échapper à ce destin, et déjà au seizième siècle il n'était désormais pas beaucoup plus qu'un nom : Cardan le place "quelques années avant" Luca Pacioli ; Bernardino Baldi, l'auteur d'une « Cronica de' matematici » mentionne Leonardo comme ayant vécu au quinzième siècle.

Il faudra attendre le dix-neuvième siècle pour que Fibonacci soit à nouveau situé dans une perspective historique correcte.

Sũma de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita.

Continentia de tutta lopera.

De numeri e misure in tutti modi occurrenti.
Proportioni e pportiõalita anotitia del. 5° de Euclide e de tutti li altri soi libri.
Chiaui ouero euidentie numero. 13. p le q̃ntita continue pportiõali del. 6° e. 7° de Euclide extratte.
Tutte le pti delalgorismo: cioe releuare. partir. multiplicar. sũmare. e sotrare cõ tutte sue pue i sani e rotti. e radici e progressioni.
De la regola mercantesca ditta del. 3. e soi fõdamenti con casi exemplari per cõm° § . § . guadagni: perdite: transportationi: e inuestite.
Partir. multiplicar. summar. e sotrar de le proportioni e de tutte sorti radici.
De le. 3. regole del catayn ditta positiõe e sua origie.
Euidentie generali ouer conclusioni n° 66. absoluere ogni caso che per regole ordinarie nõ si podesse.
Tutte sorte binomii e recisi e altre linee irratiõali del decimo de Euclide.
Tutte regole de algebra ditte de la cosa e lor fabriche e fondamenti.
Compagnie i tutti modi. e lor partire.
Socide de bestiami. e lor partire
Fitti: pesciõi: cottimi: liuelli: logagioni: e godimenti.
Baratti i tutti modi semplici: composti: e col tempo.
Cambi reali. secchi. fittitij. e diminuti ouer comuni.
Meriti semplici e a capo danno e altri termini.
Resti. saldi. sconti. de tempo e denari e de recare a un di piu partite.
Ori. argẽti. e lloro affinare. e carattare
Molti casi e ragioni straordinarie varie e diuerse a tutte occurentie commo nella sequente tauola appare ordinatamente de tutte.
Ordine a saper tener ogni cõto e scripture e del quaderno in vinegia.
Tariffa de tutte vsanze e costumi mercanteschi in tutto el mondo.
Pratica e theorica de geometria e de li. 5. corpi regulari e altri dependenti.
E molte altre cose de grandissimi piaceri e frutto cõmo difusamente per la sequente tauola appare.

Commerce et mathématiques. 24

Au début du quatorzième siècle, l'intensification du commerce a conduit au développement des compagnies avec des branches dans différentes villes. Leur unité était fondée, d'une part, sur un échange intense de correspondance et, de l'autre, sur un système de comptabilité fiable, que la pratique avait progressivement perfectionné. À coté du premier enregistrement pro memoria, parut le journal pour l'écriture quotidienne des opérations en ordre chronologique, puis le registre où chaque correspondant habituel avait son propre compte de pertes et profits, et finalement d'autres livres de comptes spécifiques au sujet des biens d’équipement et des propriétés patrimoniales, des marchandises et des associés.

L'arithmétique élémentaire n'était plus suffisante pour de tels organisations commerciales complexes ; ses nécessités de comptabilité exigeaient des connaissances bien plus avancées, en premier lieu ces chiffres arabes, qui pour de petites compagnies avaient été considérées plutôt comme des obstacles que comme des outils utiles. Les nécessités des compagnies agissant souvent à un niveau international ont constitué la raison principale de la diffusion des techniques et des notations innovatrices contenues dans le *Liber Abaci*.

Les écoles d'abaque. 25

La diffusion des chiffres arabes et des méthodes de calcul correspondantes s'est produite en grande partie grâce à des institutions probablement uniques dans l'histoire de l'Europe, les écoles d'abaque. Elles se développent à partir de la fin du treizième siècle, surtout dans les centres les plus actifs du point de vue économique, villes où les activités commerciales se développent, créant une bourgeoisie marchande riche qui réclamera bientôt pour elle-même la gestion politique des républiques.

Dans les centres les plus petits, les maîtres d'abaque sont habituellement payés par les municipalités qui les emploient comme conseillers pour des mesures et des évaluations. Dans les grandes villes, telles que Venise et Florence, on trouve au contraire un grand nombre d'écoles privées d'abaque, qui fonctionneront sans interruption jusqu'au seizième siècle où elles seront remplacées par les instituts religieux d'éducation.

Bien qu’incomplèts, les premiers témoignages de la présence de maîtres d'abaque dans beaucoup de villes italiennes indiquent une prédominance claire des centres et des maîtres toscans.

Pise	1241	Leonardo Fibonacci
Boulogne	1265	Pietro da Bologna
San Geminano	1279	Michele
Perouse	seconde moitié du treizième siècle	
Verone	1277	Lotto da Firenze (1285)
Venice	1305	Gentile dall’abaco
Siene	1312	Gherardo di Chiaro da Firenze
Savone	1345	Nello da Pisa
Lucques	1345	Iacopo da Firenze
Pistoia	1353	Ricco di Vanni da Prato
Gênes	1373	Tommaso di Miniato da Pisa
Gênes	c. 1375	Tommaso di Bonaccio da Pisa
Arezzo	1394	Benedetto di Domenico da Prato
Volterra	1409	Filippo de Follis da Pisa
Modène	1421	Bonifacio di Ferro
Brescia	1436	Benedetto da Firenze

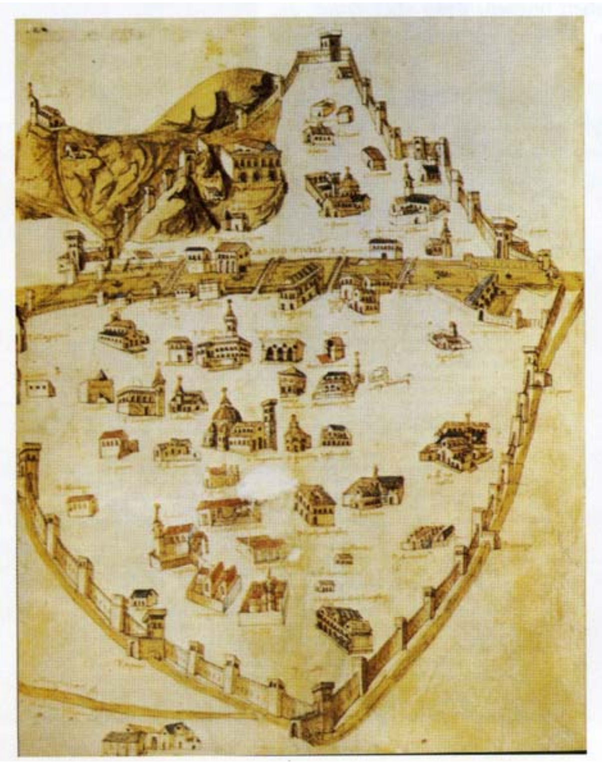
Les écoles d'abaque de Florence.

La diffusion des écoles d'abaque fut particulièrement importante à Florence, où se produisit un phénomène unique d'éducation de masse. Selon la *Cronica* de Giovanni Villani, en 1338,

de huit à dix mille jeunes garçons et filles apprennent à lire. Les jeunes garçons qui apprennent à manier l'abaque et l'algorithme dans six écoles sont entre mille et deux mille deux cents. Cinq cents cinquante à six cents étudient la grammaire et la logique dans quatre grandes écoles.

De la moitié du quatorzième siècle au début du seizième on compte vingt écoles d'abaque à Florence, un dénombrement qui pourrait augmenter au fur et à mesure que la recherche archivistique se poursuit .

Florence a été alors divisée en quartiers : les Quartiers de Santa Maria Novella, Santa Croce, San Giovanni et Santo Spirito, chacun à son tour subdivisé en quatre Gonfalons.



Les écoles d'abaque de Florence: le quartier de Santa Maria Novella.

Gonfalon de l'Unicorne	École de Santa Trinita (c. 1340–1450)	[Biagio il vecchio] [Paolo dell'abaco] [Michele di Gianni] Don Agostino di Vanni Antonio di Giusto Mazzinghi, Giovanni di Bartolo Lorenzo di Biagio Mariano di M° Michele Taddeo di Salvestro dei Micceri
	École du Lungarno Corsini (1367–1445)	Biagio di Giovanni [Antonio Mazzinghi] Michele di Gianni Luca di Matteo Giovanni di Luca Calandro di Piero Calandri
	École de la Via dell'Inferno (1514)	Marco di Iacopo Grassini
	École de S. Maria della Scala (1458–1469)	Benedetto da Firenze
Gonfalon du Lion rouge	École de la Corticina dell'abaco (c. 1460–1506)	Calandro di Piero Calandri Benedetto da Firenze Pier Maria Calandri Filippo Maria Calandri
	École de la Via Ferravecchi (1493–1500)	Giovanni del Sodo
Gonfalon de la Vipère	École des Santi Apostoli (1375–1527)	Michele di Gianni Orlando di Piero Mariano di Michele Benedetto di Antonio Banco di Piero Banchi Niccolò di Lorenzo Taddeo di Salvestro dei Micceri Niccolò di Taddeo Micceri Piero di Zanobi Giuliano di Buonaguida della Valle
	École de la Piazza dei Pilli (c. 1447–1458)	Calandro di Piero Calandri

Les écoles d'abaque de Florence: le quartier de Santa Croce. 28

Gonfalon des roues	École de la Via dei Neri (1475)	Niccolò di Taddeo Micceri
	École de la Badia Fiorentina (1452–1453)	Bettino di Ser Antonio da Romena [Lorenzo di Biagio da Campi]
	[École du Borgo Pinti] (1519–1522)	Francesco di Leonardo Galigai Giuliano di Buonaguida della Valle
Gonfalon du Lionnoir	[École de la Piazza Peruzzi] (1283–1334)	Iacopo dell'abaco
	École de la Via dei Rustici (c. 1530)	Antonio di Taddeo dei
Micceri		

Les écoles d'abaque de Florence: le quartier de San Giovanni.

Gonfalon du vair	École de Santa Margherita de' Ricci (1370–1376)	Tommaso di Davizzo dei Corbizzi Bernardo di Tommaso [Cristofano di Tommaso] Antonio Mazzinghi
	École du Canto di Croce Rossa (c. 1493–1495)	Iacopo di Antonio Grassini [Marco di Iacopo Grassini] [Raffaello di Giovanni Canacci]
Gonfalon du Dragon	École de la Via Teatina (1452–1464)	[Benedetto da Firenze]

Les écoles d'abaque de Florence: le quartier de Santo Spirito.

Gonfalon du Dragon	[École de la Via della Chiesa (1458–1469)]	[Lorenzo di Biagio da Campi]
Gonfalon du Coquillage	École du Borgo S. Iacopo (c. 1495)	Raffaello di Giovanni Canacci
Gonfalon de l'Escalier	École de la Via dei Bardi (1495–1499)	Ser Filippo

Une école d’abaque à Pise. 31

Parmi les documents qui décrivent l'enseignement dans les écoles d'abaque, le plus détaillé est celui relatif à l'école de Cristofano di Gherardo di Dino, maître d’abaque à Pise en 1442 :

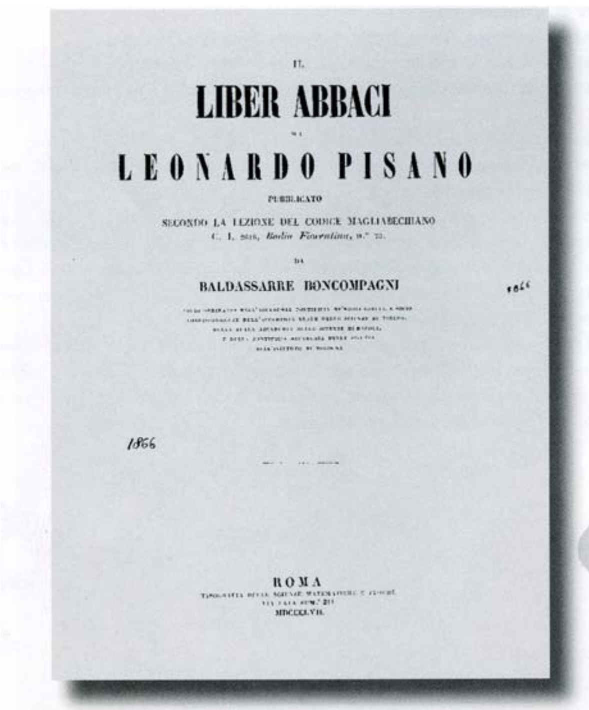
> *La manière d'enseigner l'abaque à Pise, du début à la fin comme nous dirons dans la suite est la suivante :*

- *Au début, quand le garçon commence l'école, on lui enseigne comment écrire des chiffres, c’est-à-dire 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 ;*
- *Puis on lui apprend comment tenir les nombres dans ses mains, les unités et les dizaines dans la main gauche, les centaines et les milliers dans la main droite ;*
- *Puis à écrire les nombres sur la table : deux chiffres et ce qu’ils signifient, puis trois chiffres, quatre chiffres et ainsi de suite. Puis comment les maintenir dans sa main ;*
- *Puis on explique les tables de multiplication. On les dessine sur la table, à partir d'une fois un jusqu'à dix fois dix cent, et que les étudiants les sachent très bien par cœur ;*
- *Puis on apprend à faire les divisions ;*
- *Puis comment multiplier les fractions ;*
- *Puis sommer les fractions ;*
- *Puis comment diviser [les fractions] ;*
- *Puis les intérêts simples, quelques problèmes, et composés ;*
- *Puis comment mesurer les terres, c’est-à-dire les quarrer ;*
- *Puis les escomptes, simples et composés ;*
- *Puis comment calculer les onces d'argent ;*
- *Puis la fonte des monnaies ;*
- *Puis la première opposition*
- *Et notez qu’entre les sections mentionnées ci-dessus, les étudiants devront utiliser les crayons selon leur niveau. Et dans l’entre-temps additionner les nombres dans leurs mains, ou sur le tableau noir ; de temps en temps on leur donnera du travail extraordinaire, selon la volonté du maître.*
- *Notez également cette règle générale : chaque soirée leur donner du travail pour le jour suivant selon leur niveau. Et, en cas de jours du repos, le travail doit être double.*

La redécouverte de Fibonacci au dix-neuvième siècle.

À la fin du dix-huitième siècle, avec le réveil de la recherche historico-mathématique en Italie, l'œuvre de Fibonacci a finalement trouvé son contexte historique approprié. Les précurseurs de cette renaissance de Fibonacci furent Pietro Cossali, auteur de *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'algebra* (1798-99), et Gianbattista Guglielmini, qui écrivitt un Elogio di Leonardo Pisano (1812). Quelques décennies plus tard, Guglielmo Libri et Michel Chasles furent impliqués dans une polémique au sujet de l'évaluation du rôle de Leonardo dans l'histoire de l'algèbre et de l'analyse diophantienne.

Mais le véritable restaurateur du nom et du travail de Fibonacci fut Baldassarre Boncompagni. Après une étude approfondie de la vie et de l'époque du Pisan, il publia d'abord les *Opuscoli* (*Liber Quadratorum, Flos* et *Epistola*) en deux éditions successives (1854 et 1856) et plus tard une édition monumentale de tous les travaux de Fibonacci comprenant, avec les *Opuscoli*, le *Liber Abaci* (1857) et la *Practica Geometriae* (1862). L'édition Boncompagni est aujourd'hui encore la seule que l'on ait des ouvrages de Leonardo.



IL

LIBER ABBACI

LEONARDO PISANO

PUBBLICATO

SECONDO LA LEZIONE DEL CODICE MAGLIABECHIANO

BALDASSARRE BONCOMPAGNI

1866

ROMA

MDCCCLVII