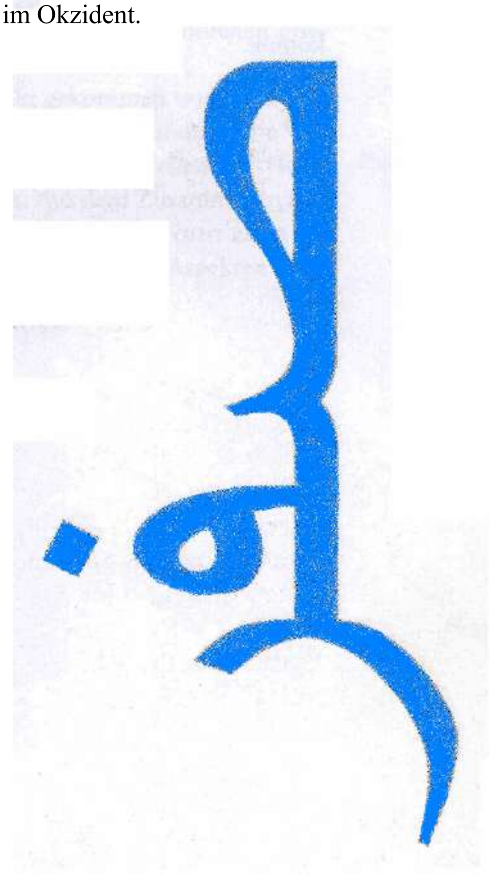
Die arabisches Expansion. 1

Gegen die Mitte des siebten Jahrhunderts erscheint ein bis anhin unbedeutendes Volk machtvoll auf der Bühne des Weltgeschehens. Nicht zuletzt dank der Schwäche des römischen Reiches und des Sasanidenreiches, die durch lange Abnützungskriege geschwächt waren, eroberten die Araber innerhalb kurzer Zeit ein enormes Territorium und bildeten darauf ein Imperium von bisher nie erreichtem Ausmass. Innerhalb eines Jahrhunderts nach Mohammeds Tod, erstreckte sich das arabische Imperium von Spanien bis Indien, indem es unter dem Gesetz des Islam entlegenste Territorien und äusserst verschiedene Kulturen umfasste und vereinigte.

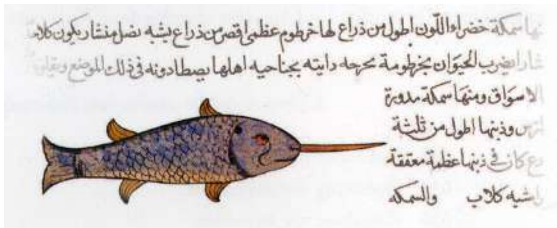
Chronologie der arabischen Expansion

632 Tod Mohammeds.
635 Eroberung von Damaskus.
636 Einnahme von Jerusalem.
637 Besetzung Syriens und Palästinas. Invasion in Persien. Eroberung von Ktesiphon.
639-41 Invasion in Ägypten.
640-44 Besetzung des Irak und Persiens.
647 Beginn des Vorstosses ins mediterrane Afrika.
673 Belagerung von Konstantinopel.
680 Eroberung von Algerien.
681-82 Eroberung von Marokko. Die arabischen Armeen erreichen den atlantischen Ozean.
698 Einnahme von Karthago.
711 Eroberung von Spanien. Besetzung von Afghanistan und Teilen Pakistans. Einnahme von Buchara und Samarkand.
717-18 Zweite Belagerung von Konstantinopel.
724 Einnahme von Taschkent und Besetzung von Transoxanien.
732 Schlacht von Poitiers und Ende der arabischen Expansion im Okzident.

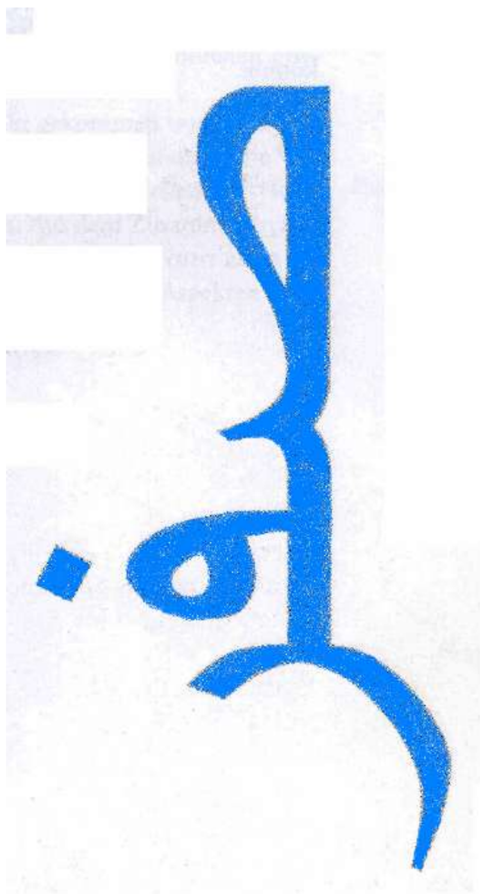


Die arabisch-islamische Kultur. 2

Ungeachtet der hohen Geschwindigkeit der arabischen Expansion und der unvermeidlichen Zerstörungen eines Eroberungskrieges zeigte der neue Staat sofort eine grosse Vitalität und war schnell in der Lage, hinsichtlich des Glanzes der Höfe und der Lebensweise der Untertanen mit Imperien zu wetteifern, die auf älteste Traditionen zurückblicken konnten. Im Kontakt mit verschiedenen Völkern und Kulturen, nicht zuletzt auch dank einer Politik der Toleranz und einer intellektuellen Neugierde, die ihresgleichen sucht, gelang es den Arabern in kurzer Zeit, weit voneinander entfernte Kulturen zu assimilieren und sie zu einer neuartigen und vitalen Synthese zu verschmelzen. Dies geschah, indem sie ein Wissen schufen, an dem sich während vieler Jahrhunderte die rückständigsten Gesellschaften orientieren und davon schöpfen konnten, und indem sie eine Brücke schlugen zwischen der Welt der klassischen Antike und der modernen Welt.

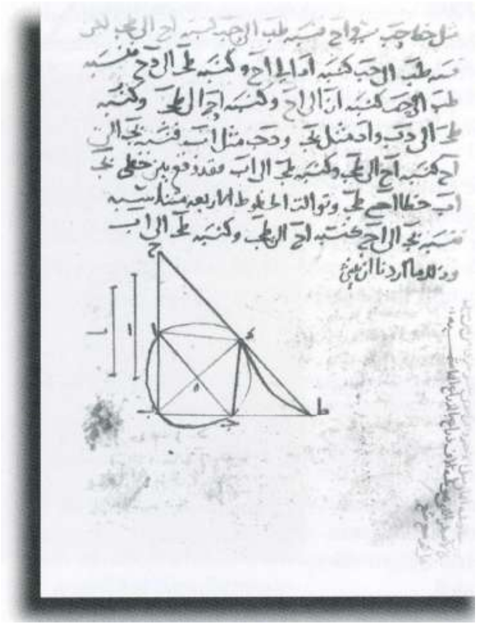


Als das europäische Abendland, nachdem die dunkelsten Jahrhunderte des hohen Mittelalters überwunden waren, wieder an die beinahe gänzlich vergessenen Überlieferungen der antiken Kultur und Kunst anzuknüpfen begann, fand es durch die Kontakte mit der arabischen Welt ein Erbe vor, aus dem es für alle Gebiete des Wissens — von der Astronomie zur Medizin, von der Philosophie zur Mathematik — schöpfen konnte.



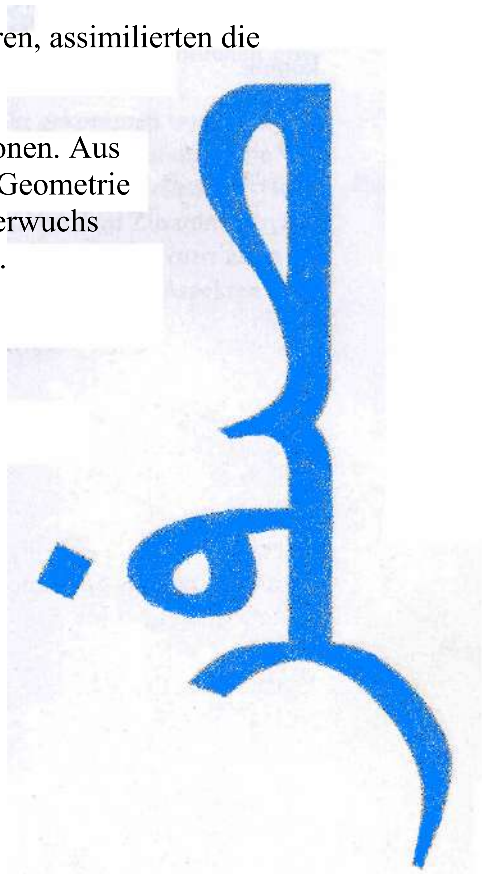
Die Vermittlung der Wissenschaftlichen Kenntnisse.

3



Die aufgeklärtesten Kalifen finanzierten und ermutigten Gelehrte, Mediziner und Wissenschafter in ihrer Ubersetzungsarbeit von wissenschaftlichen und klassischen philosophischen Texten sowie in ihren Bemühungen um die Schaffung einer arabisch-islamischen Kultur. Mit der Schaffung der Bayt al-Hikma (dem "Haus der Weisheit") in Bagdad durch den abbasidischen Kalifen al-Ma'mūn erreichte die Übersetzungstätigkeit gewaltige Ausmasse und führte in kurzer Zeit zu einer Assimilation eines grossen Teils der griechischen Wissenschaft. Die wichtigsten Werke der klassischen Mathematik wurden ins Arabische übersetzt, darunter die Werke von Euklid, Archimedes und Apollonius. In einigen Fällen bildet die arabische Übersetzung bis heute das einzige Zeugnis des verlorenen griechischen Originals.

Nachdem sie mit der indischen Mathematik in Kontakt gekommen waren, assimilierten die Araber sehr schnell deren zentrale Errungenschaften, insbesondere die Verwendung der indischen Ziffern, die Notation nach dem dezimalen Stellenwertsystem und die Rechentechniken nach diesen neuen Notationen. Aus dem Zusammentreffen der indischen Arithmetik und der griechischen Geometrie mit dem fernen Echo der ägyptischen und babylonischen Mathematik erwuchs eine in vielen Aspekten neue und einmalige Wissenschaft: die Algebra.



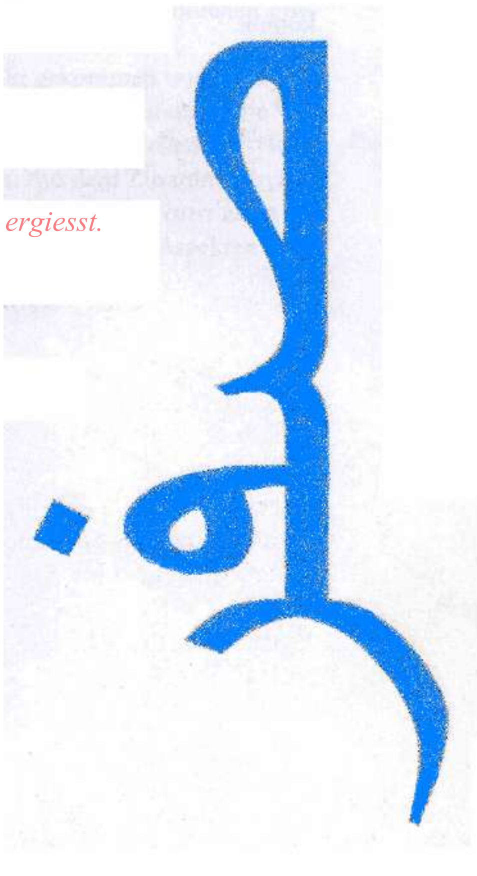
Die Blüte der arabischen Mathematik. 4

Die ersten eigenständigen mathematischen Werke, die innerhalb der arabischen Kultur erschienen, datieren aus dem neunten Jahrhundert. Einer Periode, in welcher der Assimilationsprozess zwischen den Völkern des arabischen Imperiums bereits in weiten Teilen abgeschlossen war. Konsequenterweise müsste man daher weniger von einer arabischen Mathematik im engeren Sinn als von einer islamischen Mathematik reden.

In der Tat stammte bereits der erste Mathematiker von Bedeutung, al-Khwārizmī (ungefähr 780 bis 850), aus Zentralasien, ebenso der Astronom al-Bīrunī (973 bis ungefähr 1040). Der Mathematiker und Poet Omar al-Khayyām (1048 bis ungefähr 1131) war Iraner.

Im zehnten und elften Jahrhundert erreichte die Mathematik ihre höchste Blüte. Gestärkt durch eine weithin assimilierte klassische Tradition und die wissenschaftlichen Beiträge nutzend, die aus allen Teilen der islamischen Welt stammten, nahm die arabische Wissenschaft während dieser Jahrhunderte eine einmalige Entwicklung. Sie repräsentierte den neusten Stand des Wissens und diente anderen zeitgenössischen Kulturen als unerreichbares Modell.

Unter den Mathematikern, denen diese Periode ihre Blüte verdankte, ragen Abū Kāmil (ungefähr 850 bis ungefähr 930), Abū'l Wafā (940 bis 997) und al-Haytham, im Okzident bekannt als Alhazen (965 bis 1039), hervor.



Der Himmel schüttet schneeweisse Blumenblätter vom Himmel.
Du würdest sagen, dass sich ein Blumenregen über den Garten ergiesst.
In den einer Lilie gleichen Kelch schütte ich den rosigen Wein,
von den violett gefärbten Wolken fällt ein Regen aus Jasmin.

O. Khayyām, Rubā'iyyāt

5

Arabische Ausdrücke in der abendländischen Mathematik.

Zusammen mit den indo-arabischen Ziffern und dem Stellenwertsystem ging eine vom Arabischen abgeleitete Terminologie in die europäische Mathematik ein. In den meisten Fällen handelt es sich um eine mehr oder weniger getreue Transliteration, in anderen Fällen hingegen um eine Übersetzung der entsprechenden arabischen Ausdrücke, die oft selbst bereits Übersetzungen aus dem Griechischen oder dem Sanskrit waren. Die Präsenz arabischer Ausdrücke war insbesondere während des Mittelalters erheblich, so etwa auch in den Übersetzungen der griechischen Klassiker aus dem Arabischen. Als dann im 14. Jahrhundert wieder angefangen wurde, direkt die Originale einzusehen, wurden viele arabische Ausdrücke im Bereich der Geometrie durch die entsprechenden griechischen ersetzt und daher nicht mehr verwendet. Folglich blieben schliesslich lediglich diejenigen Wörter übrig, für die eine Entsprechung im Griechischen fehlte.

Algebra, Almukabbala. Mathematische Operationen, um eine Gleichung auf eine kanonische Form zurückzuführen, das heisst indem die negativen Terme eliminiert und die Summe der ähnlichen Terme gebildet wird.
ar. al-jabr = "Restauration (eines Bruchs), Anpassung"
ar. al-muqābala = "Vergleich"

Algorithmus. Die latinisierten Formen des Namens des Mathematikers al-Khwārizmī (Algorismus, Alcorismus, Algorithmus, ...) wurden schrittweise zu einem Substantiv umgebilder, das eine operative Rechenmethode bezeichnet.
ar. al- Khwārizmī, Eigenname

Sache, Zensus. In der lateinischen Algebra des Mittelalters bezeichnen "res" und "census" eine unbekannte Anzahl und das Quadrar einer unbekannten Anzahl, das beisst unser x und x^2.
ar. shay' = "Ding, Sache"
ar. mal = "Eigentum, Vermögen"

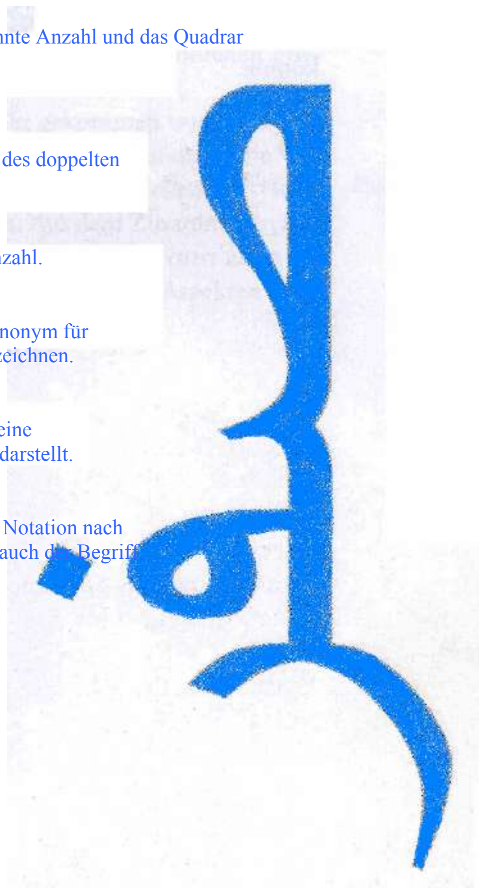
Elkatain. Damit wird im *Liber abaci* eine Lösungsmethode benannt, die auch bekannt ist als "Methode des doppelten falschen Ansatzes".
ar. al-khata'ayn = "die zwei Fehler"

Wurzel. Bezeichnet in der Regel die Quadratwurzel einer Zahl, zuweilen aber auch eine unbekannte Anzahl.
ar. jidhr = "Wurzel (einer Pflanze)"

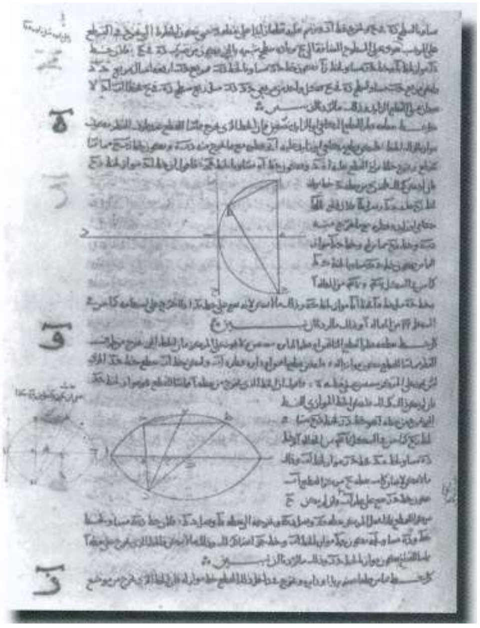
Taube Zahl. Der Begriff "Numerus surdus" steht in der lateinischen Mathematik des Mittelalters als Synonym für "irrationale Zahl". Fibonacci verwendet im *Liber abaci* den Begriff "hasam", um die Primzahlen zu bezeichnen.
ar. 'asamm = "taub"

Sinus. Der Begriff "Sinus" ist eine wörtliche Übersetzung des arabischen Worts "jayb", das seinerseits eine Transliteration des Worts "jiva" - einem Fachterminus der indischen Trigonometrie - aus dem Sanskrit darstellt.
ar. jayb = "Tasche, Offnung, Bucht"

Null (Zerum), Ziffer. Ableitungen des arabischen Namens des Symbols 0, mit dem die Leerstelle in der Notation nach dem Stellenwertsystem bezeichnet wurde, sind im Latein sowohl das "zephirum" (später "zerum") wie auch der Begriff "Ziffer".
ar. sifr = "leer"



Die Quellen des *Liber Abaci*: al-Khwārizmi and Abu Kāmil. 6

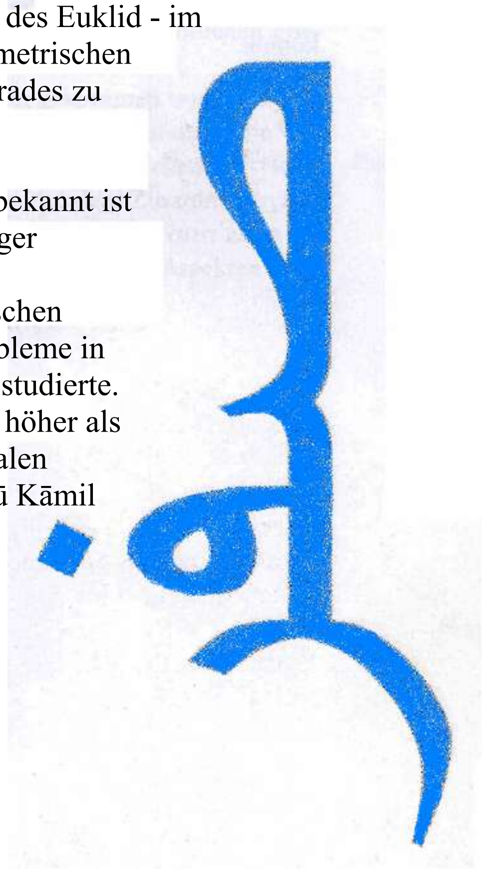


Abū Ja'far Muḥammad ibn Mūsā wurde al-Khwārizmi genannt, weil seine Famìlie - und vielleicht sogar er selbst came from the central Asiatic town of Khwārizm. In seinem Namen, latinisiert zu "Algorismus", hat dann auch der Begriff Algorithmus, der heute einen Rechenvorgang bezeichnet, seinen Ursprung. Von seiner Biografie ist äusserst wenig bekannt: praktisch nur, dass er in der ersten Hälfe des neunten Jahrhunderts lebte und Astronom, Geograf und Historiker war. Sein Ruhm allerdings beruht auf zwei mathematischen Werken: *Die indische Rechenkunst*, von der lediglich die lateinischen Versionen des 12. und 13. Jahrhunderts bekannt sind, und die *Algebra* (Al-Kitāb al-muktasar fī hīsāb al-jabr wa'l-muqābala).

In letzteres incegrierte al- Khwārizmī das aus der indischen Mathematik abgeleitete Wissen - darunter die Verwendung der Zahl Null und das Stellenwertsystem - sowie das Wissen aus den *Elementen* des Euklid - im speziellen das zweite Buch, das er verwendete, um einen geometrischen Beweis der Regeln zur Auflösung einer Gleichung zweiten Grades zu geben - und vereinigte es zu einem organischen Ganzen.

Auch über Abū Kāmil fehien biografische Angaben. Es wird angenommen, dass er in Ägypten geboren wurde, da er auch bekannt ist als al Hāsib al-Misrī, der Rechner Ägyptens. Er lebte mit einiger Gewissheit zwischen 850 und 930.

Abū Kāmil war sehr wahrscheinlich der erste unter den arabischen Mathematikern, der ganzzahlige Lösungen unbestimmter Probleme in der Art und Weise des griechischen Mathematikers Diophant studierte. In seiner Algebra verwendete er Unbekannte in Potenzen, die höher als das Quadrat waren, und untersuchte Gleichungen mit irrationalen Koeffizienten. Viele der Beispiele von al-Khwārizmī und Abū Kāmil finden sich in den Werken Fibonaccis wieder.



Pisa und der Mittelmeerraum im 13. Jahrhundert. 7

Pisa - die Metropole der Rum - verfügt über einen ziemlich weitreichenden Ruhm und ein Territorium von bemerkenswertem Umfang. Es prosperiert durch seme Markte und seine Bauten, es erstreckt deh über eine sehr weite Fläche, Pflanzplätze und Gartenanlagen hat es im Überfluss und seine Anbaufläcken erstrecken sich soweit das Auge reicht. Überlegen seine Position, verblüffend seine Heldentaten. Pisa ist umgeben von hohen Befestigungen, fruchtbaren Böden, Wasser im Überfluss und wunderbaren Monumenten. Die Bewohner Pisas, die Schiffe und Pferde besitzen, sind im Seehandel mit allen übrigen Ländern sehr geübt.

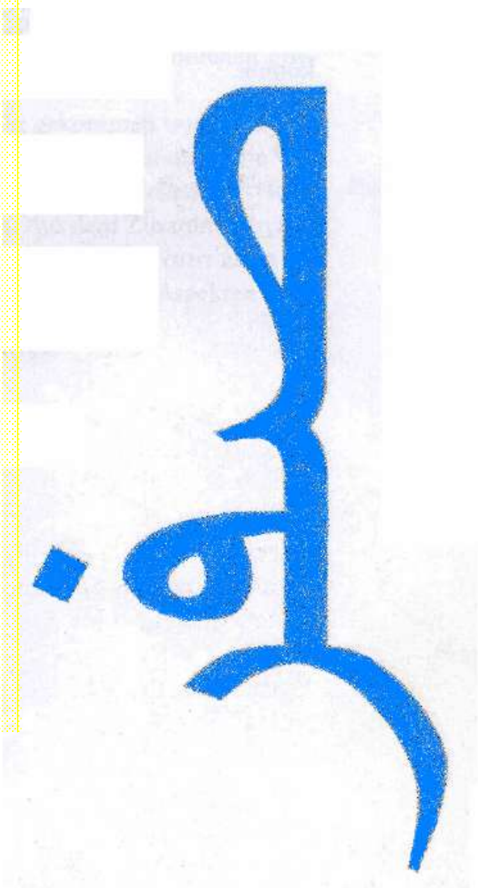
Diese Beschreibung des arabischen Geografen al-Idrisi umfasst die Blütezeit während der wirrschaftlichen Vormacht, die Pisa im 12. Jahrhundert erlebte und der eine ansehnliche militärische Macht entsprach. Pisa und Genua profitierten von den inneren Kämpfen, durch welche die Kalifate von Spanien und Afrika erschürrert wurden, und erwarben die Kontrolle über den abendländischen Mittelmeerraum. Sie waren an den Punkt gelangt, an dem sie den Kampf um die Oberhoheit beginnen konnten, der 1284 mit der Schlacht von Meloria beschlossen wurde.

Die Ankunft der Almohaden und die Entwicklung des Handels. 8

In einer ersten Phase waren die Beziehungen zwischen Pisa und dem Maghreb von permanenten Konflikten gekennzeichnet. Regelrechte kriegerische Akdonen von unterschiedlicher Dauer wurden unterbrochen durch Perioden relativer Ruhe, in denen blitzschnelle, unerwartete Akdonen mit Zerstòrungen und Pliinderungen vorherrschten.
Beginnend im Jahr 1150 fuhrten die wechselseitigen wirtschafdichen Interessen zu einer Verbesserung der Beziehungen und schliesslich — begiinstigt auch durch die Konsolidierung einer Zentralmacht in den maghrebinischen Territorien — zu einem substanziellen Friedensschluss.
Nach einer Periode grosser Instabilitat, während der politische und religiose Spal-tungen das mohammedanische Abendland besdmmten, erfolgte die Expansion der Almoraviden, die daraufhin von den Almohaden abgelòst wurden. Letztere verliehen dem Maghreb politische Einheit und errangen auch einige Erfolge auf der iberischen Halbinsel, wodurch sie den Prozess der Reconquista (Rückeroberung) durch militari-sche Schlage aufhalten konnten.
Mit den neuen Oberhäuptern inaugurierte Pisa seit dem Jahr 1133 eine Polidk der Kooperation, indem es Verhandlungen aufnahm, die zu einer Reihe von Friedensver-trägen fuhrten, die periodiseli erneuert wurden und eine Reihe von Klauseln fiir die Entwicklung und Sicherung des Handels enthielten.

Aus dem Friedensvertmg von 1186 zwischen Pisa und Tunis:

1. Den Kaufleuten aus Pisa wird der Handel im almohadischen Reich erlaubt; be-schränkt allerdings auf die Territorien von Ceuta, Oran, Bugia und Tunis sowie belegt mit dem absoluten Verbot in den anderen Landern des Imperiums auszuschiffen und zu übernachten, es sei denn aufgrund des Wirkens hòherer Gewalten. In jedeni Fall ist es verboten, ausserhalb der genannten Häfen zu verkaufen, zu kaufen und mit den Bewohnern zu sprechen. Von diesem Verbot wird die Stadt Almeria in Spanien ausge-nommen, wo die pisanischen Kaufleute aber nur autorisiert sind, sich mit Lebensmitteln zu versorgen und allenfalls Reparaturen an ihren SchirFen vornehmen zu lassen. Eine Verletzung dieser Normen kann mit dem Tod bestraft werden oder mit Sklaverei gemäss dem Willen des Souveräns.
2. Die Pisaner verpflichten sich, jegliche Aktionen, die den mohammedanischen Un-tertanen des Kaiifen zum Schaden gereichen, streng zu bestrafen.
3. Denselben Pisanern ist es bei schwerster Strafe verboten, auf ihren SchifFen Unter-tanen des Kaiifen zu transportieren.
4. Der Zoll fur verkaufte Waren wird — „nach altem Brauch" — auf einen Zehntel des Verkaufspreises festgelegt.
5. Die Freiheit des Handels, die Sicherheitsgarantie fur Personen und Sachen und die freie Seefahrt werden etneut bekräftigt.

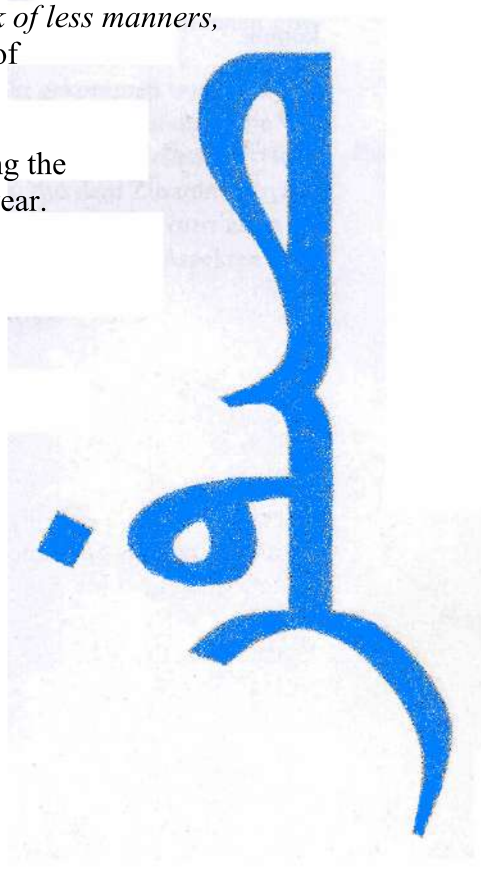


Leonardo Fibonacci aus Pisa.

Most of the biographical information available about Leonardo Fibonacci can be found in his own works, in particular the *Liber Abaci*. His birth date is unknown and has been the subject of much conjecture; today, it is usually considered to have been a little after 1170. As a young boy, his father brought him to Bugia, a town near today's Alger, where he was a notary of the Municipality of Pisa. Here, Leonardo learned the first elements of mathematics, on which he would improve later during several journeys all over the Mediterranean Sea. Because of his many travels, he was nicknamed 'Bigollo'.

Once back in his native country, in Fibonacci wrote the *Liber Abaci*, a work that brought him widespread fame. It is not known whether Fibonacci remained in Pisa afterwards or took up travelling again, since no information about his life before 1220 -- the date of publication of the *Practica Geometriae* -- is available. In 1226, he met Emperor Frederic the second in Pisa, and was to remain on very good terms with his court. The revised version of the *Liber Abaci*, published in 1228, is dedicated to Michele Scoto, a philosopher of the imperial court. During these years, he also wrote three smaller but not less important works: the *Liber Quadratorum*, the *Flos* and the *Letter to magister Theodorus*. Only vague details are known of his two other works, the *Comment to the tenth book of Euclid's Elements* and a *Book of less manners,* probably a compendium of the *Liber Abaci.* Not even the date of composition is known of these.

A document issued by the Municipality of Pisa in 1241, granting the mathematician a pension, proves that he was still alive in that year. Nothing more is known of Fibonacci thereafter.



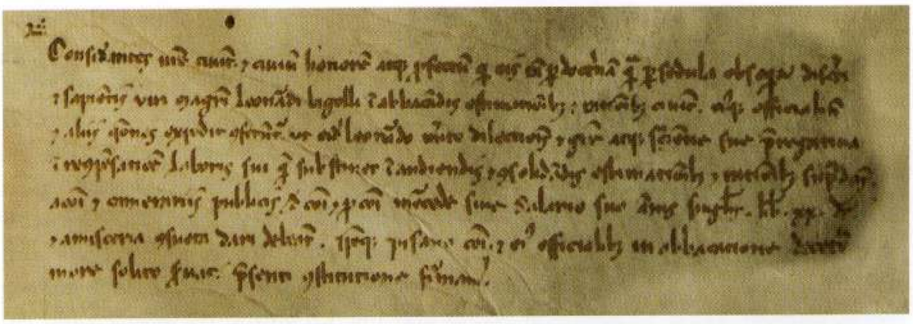
Der *Liber Abaci.* 10

Der *Liber Abaci* sah das Licht der Welt im Jahr 1202. In ihm stellte Fibonacci das Wissen zusammen, das er während seiner Wanderschaft durch die arabischen Länder und durch den Mittelmeerraum erworben hatte, und verband es — wie er selbst sagt — mit eigenen Überlegungen und Ausarbeitungen. Das Resultat ist ein Werk, das seine Vorbilder an Umfang übertrifft und mit diesen fachlich wetteifert und das für lange Zeit in der Geschichte der abendländischen Mathematik unübertroffen bleiben sollte.

Es gibt keinen Bereich der Handelsmathematik, der nicht seinen Platz im Liber Abaci gefunden hätte: von den Gesellschaften zum Verleih, vom Wechsel zur Vereinheitlichung der Währungen, vom Verkauf zum Tauschhandel. All dies wird systematisch und versehen mit einer Reihe von aus laufenden Geschäften gezogenen Beispielen dargelegt. Für das damalige mathematische Wissen in Europa, wo als Vorbilder noch immer Autoren der Spätantike wie Boethius und Cassiodor dienten, repräsentierte der Liber Abaci ein Werk mit ausserordentlicher Sprengkraft. Für den Handel, der im Begriff war, die familiäre Organisation der Geschäftsführung zu überwinden, um europäische Dimensionen anzunehmen, wurde das Werk zur Basis einer präzisen und vertrauenswurdigen Buchhaltung.

A pension for Leonardo Pisano. 11

Considering the honour and profit of our town and its citizens, deriving from the doctrine and diligent services of the wise and learned master in abacus problems and estimates, useful to the town and its officials and in other things when necessary, with this act we deliberate that Leonardo is to be given 20 Liras with the title of pay or yearly salary, together with the usual benefits, by the Municipality and the Public Treasure for his dedication and knowledge and as remuneration for the work he sustains in order to study and determine the above-mentioned estimates and problems. We also ask him to serve the Pisan Municipality and its officials in the practice of abacus.



The positional notation. 12

One of the most important contributions of the *Liber Abaci* is the diffusion of the positional notation and Indo-Arabic figures. Ancient Mediterranean civilisations had different methods to write numbers. Egyptians and Romans had different signs to signal units, tens, hundreds etc… For example, Romans indicated units with I, tens with X and hundreds with C. To indicate two hundred and three, they would write CCIII. Greeks and Hebrews used alphabetical letters: Greeks wrote one with α, two with β, three with γ, and so on. To indicate ten they wrote κ ; thirty was μ, ρ was one hundred and σ two hundred; so, two hundred and three was written as σγ. Those who came closer to the positional system were the Babylonians, who used a mixed sexagesimal system: numbers from one to fifty-nine were written the way Egyptians and Romans wrote them, while for greater numbers a positional system was used-- two hundred and three was indicated with 3 followed by 23, that is 3 sixties and twenty-three units. Apart from the latter, all the other systems had many difficulties in expressing large numbers.

In modern notation, which was invented by the Indians and arrived in the West thanks to the Arabs, every number has avalue according to its position: that on the right is the place of units, then proceeding to the left come the tens, the hundreds and so on. From here comes the necessity of a sign, the zero, indicating that the corresponding place is empty: in 203 there are two hundreds, no tens and three units.

Problems from the *Liber Abaci*: the rule of three. 13

If a cantare is sold for 40 lire, what is the value of 5 rolls?

In order to find the unknown number, one writes the first number, that is the quantity of the goods, on the right and its price besides it on the left. In case the second quantity of the goods is known, one has to write it under the goods, while if the number to be spent is known, this is to be written under the price, so as to always write a type under the same type: goods under goods and money under money. Once one has done this, the opposite numbers can be multiplied; the product divided by the left number will give the fourth desired number.

In our case, one can write one cantare, that is 100 rolls, on the right, and its price, that is 40 liras, on the left. Then, under 100 rolls one will write 5 rolls, since they are of the same type. Afterwards, the opposite numbers can be multiplied -- that is 5 by 40 gives 200 -- and this result is to be divided by 100, giving 2 liras as the price of 5 rolls.

The measures of weight in Pisa in the Thirteenth Century

4 grains of wheat make a carob

6 carobs make a denaro of cantare

25 denari of cantare make an ounce of libra	39 and half denari of cantare make an ounce
12 ounces of libra make a libra	12 ounces make a roll
158 thin libras make a Pisan cantare	100 rolls make a Pisan cantare

Problems from the *Liber Abaci*: the false position. 14

There is a tree that has $\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{4}$ underground, while the remaining part of 21 palms is above the ground. We ask the length of the tree.

Assume that the tree is 12 palms tall and that, taken out $\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{4}$ – that is 7 – 5 palms remain above the ground. One will then say: if when I have 12 I obtain 5, what do I need to do to obtain 21? Multiply the extremes, that is 12 by 21, and the division of the result by the medium 5 will give 50 and $\frac{2}{5}$.

The method is called “of false position” because from an initial assumption, usually false, one can get the solution by applying the rule of three. In the *Liber Abaci* the method of false position and its generalisations are used with great skill and virtuosity.

Problems from the *Liber Abaci*: if 3 were 4. 15

If 3 were 4, how much would 5 be? If this problem (or a similar one) were not in the *Liber Abaci* it would seem to be the ravings of a madman. But since it is Fibonacci who ponders, it is worth trying to find a solution. Actually, Leonardo himself provides the answer to the question:

If one asks of 5, to which number is it in proportion to as 3 is to 4, do this: multiply 4 by 5 and it gives 20, that divided by 3 gives 6 and $\frac{2}{3}$ *and this is the desired number. So:*

If 3 were 4, 5 would be 6 and $\frac{2}{3}$.

The same problem can also be seen from another point of view. Indeed, Fibonacci also states:

If 3 were 4, how much would 5 be? That is equivalent to saying: if 3 rolls cost 4 bezants, how much will 5 rolls cost? This question is to be treated as purchases are, by following the rules concerning similar matters.

So, behind an apparently extravagant problem hides an abstract formulation of the rule of three, and a general method of calculation.

Kaninchen und Fibonacci-Zhalen. 16

Wie viele Kaninchenpaare stammen in einem Jahr von einem einzigen Paar ab?

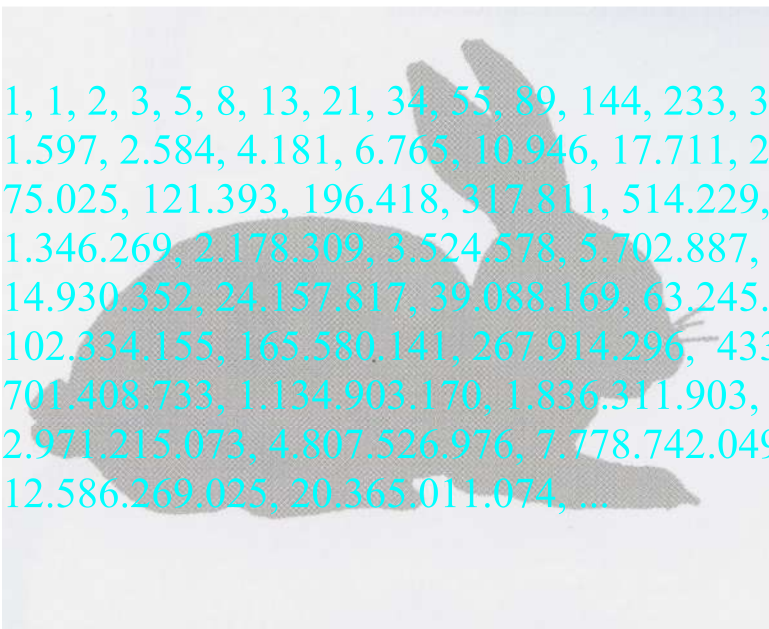
Jemand schloss ein Kaninchenpaar in einen vollständig mit Wänden abgeschlossenen Raum, um herauszufinden, wie viele Kaninchenpaare in einem Jahr von diesem einen Paar abstammen. Von Natur aus zeugt jedes Kaninchenpaar ein weiteres Paar pro Monat. Dieses wiederum beginnt vom zweiten Lebensmonat an, sich fortzupflanzen.

Um das Problem zu lösen, setzen wir zum Beispiel, dass es im November eine gewisse Anzahl Kaninchenpaare gebe, sagen wir 21, und dass es im Oktober 13 gewesen seien. Von den Paaren des Monats November sind somit acht neu geboren worden und daher noch nicht zeugungsfähig. Folglich wird es im Dezember die 21 Paare vom November geben plus die 13 Paare, die von den Kaninchen gezeugt wurden, die bereits im Oktober da waren.

Dies ist immer wahr und folglich muss man - wie Fibonacci beobachtet -, um die Zahl der Kaninchen zu finden, nichts anderes tun, als die Summe zu bilden:

der ersten und der zweiten Zahl, also 1 und 1; dann der zweiten und der dritten, der dritten und der vierten, der vierten und der fünften, und so weiter, bis zur Summe der zehnten und der elften Zahl, also 89 und 144, um die Schlusssumme von 233 Kaninchenpaaren zu finden. In dieser Weise kann für beliebig viele weitere Manate fortgefahren werden.

Die Folge 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610, ... heisst heute die *Fibonacci-Folge* und die Zahlen, aus denen sie besteht, werden die *Fibonacci-Zahlen* genannt. Später wurde entdeckt, dass sich die Fibonacci-Folge natürlicherweise in der Natur und der Kunst findet, und heute ist der Name von Leonardo Fibonacci einem breiteren Publikum gerade dank dieser Zahlenfolge bekannt, die er selbst sehr wahrscheinlich als eine reine Kuriosität betrachtet hatte.



1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1.597, 2.584, 4.181, 6.765, 10.946, 17.711, 28.657, 46.368, 75.025, 121.393, 196.418, 317.811, 514.229, 832.040, 1.346.269, 2.178.309, 3.524.578, 5.702.887, 9.227.465, 14.930.352, 24.157.817, 39.088.169, 63.245.986, 102.334.155, 165.580.141, 267.914.296, 433.494.437, 701.408.733, 1.134.903.170, 1.836.311.903, 2.971.215.073, 4.807.526.976, 7.778.742.049, 12.586.269.025, 20.365.011.074, ...

Muscheln und andere Kuriositäten. 17

Ein geometrisches Problem, das zu den Fibonacci-Zahlen führt, ist dasjenige der Konstruktion aneinanderliegender Quadrate. Gehen wir von einem Quadrat mit der Seitenlänge 1 aus. Auf der Fläche dieses Quadrats konstruieren wir ein zweites anliegendes Quadrat, ebenfalls mit der Seitenlänge 1. Die zwei Quadrate werden dann ein Rechteck der Fläche 2×1 bilden, und somit wird das nächste anliegende Quadrat die Seitenlange 2 haben. Zusammen mit den vorhergehenden wird dieses Quadrat ein Rechteck der Fläche 3×2 bilden, an das sich ein Quadrat mit der Seitenlange 3 anschliessen wird. Wenn man in dieser Art fortfährt, bildet man eine Sequenz von Quadraten, deren Seitenlängen der Folge der Fibonacci-Zahlen 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, etc. entsprechen. Wird in jedem Quadrat ein Viertel eines Kreises gezogen wie in der Abbildung, erhält man die sogenannte Fibonacci-Spirale, eine Form, die bei gewissen Muscheln beobachtet werden kann.

Die Muscheln sind lediglich ein Beispiel für ein verbreitetes Phänomen: das Vorkommen der Fibonacci-Zahlen in der Natur. Die Fibonacci-Zahlen finden sich in der Position der Blätter und der Blumenblätter von Blumen, in den Verzweigungen einiger Pflanzen, in der Anordnung der Samen der Sonnenblumen oder der Schuppen der Tannzapfen. Letztere sind so angeordnet, dass sie zwei Serien von entgegengesetzten Spiralen bilden, die im Zentrum zusammenfliessen. Im selben Tannzapfen oder der selben Sonnenblume sind die Zahlen der Spiralen, die sich in beide Richtungen winden, aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen.

Die Fibonacci-Zalhen und der Goldene Schnitt. 18

Eine unerwartete Eigenschaft der Fibonacci-Zahlen ist, dass - je länger man die Folge fortsetzt — das Verhältnis zwischen einer Zahl dieser Folge und der vorhergehenden sich immer mehr der irrationalen Zahl $\gamma = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ = 1,6180339887498948482045 86.... annahert. Dieses Verhältnis, das sich bereits in den *Elementen* des Euklid als Lösung des Problems der "Division des Segments in einem mittleren und extremen Verhältnis" findet, wird von Luca Pacioli - der ihr einen ganzen Band mit diesem Titel widmete — die "Göttliche Proportion" und später "Goldener Schnitt" oder "Goldene Zahl" genannt. Der Goldene Schnitt hat spezielle Eigenschaften der Symmetrie und spielt in den bildenden Künsten eine wichtige Rolle. Leonardo da Vinci konstruierte die Proportionen des menschlichen Körpers auf der Basis des Goldenen Schnitts. In der näheren Vergangenheit stand dieser im Zentrum der Interessen von Mondrian und Severini.

Ebenfalls noch den Fibonacci-Zahlen und dem Goldenen Schnitt der *Modulor* von Le Corbusier, während die Achse des Turmes des Palazzo Vecchio in Florenz die Breite gemäss des mittleren und extremen Verhältnisses teilt.

Money and interests. 19

Loans and interests have always had a particular role in commercial arithmetic. Usually, the monetary unit is the lira, made up of 20 soldi that have the individual value of 12 denari; therefore, the lira has the value of 240 denari.

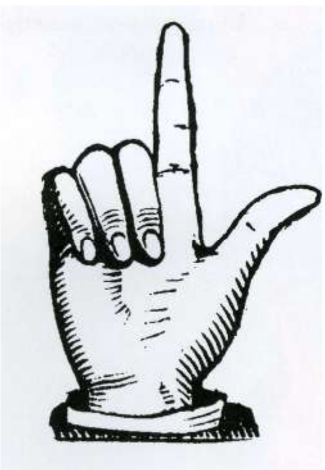
The interest is accrued only after one year (this is called: “new year's merit”), while as far as the fractions of the year are concerned, simple interest is calculated. This latter is expressed in denari per lira a month; a denaro per lira a month is equivalent to 12 denari per lira a year. Since 12 denari are one soldo, that is a twentieth of lira, it corresponds to an interest rate of 5%. Therefore, 4 denari per lira a month give an annual interest rate of 20%.

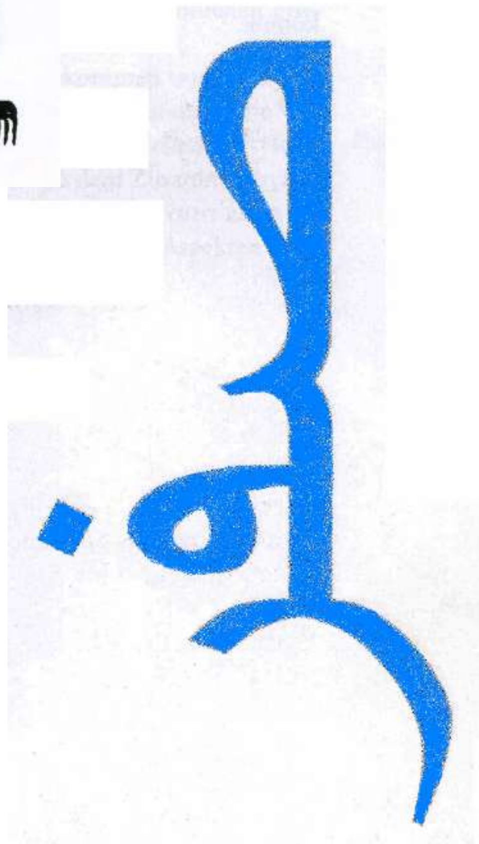
Hand memory.

During the Middle Ages, paper was a precious commodity and consequently many operations that are nowadays carried out by writing on paper were accomplished mentally or by writing precariously in the dust or in the sand. It was very important to have the oppportunity to memorise partial results, so as to recall and use them later.

The most common way to remember a number was “to hold it in one's hands” by means of an elaborate system of the position of fingers. Units and tenths (that is a number from 1 to 99) were held in the left hand, while the right hand was used symmetrically to register hundreds and thousands. So, the position that indicated a number in one's left hand, for instance 35, indicated as many hundreds -- that is 3500 -- in one's right one.

The art of holding numbers in one’s hands represented a very important part of the learning of arithmetic and therefore the treaties of the abacus always contained two pages with the figures for the position of one’s fingers at the beginning.





Probleme des *Liber Abaci*: Alte und Katzen.

21

Einige Problemstellungen, die im *Liber Abaci* behandelt werden, sind uralten Ursprungs und waren über Jahrtausende weitergegeben worden, bevor sie Leonardo Fibonacci und dann schliesslich unsere Zeit erreichten. Eines der ältesten Probleme, das sich bereits im Papyrus Rhind findet, besteht darin, die Summe einer geometrischen Folge im Verhältnis 7 zu ziehen:

Sieben Häuser, injedem sieben Katzen, jede Katze tötet sieben Mäuse, jede Maus hatte sieben Körner gegessen, jedes Korn produziert sieben Hekat. Welches ist die Gesamtsumme von all diesen Dingen?

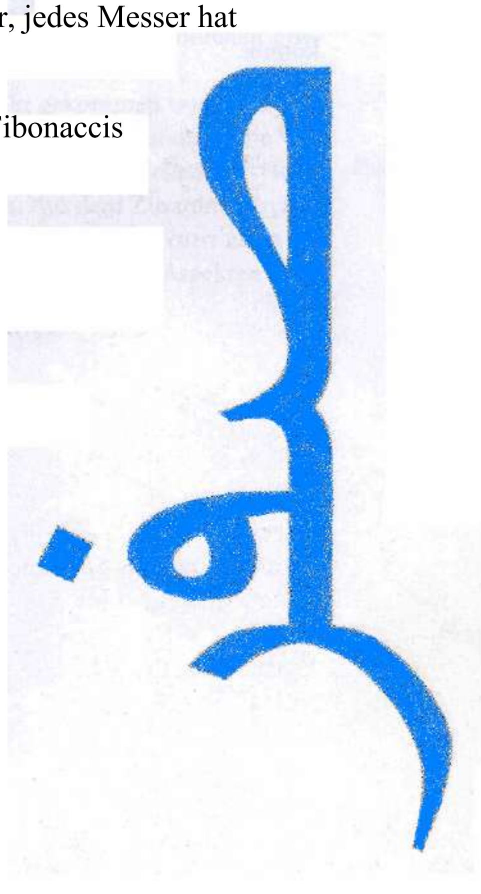
Dieses Problem ist bis in unsere Zeit gelangt:

Auf einer Strasse, die nach Camogli führt,
traf ich einen Mann mit sieben Ehefrauen.
Jede Ehefrau hatte sieben Säcke,
und in jedem Sack waren sieben Katzen,
jede Katze mit sieben Kätzchen.
Unter Säcken, Katzen, Kätzchen und Ehefrauen
zu wie vielen gingen sie nach Camogli?

Im *Liber Abaci* findet sich folgende Äusserung:

Sieben Alte gehen nach Rom, jede hat sieben Maulesel, jeder Maulesel trägt sieben Säcke, in jedem Sack befinden sich sieben Brote, jedes Brot hat sieben Messer, jedes Messer hat sieben Scheiden, Es wird die Summe von allen gefordert.

Im Papyrus Rhind finden sich fünf, im Verslein von Camogli vier, in Fibonaccis Problemstellung sechs Terme.



Problems from the *Liber Abaci*: the chessboard.

22

Another very ancient problem that has remained unsolved until the present day concerns the game of chess. Over the years, it has recounted that its creator asked for a grain as reward for the creation of the first square, two for the second one, four for the third one, eight for the fourth one and so on, doubling until the last square of the chessboard, the sixty-fourth one.

Fibonacci did not mention the legend, but he calculated the number of grains as 18.446.744.073.709.551.615.

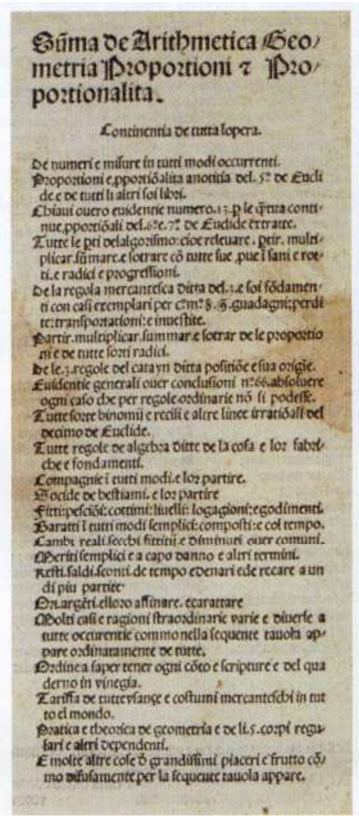
It is difficult to imagine what such a long number might mean and to have an idea of its enormity. But after all, when written, it does not seem to be so dreadfully great. In order to make the reader have a more definite idea about this number, Leonardo ponders: how many ships could be loaded if each of them can carry 500 Pisan bushels weighing 24 sextaries each, with a sextary composed of 140 libras of 12 ounces each, that in turn have the individual value of 25 denari, each of which weighs 24 grains? The result is surprising: one would load up 1.525.028.455 ships -- more than one and half billion, a number "that is apparently innumerable and almost infinite".

The legacy of the *Liber Abaci*. 23

Falling in a mathematically undeveloped environment, the *Liber Abaci* required a considerable amount of time before coming to fruition. We must wait until the last part of the thirteenth century until we have some concrete proofs of the influence of Fibonacci on the development of mathematics in Italy. These were almost always strictly connected with the activities of the schools of abacus. Indeed, most of the abacus treaties drew inspiration from the work of Pisano, who is now universally recognized as the founder and major exponent of Mediaeval mathematics.

Towards the middle of the fifteenth century, the invention of the printing press changed the way culture was transmitted, causing the progressive disappearance from collective knowledge of those authors whose works were not to be printed. Not even Fibonacci escaped this fate and, by the sixteenth century, he was merely a name: Cardano placed Leonardo "a few years before" Luca Pacioli; Bernardino Baldi, the author of *Cronica de' matematici,* mentioned him as a mathematician living in the fifteenth century.

Only in the nineteenth century was Fibonacci situated in the correct historical perspective.



Sũma de Arithmetica Geometria Proportioni & Proportionalita.

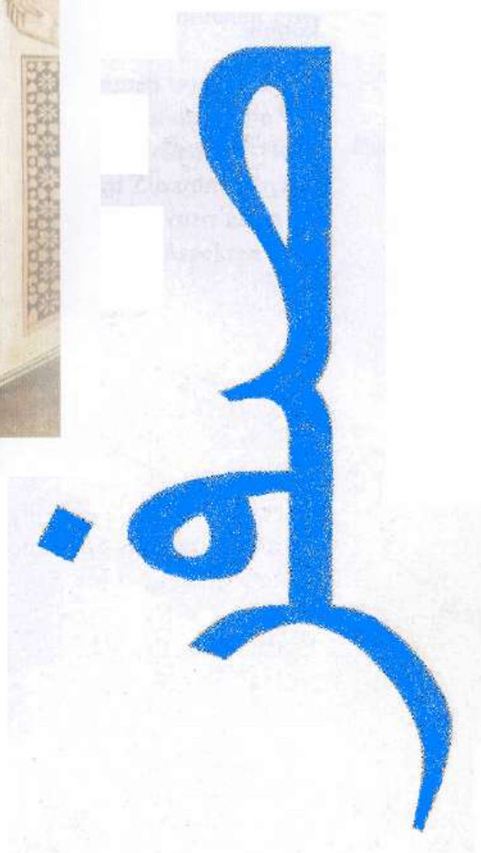
Continentia de tutta lopera.

De numeri e misure in tutti modi occurrenti.
Proportioni e ppportiõalita anotitia del. 5° de Euclide e de tutti li altri soi libri.
Chiaui ouero euidentie numero.13. p le quãtita continue pportiõali del.6° e.7° de Euclide extratte.
Tutte le parti delalgorismo: cioe releuare. partir. multiplicar. sũmare. e sotrare cõ tutte sue pue i sani e rotti. e radici e progressioni.
De la regola mercantesca ditta del.3. e soi fõdamenti con casi exemplari per cõm° §.g.guadagni: perdite: transportationi: e inuestite.
Partir. multiplicar. summar. e sotrar de le proportioni e de tutte sorti radici.
De le.3. regole del catayn ditta positiõe e sua origie.
Euidentie generali ouer conclusioni n° 66. absoluere ogni caso che per regole ordinarie nõ si podesse.
Tutte sorte binomij e recisi e altre linee irratiõali del decimo de Euclide.
Tutte regole de algebra ditte de la cosa e lor fabriche e fondamenti.
Compagnie i tutti modi. e lor partire.
Socide de bestiami. e lor partire
Fitti: pesciõi: cottimi: liuelli: logagioni: e godimenti.
Baratti i tutti modi semplici: composti: e col tempo.
Cambi reali. secchi fittitij e diminuti ouer comuni.
Meriti semplici e a capo danno e altri termini.
Resti. saldi. sconti. de tempo e denari e de recare a un di piu partite.
Oro. argẽti. e lloro affinare. e carattare
Molti casi e ragioni straordinarie varie e diuerse a tutte occurentie commo nella sequente tauola apare ordinatamente de tutte.
Ordine a saper tener ogni cõto e scripture e del quaderno in vinegia.
Tariffa de tutte vsange e costumi mercanteschi in tutto el mondo.
Pratica e theorica de geometria e de li.5. corpi regulari e altri dependenti.
E molte altre cose d grandissimi piaceri e frutto cõmo difusamente per la sequente tauola appare.

Commerce and mathematics. 24

At the beginning of the fourteenth century, the intensifying of trade led to the development of companies with branches in different towns. Their unity was based, on the one hand, on an intense exchange of correspondence and, on the other, on a tested accounting system that had been improved through practice. Aside from the first registration *pro memoria*, the journal for the daily writing of operations in chronological order appeared. Then the ledger was created in order to have a profit and loss account reserved for each usual correspondence agent. In addition, there were other specific account books concerning instrumental and patrimonial properties, goods and members.

Elementary arithmetic was no longer sufficient for such complex commercial organisations. Its bookkeeping necessities required updated notions - in the first place those Arabic figures, that were considered obstacles rather than useful tools in small companies. The necessities of advanced companies, often acting at an international level, constituted the main reason for the diffusion of the techniques and innovative notations contained in the *Liber Abaci.*



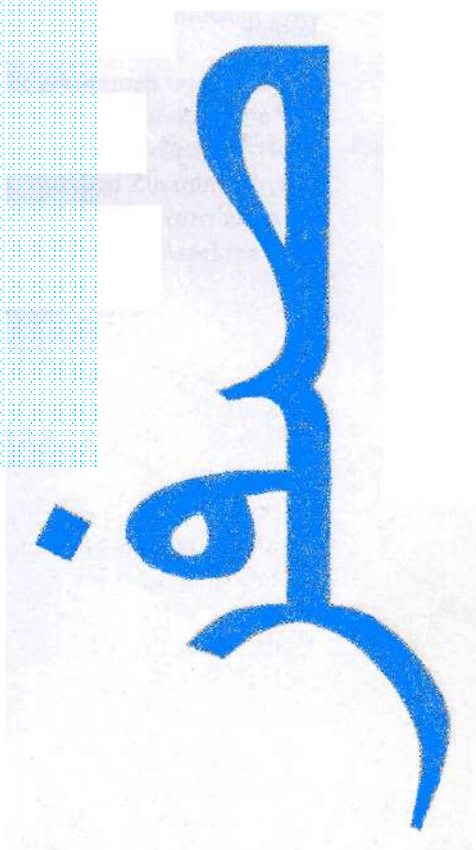
The abacus schools.

The diffusion of Arabic figures and the corresponding methods of calculation occured largely thanks to institutions that have probably been unique in the history of Europe, the abacus schools. These developed from the late thirteenth century, especially in the most active commercial centres where trade activities expanded, creating a wealthy commercial middle class that would soon claim for itself the political control of the republics.

In smaller centres, abacus teachers were usually paid by the Municipalities that used them as advisors for measurements and evaluations. In big towns, such as Venice and Florence, a great number of private schools of abacus were founded. These would operate continuously until the sixteenth century, when institutes of religious education would replace them.

Although incomplete, the first proofs of the presence of masters of abacus in many Italian towns indicate a clear prevalence of Tuscan centres and masters.

Pisa	1241	Leonardo Fibonacci
Bologna	1265	Pietro da Bologna
San Geminano	1279	Michele
Perugia	IInd half of the XIIIth Century	
Verona	1277	Lotto da Firenze (1285)
Venezia	1305	Gentile dall'abaco
Siena	1312	Gherardo di Chiaro da Firenze
Savona	1345	Nello da Pisa
Lucca	1345	Iacopo da Firenze
Pistoia	1353	Ricco di Vanni da Prato
Genova	1373	Tommaso di Miniato da Pisa
Genova	c. 1375	Tommaso di Bonaccio da Pisa
Arezzo	1394	Benedetto di Domenico da Prato
Volterra	1409	Filippo de Follis da Pisa
Modena	1421	Bonifacio di Ferro
Brescia	1436	Benedetto da Firenze



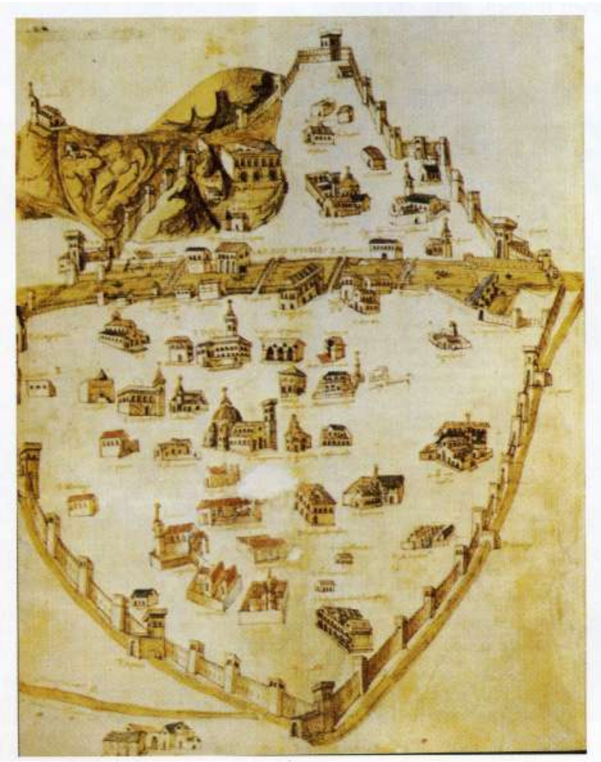
The abacus schools in Florence.

The diffusion of the abacus schools was particularly important in Florence, where the unique phenomenon of mass education occured. According to the *Cronica* by Giovanni Villani, in 1338:

We estimate the number of young boys and girls who learn to read from eight to ten thousand. The young boys who learn the abacus and the algorithm in six schools from one thousand to two thousand and two hundred. And those who are studying grammar and logic in four big schools from five hundred and fifty to six hundred.

From the middle of the fourteenth century to the first thirty years of the sixteenth century, there were twenty schools of abacus in Florence, a number that might grow as archival research continues.

Florence was then divided into the quarters of Santa Maria Novella, Santa Croce, San Giovanni and Santo Spirito. These in turn were subdivided into four Gonfalons.



The abacus schools in Florence: the quarter of Santa Maria Novella.

Gonfalon of the Unicorn	School of Santa Trinita (c. 1340–1450)	[Biagio il vecchio] [Paolo dell'abaco] [Michele di Gianni] Don Agostino di Vanni Antonio di Giusto Mazzinghi, Giovanni di Bartolo Lorenzo di Biagio Mariano di M° Michele Taddeo di Salvestro dei Micceri
	School of Lungarno Corsini (1367–1445)	Biagio di Giovanni [Antonio Mazzinghi] Michele di Gianni Luca di Matteo Giovanni di Luca Calandro di Piero Calandri
	School of Via dell'Inferno (1514)	Marco di Iacopo Grassini
	School of S. Maria della Scala (1458–1469)	Benedetto da Firenze
Gonfalon of the red Lion	School of the Corticina dell'abaco (c. 1460–1506)	Calandro di Piero Calandri Benedetto da Firenze Pier Maria Calandri Filippo Maria Calandri
	School of Via Ferravecchi (1493–1500)	Giovanni del Sodo
Gonfalon of the Viper	School of Santi Apostoli (1375–1527)	Michele di Gianni Orlando di Piero Mariano di Michele Benedetto di Antonio Banco di Piero Banchi Niccolò di Lorenzo Taddeo di Salvestro dei Micceri Niccolò di Taddeo Micceri Piero di Zanobi Giuliano di Buonaguida della Valle
	School of Piazza dei Pilli (c. 1447–1458)	Calandro di Piero Calandri

The abacus schools in Florence: the quarter of Santa Croce. 28

Gonfalon of the Wheels	School of Via dei Neri (1475)	Niccolò di Taddeo Micceri
	School of Badia Fiorentina (1452–1453)	Bettino di Ser Antonio da Romena [Lorenzo di Biagio da Campi]
	[School of Borgo Pinti] (1519–1522)	Francesco di Leonardo Galigai Giuliano di Buonaguida della Valle
Gonfalon of the black Lion	[School of Piazza Peruzzi] (1283–1334)	Iacopo dell'abaco
	School of Via dei Rustici (c. 1530)	Antonio di Taddeo dei Micceri

The abacus schools in Florence: the quarter of San Giovanni.

Gonfalon of the Fur	School of Santa Margherita de' Ricci (1370–1376)	Tommaso di Davizzo dei Corbizzi Bernardo di Tommaso [Cristofano di Tommaso] Antonio Mazzinghi
	School of Canto di Croce Rossa (c. 1493–1495)	Iacopo di Antonio Grassini [Marco di Iacopo Grassini] [Raffaello di Giovanni Canacci]
Gonfalon of the Dragon	School of Via Teatina (1452–1464)	[Benedetto da Firenze]

30

The abacus schools in Florence: the quarter of Santo Spirito.

Gonfalon of the Dragon	[School of Via della Chiesa (1458–1469)]	[Lorenzo di Biagio da Campi]
Gonfalon of the Shell	School of Borgo S. Iacopo (c. 1495)	Raffaello di Giovanni Canacci
Gonfalon of the Ladder	School of Via dei Bardi (1495–1499)	Ser Filippo

An abacus school in Pisa 31

Among the documents that describe the teaching in the schools of abacus, the most detailed concerns the school of Cristofano di Gherardo di Dino, who taught abacus in Pisa in 1442:

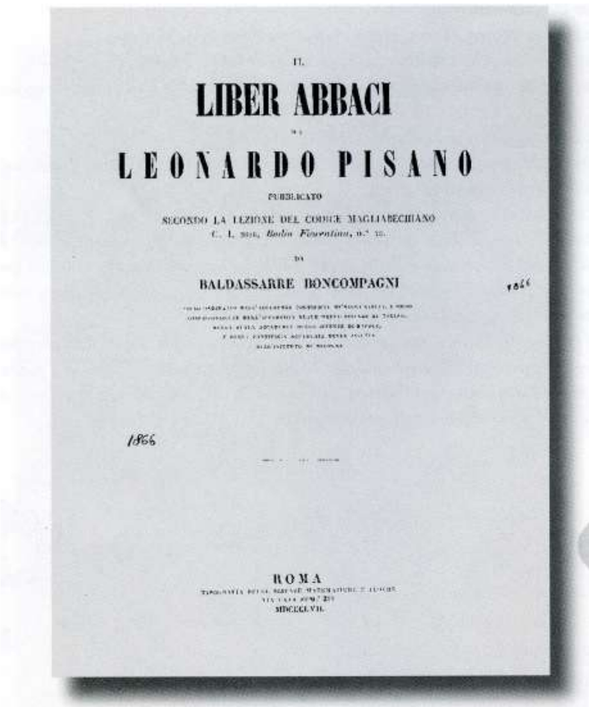
This is the way of teaching the abacus in Pisa, from the beginning to the end of the students' learning period, as we will say.

- *At first, when the boy begins school, he is taught how to make figures, that is 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1;*
- *Then he is taught how to keep numbers in his hands, that is his left hand units and tens and in his right hand hundreds and thousands;*
- *Then to draw numbers on tables: that is of two figures what it means, and then three figures, four figures and so on. Then how to keep them in one's hand.*
- *Then one explains the tables of multiplication. One draws it on the table, starting from one times one until ten times ten one hundred, and students learn it very well by heart.*
- *Then one teaches how to make divisions;*
- *Then how to multiply fractions;*
- *Then how to sum fractions;*
- *Then how to divide [fractions];*
- *Then how to accrue simple interests and the "new year's merit";*
- *Then how to measure lands or how to square a number;*
- *Then how to make simple discounts and new year's discounts;*
- *Then how to calculate the ounces of silver;*
- *Then the melting of silver;*
- *Then one makes the comparison between the two amounts;*
- *And note that to make the above-mentioned calculations, students are to use pencils according to their level. And sometimes have them sum with their hands, or else on the blackboard; occasionally give them some extraordinary homework, according to the teacher's will.*
- *Please, note also this general rule: every evening give them homework for the following day according to their level. And, in case of days of rest, homework is to be doubled.*

The rediscovery of Fibonacci in the Nineteenth Century.

At the end of the eighteenth century, with the awakening the historic-mathematical research in Italy, the work of Fibonacci acquired it proper historical context. The forerunners of the Fibonaccian revival were Pietro Cossali, who wrote the *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'algebra* (1798-99), and Gianbattista Guglielmini, author of the *Elogio di Leonardo Pisano* (1812). Some decades later, Guglielmo Libri and Michel Chasles were involved in a controversy concerning the evaluation of the role of Leonardo in the history of algebra and Diophantine analysis.

But the most important restorer of the name and work of Fibonacci was Baldassarre Boncompagni. After a profound study of the life and time of the Pisano, he published the *Opuscoli* (*Liber Quadratorum, Flos* and *Epistola*) in two subsequent editions (1854 and 1856) and later in a monumental edition of all the works of Fibonacci including, together with the already mentioned *Opuscoli*, the *Liber Abaci* (1857) and the *Practica Geometriae* (1862). Even today, Boncompagni's is the only edition of the works by Leonardo.



IL

LIBER ABBACI

DI

LEONARDO PISANO

PUBBLICATO

SECONDO LA LEZIONE DEL CODICE MAGLIABECHIANO

BALDASSARRE BONCOMPAGNI

1866

1866

ROMA

MDCCCLVII